# Informationstheorie

- Wozu das Ganze?
- Information
- Nachrichtenübertragungssysteme
- Codierung
- Kanalkapazität
- .... Signalerkennung

# Wozu das Ganze?

- Begründet:
  - „A Mathematical Theory of Communication“ by C. E. Shannon (1948)
- Wofür:
  - Bessere Analyse von Telekommunikationssystemen

# Was ist Information?

- Der Begriff ≠ Alltagsbedeutung
- Eine Einheit
  - Münzwurf
  - das Bit
  - Würfeln
  - $\log_2(n)$
- Information und Entropie

# Exakte Berechnung

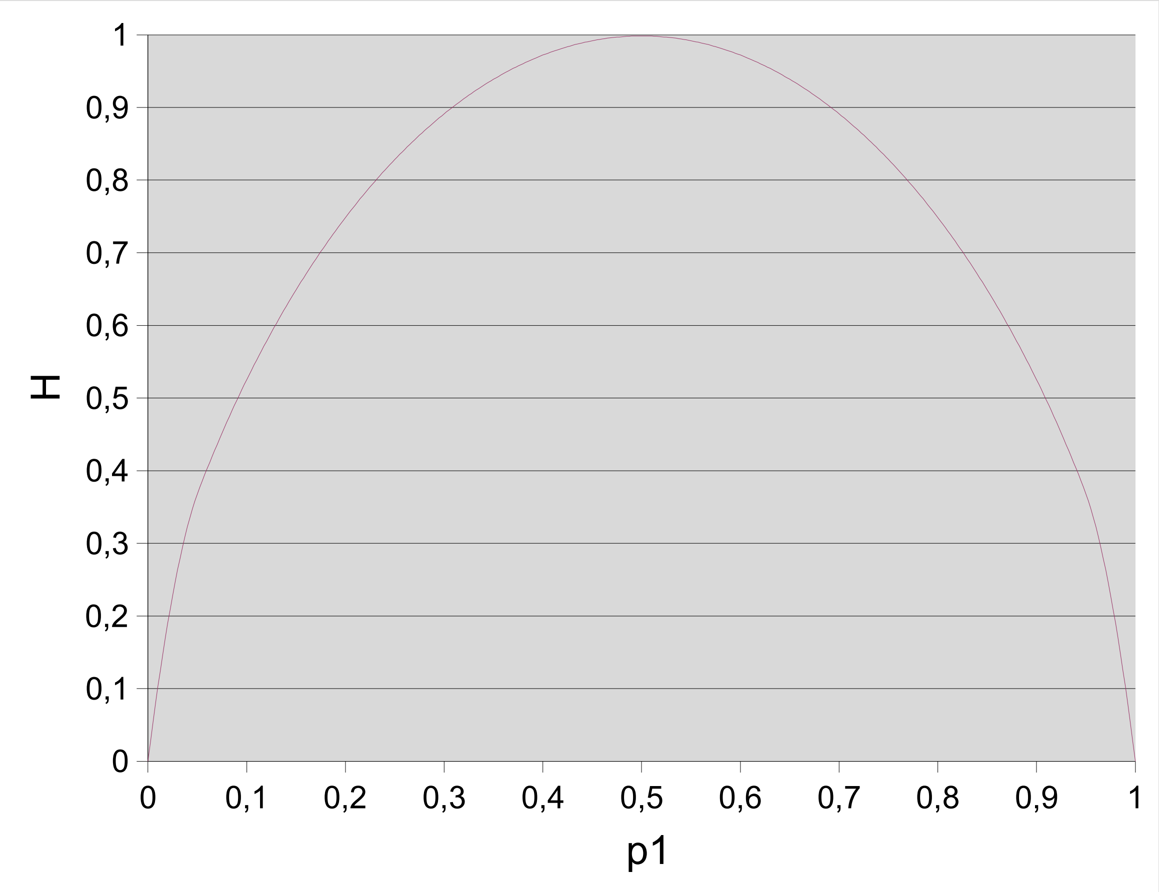
- Eigenschaften
  - $f(n)=f(n_1)+f(n_2)$
    $n=n_1 n_2$
  - stetig
  - monoton wachsend
  - $f(n)=c \log(n)$
- Experiment mit n Ausgängen, in $n_1$ und $n_2$ unterteilt

$$H=\log_2(n)-\frac{n_1}{n}\log_2(n_1)-\frac{n_2}{n}\log_2(n_2)$$
$$H=-p_1\log_2(p_1)-p_2\log_2(p_2)$$
$$H=-\sum_k p_k\log_2(p_k)$$

