

# F-Praktikumsversuch A 3.14

## Resonanzverhalten nichtlinearer Oszillatoren

bei Dr. Joachim Holzfuss  
Marco Möller  
Annika Hamburger

13.11.2006

### Inhaltsverzeichnis

<b>1 Erläuterung der Begriffe</b>	<b>1</b>
<b>2 Beschreibung des Versuchsaufbaus (von Aufgabe 2)</b>	<b>2</b>
<b>3 Untersuchung verschiedener Schwingungstypen</b>	<b>2</b>
3.1 Allgemein . . . . .	2
3.2 Abbildungen . . . . .	3
3.2.1 $U_{ss}=400$ mV . . . . .	3
3.2.2 $U_{ss}=850$ mV . . . . .	4
3.2.3 $U_{ss}=2$ V . . . . .	5
3.2.4 $U_{ss}=2,4$ V . . . . .	6
3.2.5 $U_{ss}=2,5$ V . . . . .	7
3.2.6 $U_{ss}=2,6$ V . . . . .	8
3.2.7 $U_{ss}=3,8$ V . . . . .	9
3.2.8 $U_{ss}=8,8$ V . . . . .	10
3.2.9 $U_{ss}=13,3$ V . . . . .	11
<b>4 Resonanzkurve und Bifurkationskurve</b>	<b>11</b>
4.1 Resonanzkurve . . . . .	11
4.2 Bifurkationskurve . . . . .	11
<b>5 Bifurkationsdiagramm</b>	<b>15</b>

## 1 Erläuterung der Begriffe

**Resonanz:** Bei Resonanz ist die Antwort des Systems in Bezug auf einen externen Parameter maximal. In unserem Fall variieren wir hierzu die am Schwingkreis anliegende Frequenz und Amplitude und messen die Amplitude über der Kapazität.

**Hysterese:** Im Allgemeinen ist die Resonanz nur vom aktuellen Systemzustand abhängig und nicht von der Vorgeschichte der Eingangszustände. In unserem Fall ist dies anders. Je nachdem ob man von hohen oder tiefen Anregungsfrequenzen kommt, ist die Systemantwort verschieden.

**nichtlineare Dynamik:** Ein Beispiel für nichtlineare Dynamik ist eine Schwingung in einem Toda-Oszillator, der einen einfachen nichtlinearen Schwingkreis darstellt. Je nachdem mit welcher Anregungsamplitude man Schwingungen erzeugt, entstehen unterschiedlich weitere Resonanzen. So können z.B. bei hohen Erregeramplituden Hysteresen, subharmonische sowie aperiodische Schwingungen auftreten. Diese Erscheinungen konnten wir in unseren Messungen beobachten, wobei auffiel, dass je höher die Anregungsamplitude war, desto mehr dieser zusätzlichen Resonanzen zu beobachten waren.

**Bifurkationen:** Bifurkationen (Verzweigungen) sind qualitative Zustandsänderungen in nichtlinearen Systemen. Diese hängen meist von einem Parameter ab, ändert man diesen, ändert sich das ganze Verhalten des Systems. Letztendlich kann das im Chaos enden. Dabei kommt es u.a. zu einer Periodenverdopplung, die sich bei weiterer Änderung des Parameters wiederholt. Bifurkationen kann man gut in Bifurkationsdiagrammen darstellen. Mit diesem Diagramm kann man Bereiche mit qualitativ unterschiedlichen Systemverhalten darstellen.

**Chaos:** Chaos tritt meist in nichtlinearen Systemen auf, die empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängen. Kleine Anfangszustandsunterschiede wachsen exponentiell in der Zeit an, und machen so eine Vorhersage trotz deterministischer physikalischer Gesetze unmöglich.

**Lyapunov Exponenten:** Diese empfindliche Reaktion auf Änderungen der Anfangsbedingungen lassen sich durch den Lyapunov Exponenten erläutern. Dieser beschreibt im gewissen Sinne das Zeitverhalten benachbarter Zustände in einem System und charakterisiert somit das System. Dieses zeitgemittelte Kontraktions- und Expansionsverhalten kann man durch folgende Formel wiedergeben:

Dabei ergibt sich für  $\lambda$  :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{r_i(t)}{r_0}$$

- $\lambda > 0$ : exponentielle Expansion
- $\lambda < 0$ : exponentielle Kontraktion
- $\lambda = 0$ : Abstand bleibt erhalten

**Attraktoren:** Attraktoren stellen eine Grenzmenge von Punkten im Phasenraum dar, auf die Trajektorien nach einer bestimmten Zeit zulaufen. Im zwei-dimensionalen konvergieren gedämpfte Systeme z.B. gegen einen Fixpunkt, d.h. gegen einen punktförmigen Attraktor. Ebenso kann eine periodische Schwingung gegen einen Grenzzykel, eine geschlossene Kurve laufen.

