

# Mini Forschung

## Räuber Beute Netzwerke

Marco.Moeller@macrolab.de

29.05.2007

Diese Arbeit entstand im Rahmen der “Mini Forschung” (Forschungspraktikum) im WS 2004/05 in der Arbeitsgruppe für Theorie Komplexer Systeme von Prof. Barbara Drossel.

## 1 Einleitung

### 1.1 Was sind Räuber Beute Netzwerke?

Bei Räuber Beute Netzwerken handelt es sich um eine mathematische Abstraktion des fressen und gefressen werdens in der Natur. Es werden allerdings nicht Individuen (einzelne Tiere / Pflanzen) sondern Spezies als ganzes betrachtet. Nun werden Gleichungen aufgestellt, die beschreiben sollen, wie sich die Population und die Nahrungsvorlieben von den einzelnen Spezies entwickeln. Das “Problem” sind nun eben diese Gleichungen. Es gibt hier keine eindeutige Methode solche Gleichungen aufzustellen. Aus der Biologie weiß man einiges darüber, wie sich so etwas in der Realität verhält. Das Ziel ist es also ein System von Gleichungen zu erschaffen, was die Verhältnisse in der Natur so gut wie möglich nachbildet. Hiermit könnte man wohl möglich sogar voraussagen darüber treffen, wie sich Veränderungen in der Umwelt auf das “biologische Gleichgewicht” auswirken.

### 1.2 Was soll herausgefunden werden?

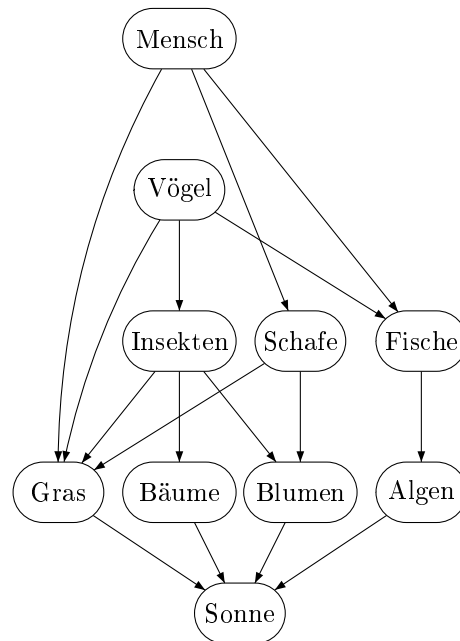
Bei diesen Gleichungen sollte sich unter anderem herausstellen, das sich die Spezies in Kategorien sortieren werden. Zuunterst die Pflanzen, die von einer externen Ressource, der Sonne, leben. Darauf aufbauend sollte sich eine Nahrungskette entwickeln. In der Natur sind solche Nahrungsketten mitunter sehr lang.

Allgemeiner spricht man nicht von Nahrungsketten, sondern von Nahrungsnetzen. Ein solchen Netzwerk könnte z.B. wie in Abbildung 1 auf der nächsten Seite aussehen.

In den vielen bislang vorgeschlagenen Gleichungen bilden sich kaum sehr lange Ketten bzw. komplexere Netze aus.

Vor kurzem ist ein Papier erschienen, das diesem ein wenig auf dem Grund geht. In einem Netz, indem die Einteilung in Beute und Räuber vorgegeben ist, und die Räuber sich entscheiden können von welcher Baute sie wie viel fressen. Hier lässt sich für einige Gleichungssysteme zeigen, dass die Maximale Anzahl von Reuberbeutebeziehungen (Links) strikt kleiner ist als die Summe aus Räuber und Beuteanzahl zusammen, obwohl eigentlich das Produkt das theoretische Maximum sein sollte (siehe Abbildung 2 auf der nächsten Seite). Falls dies für ein Gleichungssystem gilt, ist es nicht sehr verwunderlich, das sich komplexere Netzwerke wie in der Natur kaum ausbilden.

In dieser Arbeit habe ich, betreut von Satoshi Uchida und Prof. Barbara Drossel, einige dieser Gleichungssysteme durch Simulation darauf hin untersucht, wieweit auch sie der entdeckten Gesetzmäßigkeit unterliegen.