- Erwartungswert an Information

# Maximum an Information

- Maximum für
$$\forall k:\ p_k = \frac{1}{n} \Rightarrow H = \log_2(n)$$
- Bsp. mit 2 Ausgängen

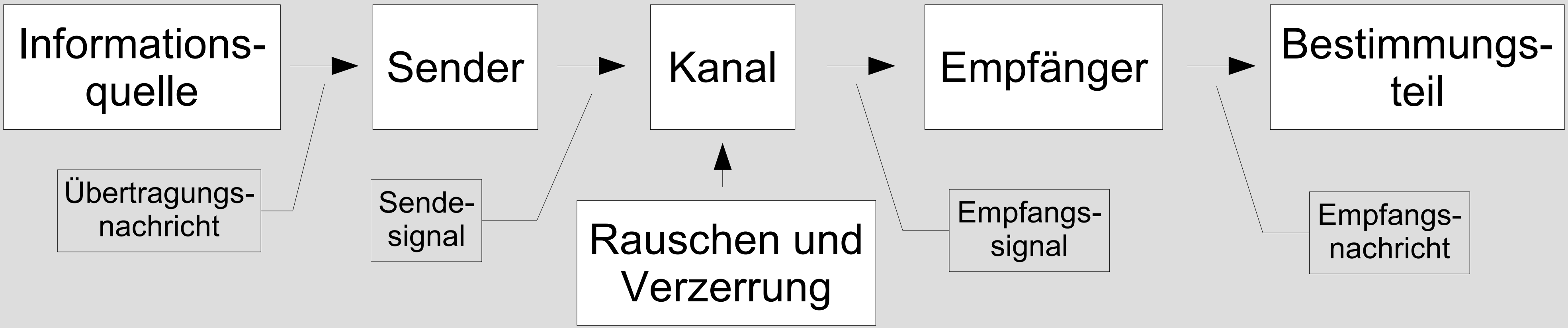


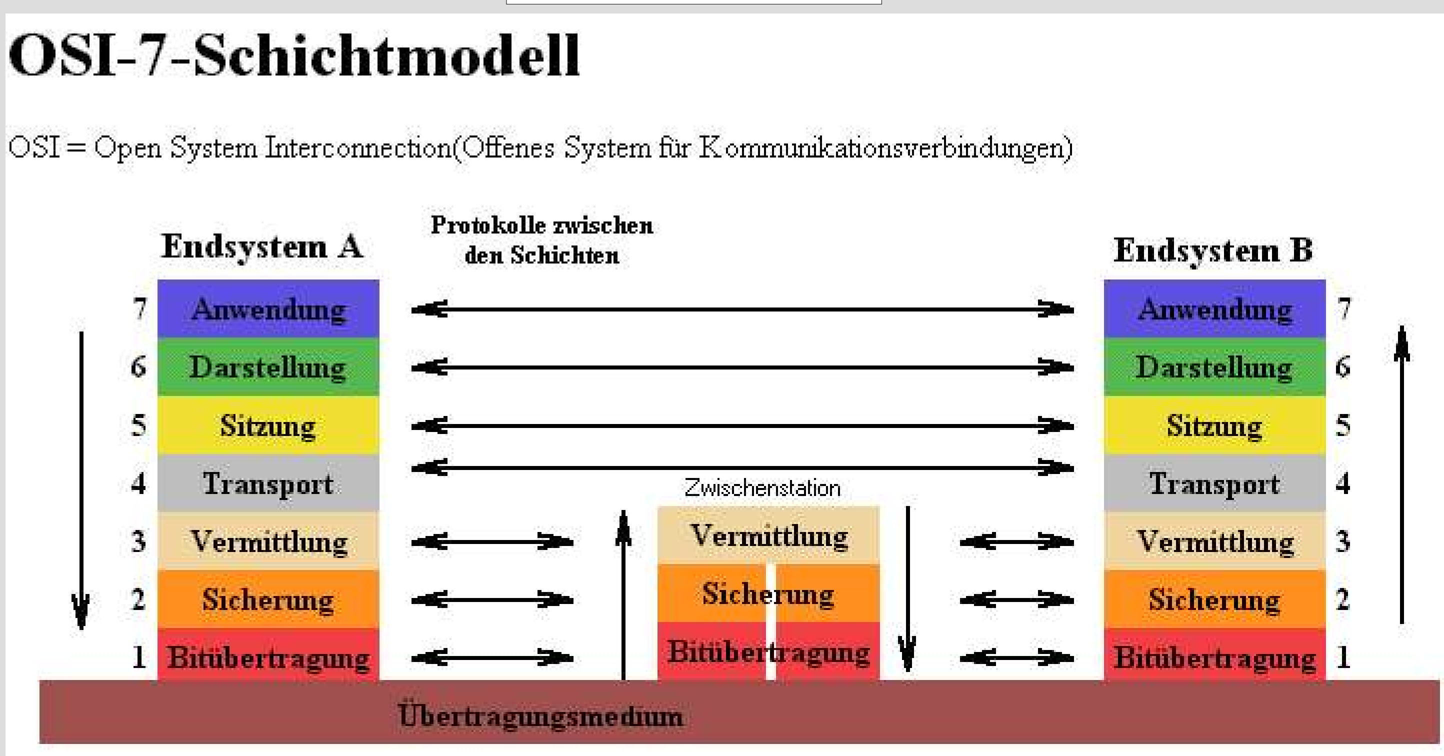

$$H = -p_1 \log_2(p_1) - p_2 \log_2(p_2)$$

# Anwendungen

- Wie gewinnt man das „20-Fragen"-Spiel?
  - Max. $2^{20}$ = 1 048 576 Möglichkeiten
- Finden einer falschen Münze unter 9 mit dreimaligen Wiegen
  - Problem besitzt: $\log_2(2\cdot 9)=4{,}16\,Bit$
  - Max. durch Wiegen zu gewinnen: $3\cdot\log_2(3)=4{,}74\,Bit$
  - 1. Wiegen:
    - n Münzen auf linke / rechte Schale
    - $p_g=\frac{9-2n}{9} \quad p_l=p_r=\frac{n}{9}$
    - Maximum bei n = 3
  - ...

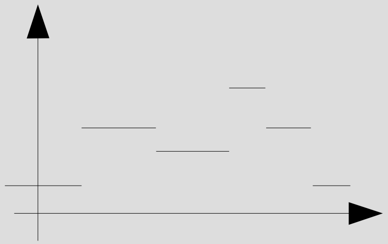
# Nachrichtenübertragungs-systeme

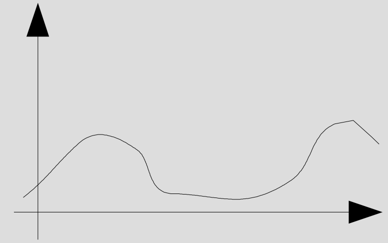


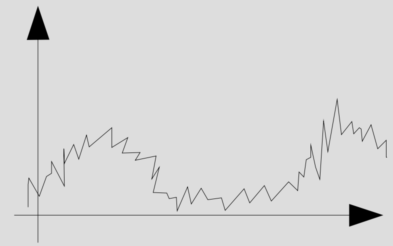
# Der Kanal

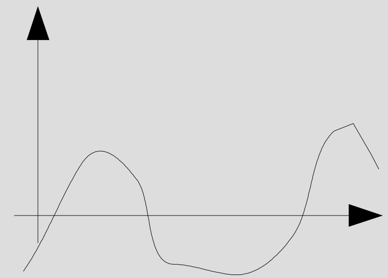
- Kanaltypen
  - Diskrete Kanäle
    - Nur endliche Zustandsmenge kann angenommen werden