Im drei-dimensionalen aber treten sogenannte seltsame Attraktoren auf, diese sind unendlich lang und nicht periodisch. Treten kleine Veränderungen von außen auf, so reagieren sie chaotisch. Man kann Attraktoren und deren Verhalten sehr gut in Phasendiagrammen veranschaulichen.

## 2 Beschreibung des Versuchsaufbaus (von Aufgabe 2)

Ein nichtlineares System wird in diesem Versuch durch einen Serienresonanzkreis dargestellt. Dieser beinhaltet eine Spule mit der Induktivität  $L = 6.4mH$ , einen Widerstand mit  $R = 200\Omega$  und einer spannungsabhängigen Kapazitätsdiode C(U) vom Typ 1N4007. Bei dem Aufbau ist zu beachten, dass man beim Vermessen der Diodenspannung  $U_c(t)$  keines der weiteren Bauelemente kurzschließt. Leider ist in unserem Versuch der Widerstand kurzgeschlossen gewesen.

Durch das Anlegen zwei verschiedener Anregungsspannungen konnte einmal lineare Resonanz ( $U_A(t) = 100mV_{ss}$ ) und ein anderes Mal Resonanz mit Hysterese ( $U_A(t) = 1V_{ss}$ ) gemessen werden. Beide aus den Messungen erhaltenen Kurven sind in Abbildung 1 auf der nächsten Seite veranschaulicht.

## 3 Untersuchung verschiedener Schwingungstypen

### 3.1 Allgemein

Die nachfolgenden Bilder sind Poincare-Schnitte durch einige exemplarische Attraktoren. Dazu wurde die Amplitude der sinusförmigen Eingangsspannung variiert, während die Frequenz bei  $f = 95$  kHz konstant gehalten wurde. Als Systemantwort wurde die Spannung über dem Widerstand abgegriffen (Tastkopf 10\*), die proportional zum Strom im Schwingkreis ist.

**Links Oben** ist jeweils ein Foto des Oszilloskopbildschirms mit der Anregungsspannung auf der einen und dem Strom auf der anderen Achse zu sehen.

**Rechts Oben** ist die dazugehörige FFT des Stroms. Zu erwarten wäre beim harmonischen Oszillator ein einzelner Peak bei 95 kHz.

**Rechts Unten** ist der zeitliche Signalverlauf der Anregung und der Antwort zu sehen. Hier lässt sich ebenfalls die Periodenzahl ablesen.