Abbildung 1: *Beispiel* für ein Räuberbeutenetzwerk in der Natur

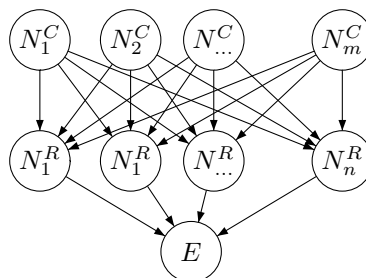
## 2 Die Modelle

Wie schon gesagt, gibt es einige verschiedene Ansätze das Räuber Beute verhalten zu Modellieren. Hier stelle ich nun die von uns untersuchten vor. Wir wollen momentan Netze mit  $n$  Beutespezien (*R*essource) und  $m$  Räuberspezien (*C*onsumer) und einer Externen Ressource (*E*xternal) betrachten. Dies sieht als Netzwerk wie in Abbildung 2 aus.

### 2.1 Lotka Volterra

Folgender Satz Gleichungen sind die Lotka Volterra Beschreibung eines solchen Netzes.

Abbildung 2: vorgegebene Struktur der untersuchten Netzwerke



$$\begin{aligned} \tilde{f}_{(C,i),(R,j)}(t) &= a_{(C,i)(R,j)}(t) \cdot f_{(C,i)(R,j)} \\ \frac{dN_i^C(t)}{dt} &= N_i^C(t) \left( \lambda \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{(C,i),(R,k)}(t) N_k^R(t) - \alpha - \beta N_i^C(t) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{dN_i^R(t)}{dt} = N_i^R(t) \left( \lambda E - \sum_{k=1}^m \tilde{f}_{(C,k)(R,i)}(t) N_k^C(t) - \alpha - \beta N_i^R(t) \right) \quad (2)$$

$$\frac{d\tilde{f}_{(C,i),(R,j)}(t)}{dt} = G \tilde{f}_{(C,i),(R,j)}(t) \lambda \left( f_{(C,i),(R,j)} N_j^R(t) - \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{(C,i),(R,k)}(t) N_k^R(t) \right) \quad (3)$$

Nun zur Interpretation.

- $N_i^C(t)$   
Population der  $i$ -ten Räuberspezies
- $m$   
Anzahl von Räuberspezien
- $N_i^R(t)$   
Population der  $i$ -ten Beutespezies
- $n$   
Anzahl von Beutespezien
- $f_{(C,i)(R,j)}$   
zeitlich unveränderliche Kopplungsstärke zwischen Räuberspezies  $i$  und Beutespezies  $j$ . Dies kann man als eine Art *Futterqualitätskonstante* auffassen, um so größer, je mehr Profitiert der Räuber von fressen dieser Beute.
- $a_{(C,i)(R,j)}(t)$   
Anteil der Zeit, dem die Räuberspezies  $j$  dafür aufwendet die Beutespezies  $j$  zu fressen. Es leuchtet ein, dass  $\forall t : \forall i : \sum_{k=1}^n a_{(C,i)(R,k)}(t) = 1$  gilt (Räuber darf nicht mehr als 100% seiner zeit fressen).
- $\tilde{f}_{(C,i),(R,j)}(t)$   
Diese Größe beziffert, wie viel Beute  $j$  der Räuber  $i$  pro Zeiteinheit frisst
- $\lambda \in (0, 1)$   
Ökologischer Wirkungsgrad. Es leuchtet ein, das beim Fressen ein Teil der Energie die in der Beute steckt nicht genutzt werden kann. Das heißt, das wenn ein Räuber  $k$  Beutetiere frisst, die Räuberpopulation um  $\lambda k < k$  anwächst.
- $E$   
Externe Ressource, diese ist *unerschöpflich* und kann nicht aufgefressen werden.
- $\alpha$   
Todes rate. Dies sind die toten Individuen, die *nicht* gefressen werden.
- $\beta$   
Selbstregulierung. Durch den Term  $\beta N$  wird eine Beschränkung des “Magens” der Population realisiert
- $G$   
Anpassungsgeschwindigkeit der Räuber

Betrachten wir als erstes die zeitliche Entwicklung der Räuber (siehe Gleichung 1 auf der vorherigen Seite). Diese ist zum einen proportional zur Anzahl der Räuber selber. Des weiteren wird für den Räuber die Summe seiner Jagdbemühungen multipliziert mit der Bäutepopulation zusammengerechnet. Da er dies allerdings nicht alles verwerten kann, sondern einen gewissen (verdauungs-) Wirkungsgrad hat, wird dies noch einmal mit  $\lambda$  multipliziert.  $\alpha$  ist dabei eine konstante Geburten und  $\beta$  eine konstante Sterbe rate.