  - Kontinuierliche Kanäle
    - Jede reelle Zahl in einem Intervall ist möglich (unendlich viele Zustände)





- Störungen
  - Rauschen
    - Zufälliges Signal (weißes Rauschen)
  - Verzerrungen
    - Bijektive Abbildung
    - Umkehrung möglich





# Codierung

- Was ist das?
  - Umsetzung der Informationen auf anderes Alphabet
    - z.B. A -> 1, B -> 2, ....
  - Präfixeigenschaft
    - z.B. A-> 0, B -> 10, C -> 110, ....
    - 01011001100 -> 0|10|110|0|110|0 -> ABCACA
- Optimaler Code?
  - bestmögliche Ausnutzung durch Einbeziehung der Wahrscheinlichkeiten

# Beispiel Optimales Codieren

- Quelle mit 80 Buchstaben pro Minute:
  - A (80 %) -> 0
  - B (20%) -> 1
  - 80 Ziffern / Minute

| Buchstabe | W-keit | Ziffer | Gewichtete Ziffernanzahl |
|---|---|---|---|
| A | 0,8 | 0 | 0,8 |
| B | 0,2 | 1 | 0,2 |
| | | | 1 |

| Buchstabe | W-keit | Ziffer | Gewichtete Ziffernanzahl |
|---|---|---|---|
| AA | 0,64 | 0 | 0,64 |
| AB | 0,16 | 10 | 0,32 |
| BA | 0,16 | 110 | 0,48 |
| BB | 0,04 | 111 | 0,12 |
| | | | 1,56 |