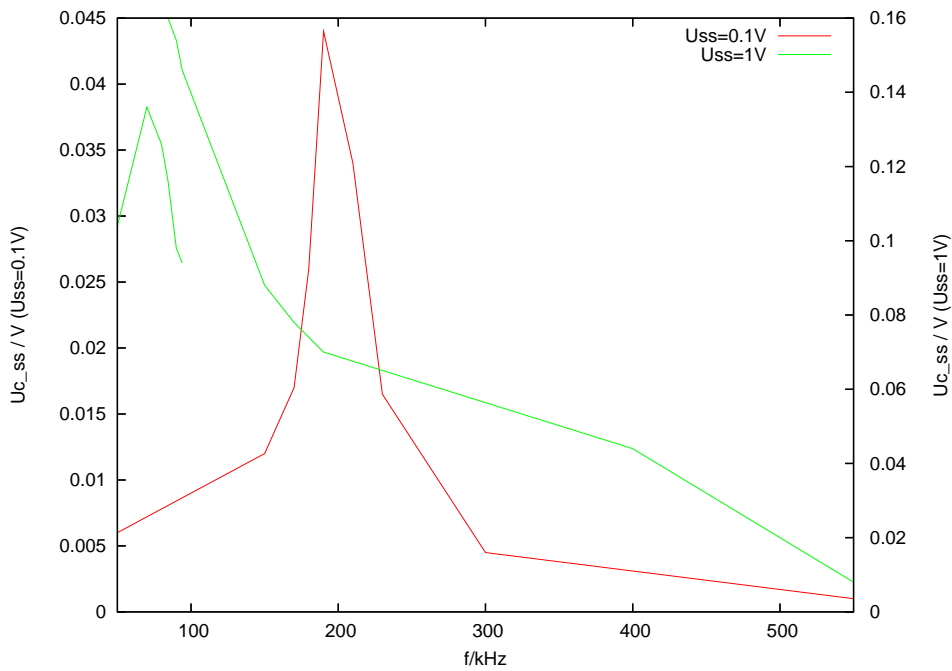
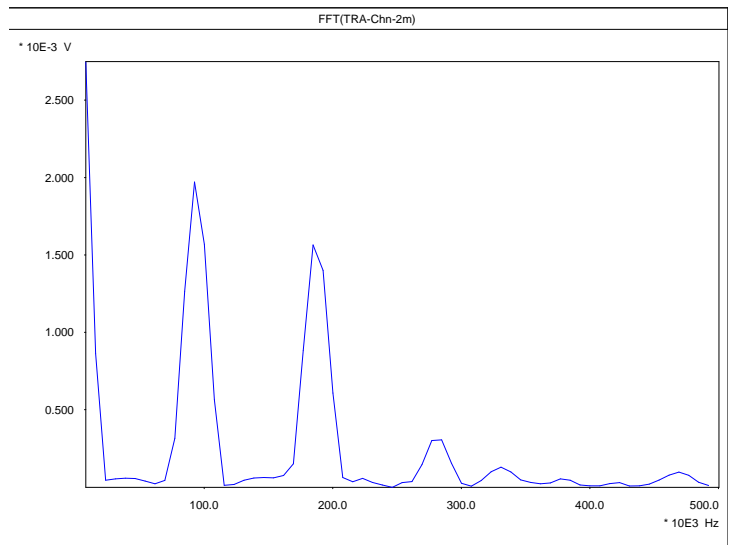
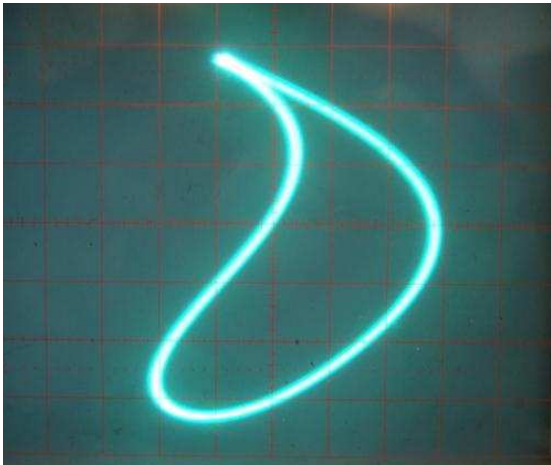


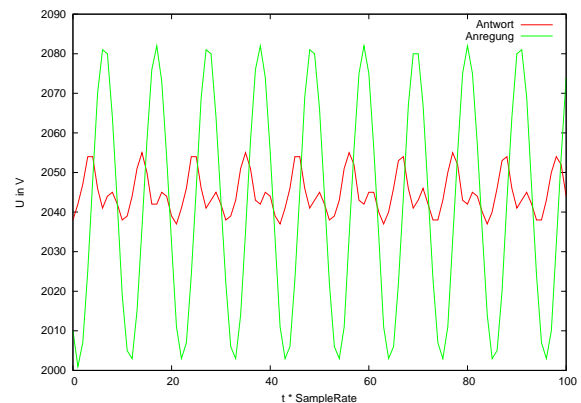
Abbildung 1: Resonanz (mit Hysterese) für verschiedene Anregungsamplituden