Die Entwicklung der Beute (siehe Gleichung 2 auf der vorherigen Seite) ist ähnlich aufgebaut. Auch ihre Populationsänderung ist proportional zum Produkt aus  $\lambda$  dem biologischen Wirkungsgrad und  $E$  der Zufuhr an externen Ressource. Bei Beuten kommt allerdings zu der normalen Sterbe rate  $\beta$  noch der fraß alle Räuber hinzu. Diese ist proportional zur Gefräßigkeit der Räuber und deren Population.

Da die Räuber die Wahl haben, welche Beute sie fressen sollen ist auch ihre Gefräßigkeit zeitabhängig. Diese ist Proportional zum aktuellen Wert, und zu einer Konstante  $G$ . Dieses  $G$  ermöglicht es die Anpassungsgeschwindigkeit der Räuber an veränderte Beutebedingung zu variieren. In der Klammer stehen nur zwei Ausdrücke. Der erste ist die Menge an Nahrung die  $i$  dadurch gewinnen könnte, das er nur noch  $j$  frisst. Der zweite entspricht der Nahrungsaufnahme wie sie im Moment durch die übrige Versorgung gegeben ist. Wenn hier etwas positives herauskommt, ist es klar, das es sich lohnen würde, mehr von  $j$  zu fressen, und  $\frac{df}{dt}$  ist positiv. Für den umgekehrten Fall natürlich analog.

## 2.2 Predator specific Defence

Hierbei werden die Beuten ebenfalls mit einer Wahlmöglichkeit ausgestattet. Ihnen ist es freigestellt, sich vor einem oder mehreren bestimmten Räubern einen Teil ihrer Zeit  $V_{(R,j)(C,k)}$  zu verstecken. Allerdings sind sie im Versteck nicht in der Lage Nahrung zu sich zu nehmen. Es gilt also ein Optimum zu finden.

$$\tilde{f}_{(C,i),(R,j)}(t) = a_{(C,i)(R,j)}(t) f_{(C,i)(R,j)}$$

$$F_j(t) = a_{(R,j)(E)}(t) \lambda E - \sum_{k=1}^m \tilde{f}_{(C,k)(R,j)}(t) (1 - V_{(R,j)(C,k)}(t)) N_k^C(t) - \alpha - \beta N_j^R(t)$$

$$\begin{aligned} Z_j(t) &= a_{(R,j)(E)} \frac{\partial F_j(t)}{\partial a_{(R,j)(E)}} + \sum_{k=1}^m V_{(R,j)(C,k)}(t) \frac{\partial F_j(t)}{\partial V_{(R,j)(C,k)}} \\ &= a_{(R,j)(E)} \lambda E + \sum_{k=1}^m V_{(R,j)(C,k)}(t) \tilde{f}_{(C,k)(R,j)} N_k^C(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{da_{(R,j)(E)}(t)}{dt} &= G a_{(R,j)(E)}(t) \left( \frac{\partial F_j(t)}{\partial a_{(R,j)(E)}} - Z_j(t) \right) \\ &= G a_{(R,j)(E)}(t) (\lambda E - Z_j(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_{(R,j)(C,k)}(t)}{dt} &= G V_{(R,j)(C,k)}(t) \left( \frac{\partial F_j(t)}{\partial V_{(R,j)(C,k)}} - Z_j(t) \right) \\ &= G V_{(R,j)(C,k)}(t) \left( \tilde{f}_{(C,k)(R,j)} N_k^C(t) - Z_j(t) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{dN_j^R(t)}{dt} = N_j^R(t) F_j$$

$$\frac{dN_i^C(t)}{dt} = N_i^C(t) \left( \lambda \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{(C,i),(R,k)}(t) (1 - V_{(R,k)(C,i)}(t)) N_k^R(t) - \alpha - \beta N_i^C(t) \right)$$

$$\frac{da_{(C,i),(R,j)}(t)}{dt} = Ga_{(C,i),(R,j)}(t) \lambda \left( f_{(C,i),(R,j)} N_j^R(t) - \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{(C,i),(R,k)}(t) N_k^R(t) \right)$$

Hierbei sind folgende Größen neu hinzugekommen:

- $Z, F$   
Hilfsvariablen
- $V_{(R,j)(C,k)}(t)$   
Zeitanteil, dem die Beute  $j$  sich vor dem Räuber  $k$  zu versteckt
- $a_{(R,j)(E)}(t)$   
Zeitanteil, den die Beute  $j$  dazu aufbringt von der Externen Ressource zu fressen.  
Auch hier gilt, das die zeitliche Summe gleich 1 ist:  
 $\forall t : \forall j : a_{(R,j)(E)}(t) + \sum_{k=1}^m V_{(R,j)(C,k)}(t) = 1$

Im Übrigen verhält sich dieses System wie unter 2.1 auf Seite 2 beschrieben.