- 1. Annäherung:
  - 62,4 Ziffern / Minute

| Buchstabe | W-keit | Ziffer | Gewichtete Ziffernanzahl |
|---|---|---|---|
| AAA | 0,512 | 0 | 0,512 |
| AAB | 0,128 | 100 | 0,384 |
| ABA | 0,128 | 101 | 0,384 |
| ABB | 0,128 | 110 | 0,384 |
| BAA | 0,032 | 11100 | 0,160 |
| BAB | 0,032 | 11101 | 0,160 |
| BBA | 0,032 | 11110 | 0,160 |
| BBB | 0,008 | 11111 | 0,040 |
| | | | 2,184 |

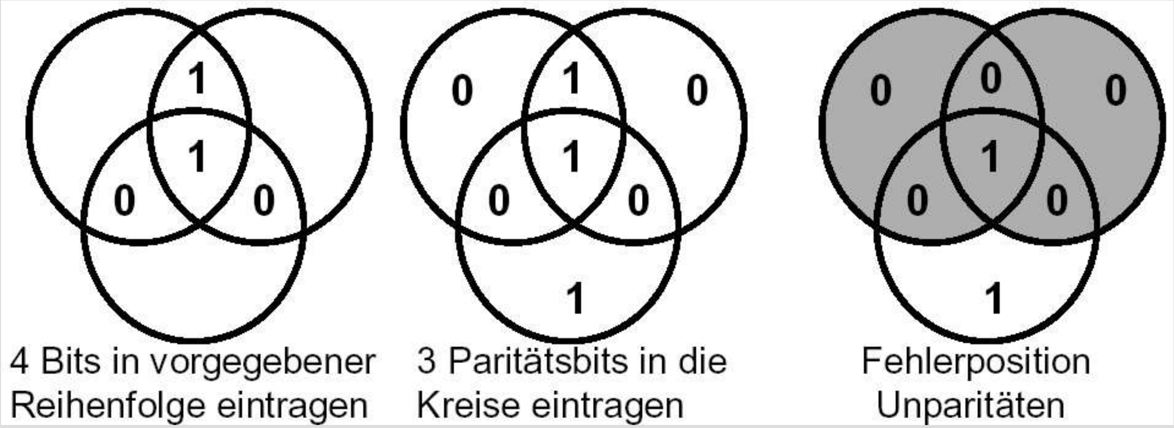
- 2. Annäherung
  - 58,24 Ziffern / Minute
- theoretisches Optimum
  - H = 0,72 Bit -> 57,6 Ziffern / Minute

# Fehlererkennung und Korrektur

- Paritätsprüfung
  - Blockweise Zusatzbit so, dass Anzahl Einsen gerade
  - Nur Erkennung von Fehlern
    - auch nur wenn deren Anzahl ungerade

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

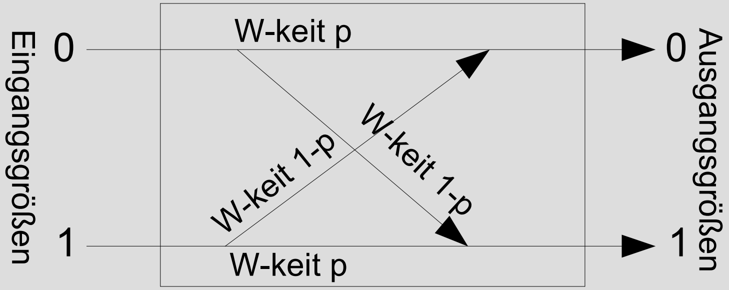
- Hamming Code
  - Korrigiert einen Fehler
  - Erkennt sogar noch 2



# Kanalkapazität bei diskreten Kanälen

- Beispiel binärer Kanal
  - Rauschen -> Bits kippen um
  - z.B.

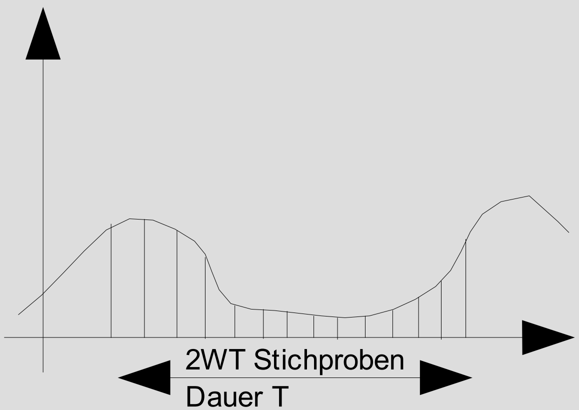
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Eingang** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 0 | 1 |
| **Ausgang** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 1 |
| | **R** | **R** | **F** | **F** | **R** | **F** | **R** | | **R** |