### 3.2 Abbildungen

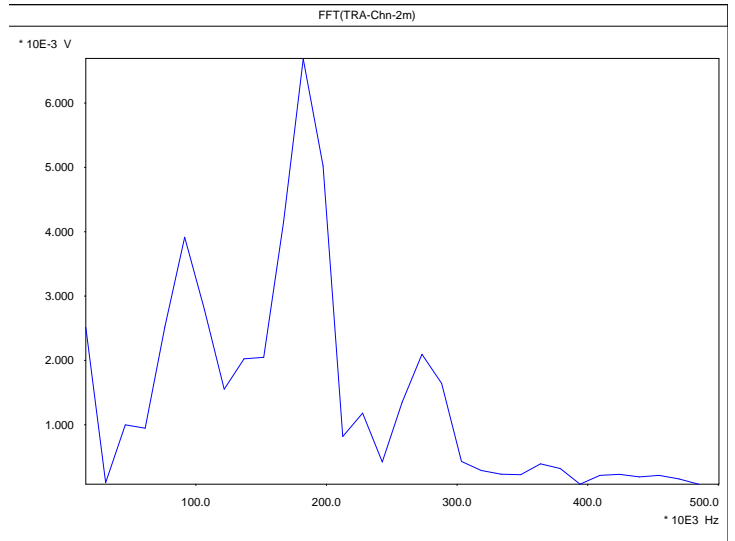
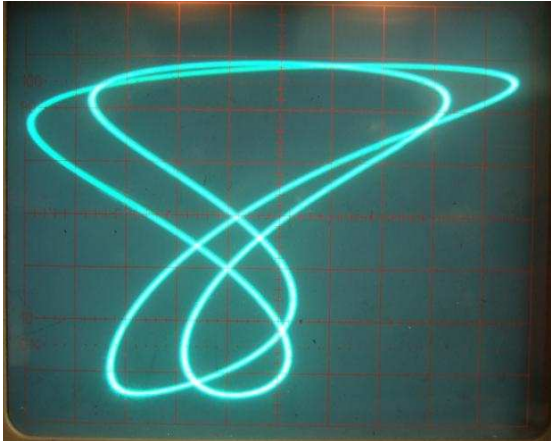
#### 3.2.1 $U_{ss} = 400 \text{ mV}$



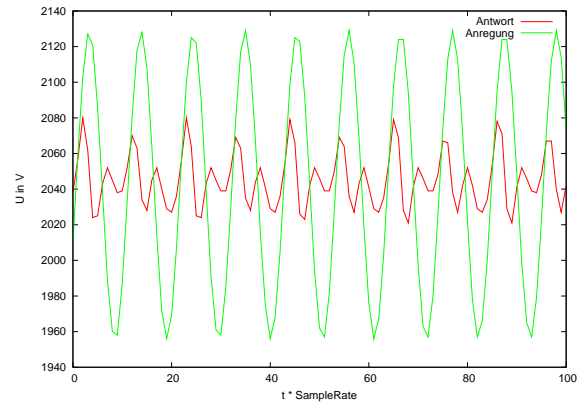
Hier ist ein Signal mit Periode 1 zu sehen. Auf dem FFT erkennt man gut die Oberwellen bei  $2 \cdot f$  und (schwach) bei  $3 \cdot f$

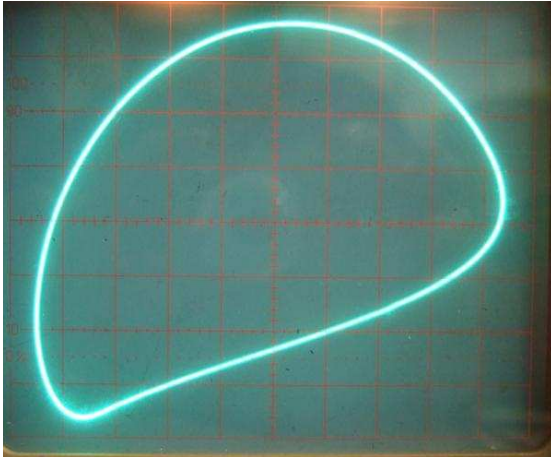


3.2.2  $U_{ss} = 850 \text{ mV}$

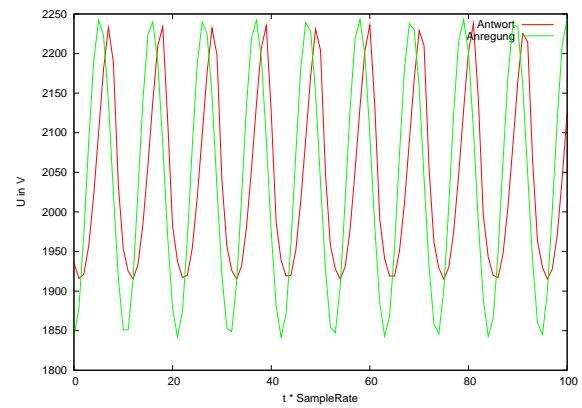
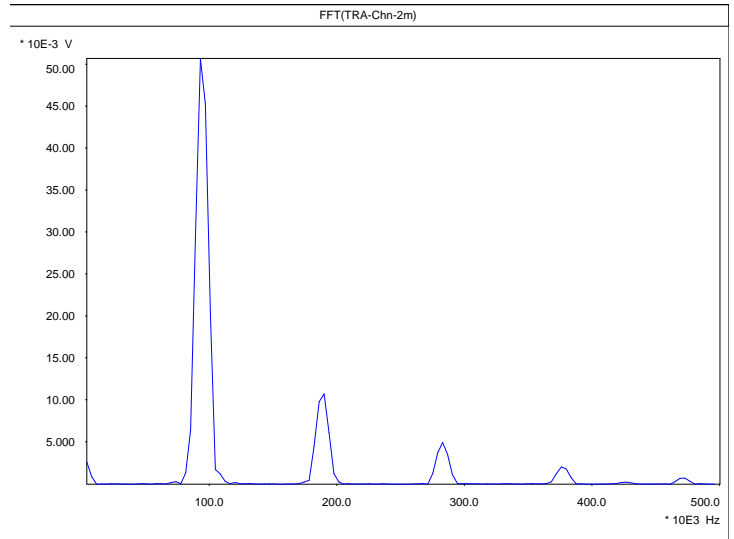