### 2.3 Nichtlinear

Es wird sich herausstellen, das diese Gleichungen die vermuteten Probleme haben. Eine Idee diese zu *reparieren* war, die Zeitaufteilung nicht linear  $\sum_{k=1}^n a_{(C,i)(R,k)}(t) = 1$  sondern Quadratisch (nichtlinear) zu machen. Die Idee dahinter ist, das so einen Vorteil bringt, wenn man sich von mehr als einer Beute ernährt, da die Summe der Zeiten so größer als 1 werden kann:

$$\sum_{k=1}^n a_{(C,i)(R,k)}^2(t) = 1$$

$$a_{(R,j)(E)}^2(t) + \sum_{k=1}^m V_{(R,j)(C,k)}^2(t) = 1$$

Dies neuen Gleichungen für Lotka-Volterra und Predator specific Defence sehen wie folgt aus.

#### 2.3.1 Lotka Volterra

$$\tilde{f}_{(C,i),(R,j)}(t) = a_{(C,i)(R,j)}(t) f_{(C,i)(R,j)}$$

$$\frac{da_{(C,i),(R,j)}(t)}{dt} = Ga_{(C,i),(R,j)}(t) \lambda \left( f_{(C,i),(R,j)} N_j^R(t) - \sum_{k=1}^n a_{(C,i),(R,k)}(t) \tilde{f}_{(C,i),(R,k)}(t) N_k^R(t) \right)$$

$$\frac{dN_i^C(t)}{dt} = N_i^C(t) \left( \lambda \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{(C,i),(R,k)}(t) N_k^R(t) - \alpha - \beta N_i^C(t) \right)$$

$$\frac{dN_j^R(t)}{dt} = N_j^R(t) \left( \lambda E - \sum_{k=1}^m \tilde{f}_{(C,k)(R,j)}(t) N_k^C(t) - \alpha - \beta N_j^R(t) \right)$$

### 2.3.2 Predator specific Defence

$$\tilde{f}_{(C,i),(R,j)}(t) = a_{(C,i),(R,j)}(t) f_{(C,i),(R,j)}$$

$$F_j(t) = a_{(R,j)(E)} \lambda E - \sum_{k=1}^m a_{(C,k),(R,j)} f_{(C,k),(R,j)} (1 - V_{(R,j)(C,k)}(t)) N_k^C(t) - \alpha - \beta N_j^R(t)$$

$$\begin{aligned} Z_j(t) &= a_{(R,j)(E)}^2 \frac{\partial F_j(t)}{\partial a_{(R,j)(E)}} + \sum_{k=1}^m V_{(R,j)(C,k)}^2 \frac{\partial F_j(t)}{\partial V_{(R,j)(C,k)}} \\ &= a_{(R,j)(E)}^2 \lambda E + \sum_{k=1}^m V_{(R,j)(C,k)}^2 \tilde{f}_{(C,k),(R,j)} N_k^C(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{da_{(R,j)(E)}(t)}{dt} &= G a_{(R,j)(E)}(t) \left( \frac{\partial F_j(t)}{\partial a_{(R,j)(E)}} - Z_j(t) \right) \\ &= G a_{(R,j)(E)}(t) (\lambda E - Z_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_{(R,j)(C,k)}(t)}{dt} &= G V_{(R,j)(C,k)}(t) \left( \frac{\partial F_j(t)}{\partial V_{(R,j)(C,k)}} - Z_j(t) \right) \\ &= G V_{(R,j)(C,k)}(t) (\tilde{f}_{(C,k),(R,j)} N_k^C(t) - Z_j(t)) \end{aligned}$$

$$\frac{dN_j^R(t)}{dt} = N_j^R(t) F_j$$

$$\frac{dN_i^C(t)}{dt} = N_i^C(t) \left( \lambda \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{(C,i),(R,k)} (1 - V_{(R,k)(C,i)}(t)) N_k^R(t) - \alpha - \beta N_i^C(t) \right)$$

$$\frac{da_{(C,i),(R,j)}(t)}{dt} = G a_{(C,i),(R,j)}(t) \lambda \left( f_{(C,i),(R,j)} N_j^R(t) - \sum_{k=1}^n a_{(C,i),(R,k)}(t) \tilde{f}_{(C,i),(R,k)}(t) N_k^R(t) \right)$$