  - „Richtig- / Falsch-Information“ kann als Quelle mit dem Informationsgehalt $-p\log_2(p) \; -(1-p)\log_2(1-p)$ aufgefasst werden
  - Kapazität: $H_c = 1 \; + p\log_2(p) \; + (1-p)\log_2(1-p)$ bit / Symbol

# Kanalkapazität bei kontinuierlichen Kanälen – 1

- Wie viele Signale sind unterscheidbar?
- Signal mit Maximalfrequenz W, weißes Rauschen, ohne Verzerrungen
- Sampling Theorem:
  - Abtastrate = 2W
  - Signal der Dauer T ist durch 2TW-dim. Vektor eindeutig bestimmt

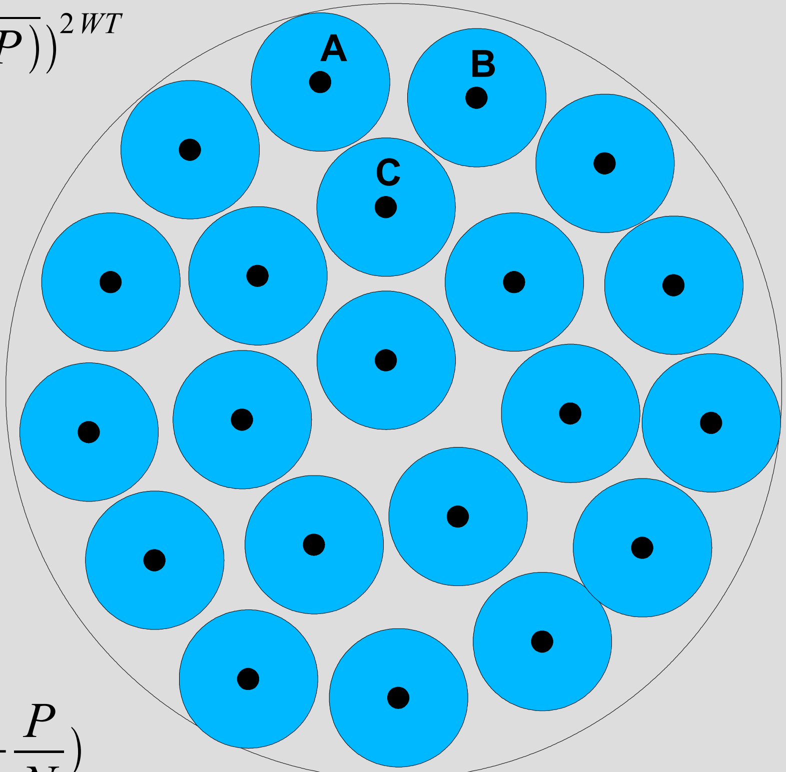



- Signalenergie: $E = \frac{1}{2W} \sum_{n=1}^{2TW} x_n^2$
- Abstand zum Ursprung $d = \sqrt{\sum_{n=1}^{2TW} x_n^2} = \sqrt{2WE} = \sqrt{2WTP}$

# Kanalkapazität bei kontinuierlichen Kanälen – 2

- Signalleistung: P – Rauschleistung: N
- Gesamtvolumen: $V_G \sim (\sqrt{2WT(N+P)})^{2WT}$
- Einzelvolumen: $V_E \sim (\sqrt{2WTN})^{2WT}$
- Anzahl unterscheidbarer Signale: $M \leqslant (1+\frac{P}{N})^{WT}$
- Signal-Rausch-Verhältnis: P/N
- Informationsfluss:

$$W \log_2(1+\frac{P}{N}) + \frac{1}{T}\log_2 E_{av} \leqslant \frac{1}{T}\log_2 M \leqslant W \log_2(1+\frac{P}{N})$$




- mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit: $E_{av}$

# Der Mensch

- Lesen von 500 Worten / Minute
  - 1 Bit / Buchstabe
  - 5 Buchstaben /  Wort
  - 42 bit / s
- Simultan-Blindschach
  - 40 Partien
  - 40 Züge / Spiel
  - 6 Stunden
  - Alle 14 s einen Zug auswendig lernen
  - 3 Bit / Zug
  - 0,2 bit / s aufnehmen und voll verwerten
- Abschätzen von Größen/Kurzzeitgedächtnis
  - 7 unterschiedliche Symbole -> 2,8 bit