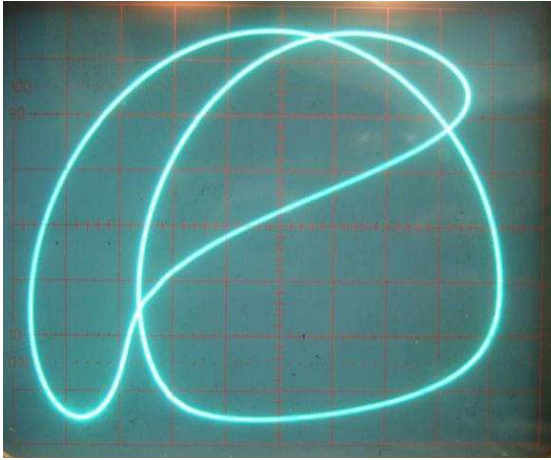
Hier ist ein Signal mit Periode 2 zu sehen. Auf dem FFT erkennt man gut die Oberwellen bei  $2 \cdot f$  und  $3 \cdot f$ . Das Spektrum ist zudem nicht sehr scharf. Die für die Periode 2 verantwortlichen Anteile liegen genau zwischen diesen Hauptanteilen bei  $n \cdot \frac{f}{2}$ .



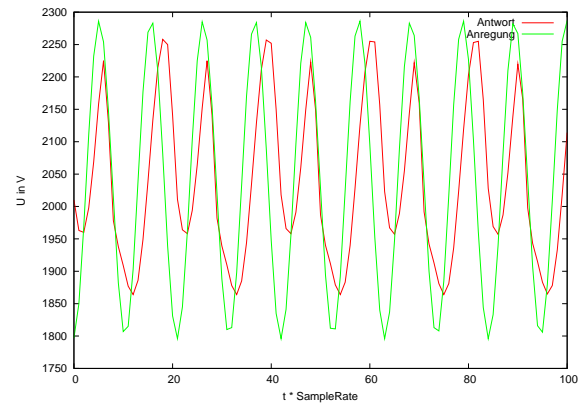
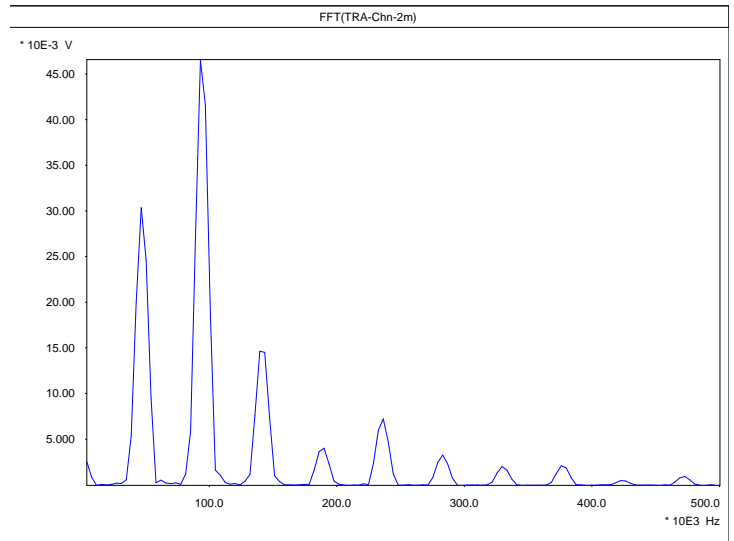
3.2.3  $U_{ss} = 2 \text{ V}$ 