## 2.4 Lotka Volterra - nichtlinear Maximum

Durch Maximieren des Populationszuwachses mit Hilfe der Lagrange Multiplikation kann man auf folgende Beziehung kommen:

$$\tilde{f}_{(C,i),(R,j)}(t) = a_{(C,i),(R,j)}(t) f_{(C,i),(R,j)}$$

$$\frac{da_{(C,i),(R,j)}(t)}{dt} = \frac{G\lambda}{2} \left( f_{(C,i),(R,j)} N_j^R(t) - a_{(C,i),(R,j)}(t) \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{(C,i),(R,k)}(t) N_k^R(t) \right)$$

$$\frac{dN_i^C(t)}{dt} = N_i^C(t) \left( \lambda \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{(C,i),(R,k)}(t) N_k^R(t) - \alpha - \beta N_i^C(t) \right)$$

$$\frac{dN_j^R(t)}{dt} = N_j^R(t) \left( \lambda E - \sum_{k=1}^m \tilde{f}_{(C,k),(R,j)}(t) N_k^C(t) - \alpha - \beta N_j^R(t) \right)$$

Auch hier gilt  $\sum_{k=1}^n a_{(C,i),(R,k)}^2(t) = 1$ . Dies Netzwerk entspricht also Räubern, die Intelligenter Maximieren, als es im Fall von "Lotka Volterra nichtlinear" der Fall war.

### 3 Umsetzung

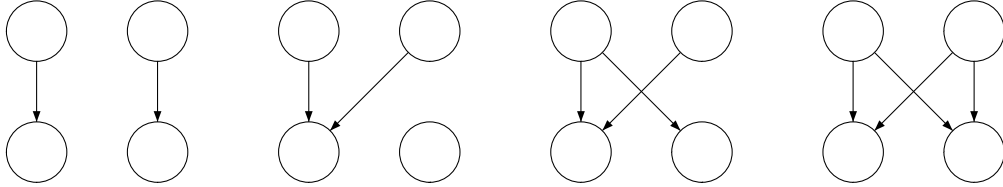
Leider lassen sich diese Gleichungen aufgrund ihrer Kopplungen nicht symbolisch integrieren, weshalb auf numerische Verfahren (Simulation) zurückgegriffen werden muss. Hierzu verwendete ich die Runge-Kutta Methode mit adaptiver Schrittweitenkontrolle<sup>1</sup>. Dies hat den Vorteil, dass sich die geforderte Genauigkeit einstellen lässt, und eine dazu optimale Schrittweite automatisch gefunden wird. Da es das Ziel ist, die Strukturen dieser Netzwerke zu untersuchen, muss bei der Simulation abgewartet werden, bis sich ein stationärer (nicht mehr weiter ändernder) Zustand einstellt. Danach wird die Vernetzungsstruktur analysiert und ein weiteres Netzwerk mit anderen Anfangsbedingungen simuliert. Diese Anfangsbedingungen sind zum Teil fest eingestellt. Hier die von mir genutzten Werte:

- $\alpha = 1$
- $\beta = 1$
- $G = 5$
- $E = 2000$
- $N_i^C(0) = 500$
- $N_i^R(0) = 500$
- $\lambda = 0.2$
- Lotka Volterra - linear:
  - $a_{(C,i),(R,j)}(0) = \frac{1}{n}$
- Lotka Volterra - nichtlinear
  - $a_{(C,i),(R,j)}(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$
- Predator specific Defence - linear
  - $a_{(C,i),(R,j)}(0) = \frac{1}{n}$
  - $V_{(R,j)(C,k)}(0) = \frac{1}{2m}$
  - $a_{(R,j)(E)}(0) = \frac{1}{2}$
- Predator specific Defence - nichtlinear
  - $a_{(C,i),(R,j)}(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

---

<sup>1</sup>Numerical Recipes in C [www.library.cornell.edu/nr/cbookcpdf.html](http://www.library.cornell.edu/nr/cbookcpdf.html)

Abbildung 3: Auflistung der Möglichkeiten von Netzwerkstrukturen mit 2 Räubern und 2 Beuten



$$\begin{aligned}
 - V_{(R,j)(C,k)}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \\
 - a_{(R,j)(E)}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Einige sind allerdings logischer weise von mal zu mal verschieden.

- $f_{(C,i)(R,j)} = \text{random} \in [0, 1]$

Diese werden mit Hilfe des Pseudozufallszahlengenerators `RANDOM()` aus der C++ Library. Dies hat den Vorteil, das ein Gebiet an zahlen gleichmäßig aber ohne erkennbares System (welches Nebeneffekte haben könnte) abgesucht werden kann. Und das auch noch reproduzierbar! So habe ich bei allen Resultaten die ich im folgenden Angebe, bei gleichen Systemgrößen und gleicher Anzahl an Simulationsdurchläufen, immer die selben Pseudozufallszahlen verwendet. Zudem muss in jedem schritt eine Korrektur der Kopplungen vorgenommen werden, da sie zwar rein analytisch in der Summe 1 ergeben müssten, aber es in der Praxis auf Grund von Rundungsfehlern nicht tun. Hierzu werden sie einfach entsprechend linear runter skaliert.

Das Analysieren des stationären Zustands erfolgte nach zwei Methoden. Bei beiden Methoden muss man allerdings vorweg einmal entscheiden, wann ein Link zwischen einem Räuber und einer Beute als vorhanden betrachtet werden kann. Es zeigt sich, das diese Werte entweder deutlich von 0 verschieden waren, oder aber gegen 0 streben. Ich habe als Schwellwert ein  $a_{(C,i),(R,j)}(t) > a_{min} = 0.001$  gewählt. Die genaue Beschreibung dieser beiden Methoden erfolgt im nächsten Abschnitt.

Noch einmal kurz zum erkennen der Fixpunkte. Falls in einem Integrationsschritt die relative Steigung  $\frac{dx}{x \cdot \Delta t}$  für alle Integrationsvariablen keiner als 0.1 sein sollte, wird dies als Stationäre Zustand erkannt, und die Integration hier beendet. Hierbei kommen werden allerdings nur die  $\frac{dx}{dt}$  berücksichtigt, die größer als ein Konstante  $10^{-30}$  sind, da sonst die relativen Steigungen bei keinen Werten riesig werden.

## 4 Ergebnisse

### 4.1 Strukturen kleiner Netzwerke

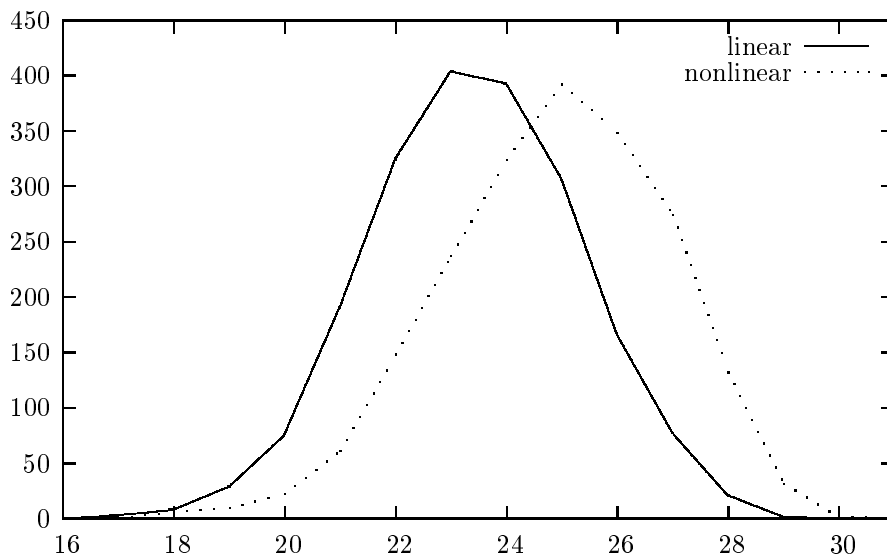
Für Netze mit  $m = n = 2$  ließen sich, bis auf Vertauschung der Räuber / Beuten, Strukturen wie in Abbildung 3 beobachten. Diese wurden anschließend ausgezählt. Die gezählten Häufigkeiten sind in Tabelle 1 auf der nächsten Seite aufgeführt.

Es hat den Anschein, das nur die linear bzw. Nichtlinearitäten über den Ausgang entscheidet. Dies lässt sich damit begründen, das die Beuten bei Predator specific Defence sich alle dazu entschieden haben, sich nicht zu verstecken, womit es keinen unterschied mehr zu den Lotka Volterra Gleichungen gab.



Tabelle 1: Häufigkeiten von verschiedenen Mustern in Abhängigkeit des gewählten Gleichungssystems

	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)
Lotka Volterra - linear	19902	14116	5981	1
Lotka Volterra - nichtlinear	19890	14103	6005	2
Predator specific Defence - linear	19902	14116	5981	1
Predator specific Defence - nichtlinear	19890	14103	6005	2
Lotka Volterra - nichtlinear Maximum	0	0	69	39931

Abbildung 4: Anzahl von gefunden Netzen mit  $x$  Links (ohne Lotka Volterra - nichtlinear Maximum)

Des weiteren bestätigt dies die Theorie die voraussagt, das es in einem solchen Netz maximal 3 Links geben kann. Die einzelnen voll vernetzten Netzwerke lassen sich damit begründen, dass die numerische Simulation hierfür nicht genau genug arbeitet.

Das einführen der Nichtlinearität in den Gleichungen konnte hieran leider nichts ändern. Aber es hat die relative Häufigkeit eines stärker vernetzten Systems anscheinend erhöht. Um dies weiter zu untersuchen gehen wir nun zu größeren Netzen über.

Einzig die maximierte Lotka Volterra Version hatte fast immer maximale Linkzahl. Die Ausnahmen sind vermutlich auf numerische Ungenauigkeiten zurückzuführen. Hier haben wir also einen Gegenbeispiel für die Obere Schranke der Linkzahlen.

## 4.2 Linkhäufigkeit

Eine andere Möglichkeit, Netze zu analysieren mit mehr als 2 Räuber / Beutespezies, ist es einfach die Gesamtanzahl der Links zu zählen, und zu schauen, welche Anzahl wie Häufig vorkommt. Dies habe ich für die 5 vorgestellten Gleichungssysteme mit  $m = n = 15$  getan, und es ergaben sich die Werte aus Tabelle auf der nächsten Seite. In Abbildung 4 kommt der Unterschied noch einmal deutlicher hervor.

Tabelle 2: Anzahl von gefunden Netzen mit  $x$  Links

Anzahl der Links	Lotka Volterra - linear	Lotka Volterra - nichtlinear	Predator specific Defence - linear	Predator specific Defence - nichtlinear
17	3	0	3	0
18	8	6	8	6
19	29	9	29	9
20	75	22	75	22
21	191	61	191	61
22	325	148	325	148
23	404	237	404	237
24	393	324	393	324
25	307	392	307	392
26	166	348	166	348
27	77	274	77	274
28	21	132	21	132
29	1	31	1	31
30	0	1	0	1

Anzahl der Links	Lotka Volterra - nichtlinear Maximum
221	1
222	23
223	131
224	604
225	1241

Auch hier ist das gleiche wie bei den kleinen Netzen zu sagen. Kein Widerspruch dazu, das es maximal 29 Links geben darf, und dass Predator specific Defence nichts an den Ergebnissen ändert (mit der gleichen Begründung). Allerdings lässt sich das was sich in Kleien System andeutete, hier nun deutlicher sehen. Durch die Nichtlinearität entstehen (etwas) komplexere Netze. Einzig die maximierte Version hat annähernd volle Linkzahlen, wie es im kleinen Beispiel ja auch schon zu sehen war ( $15 \cdot 15 = 225$  sind die maximal installierbaren Links). Des weiteren fällt auf, das die stationären Zustände um ein vielfaches Schneller erreicht werden (Faktor 200 gegenüber Lotka Volterra nonlinear).

## 5 Fazit

Das Porplem mit der Linearen Addition von den "Arbeitszeiten" ist anscheinend, genau diese Beschränkung in der Netzstruktur. Das dies durch die nicht Linearität gelöst werden kann ist auch gesehen worden. Die Frage ist nun mit welcher Methode man die Arbeitsaufwände für das Jagen nach verschiedenen Beuten zusammenfassen kann, ohne das ihm eine biologische Grundlage fehlt. Der Hauptkritikpunkt an dem linearen Addieren ist, das es einen Unterschied machen muss, wie ähnlich sich die einzelnen Beuten sind.

To be continued....