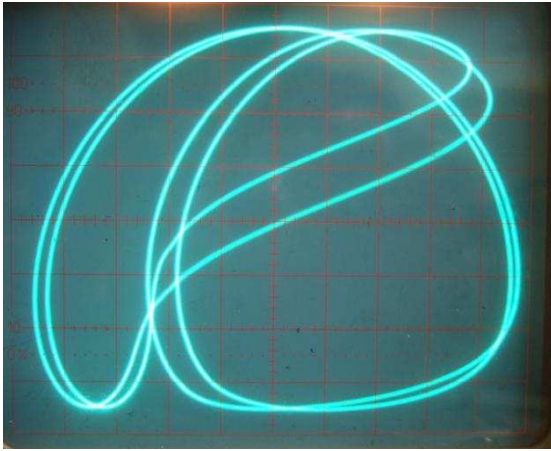
Hier ist ein Signal mit Periode 1 zu sehen. Auf dem FFT erkennt man gut die Oberwellen. Da der Attraktor fast kreisförmig ist, haben wir hier sehr scharfe und schnell abfallende Oberwellen.



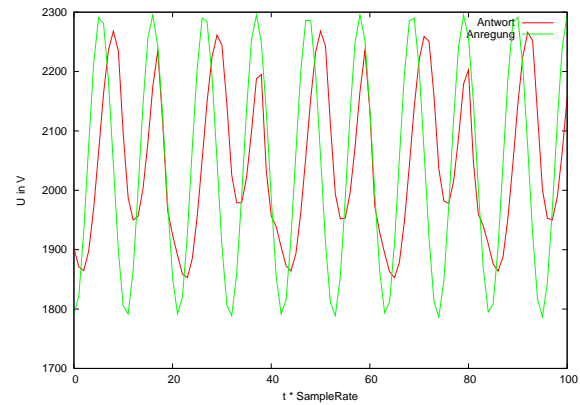
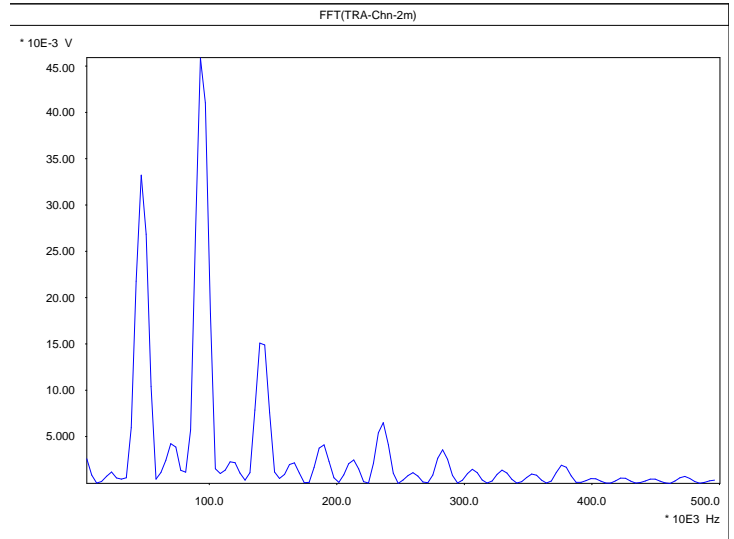
3.2.4  $U_{ss} = 2,4 \text{ V}$ 

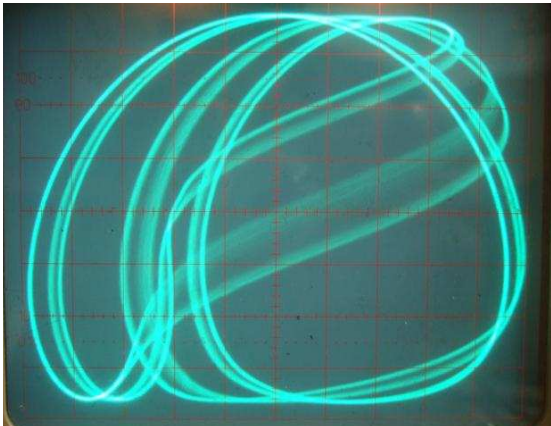
Hier ist ein Signal mit Periode 2 zu sehen. Auf dem FFT sieht man, dass es bei allen  $n \cdot \frac{f}{2}$  einen sehr scharfen Peak gibt. Durch diese niederfrequenten Anteile kommt letztendlich die höhere Periode zustande.



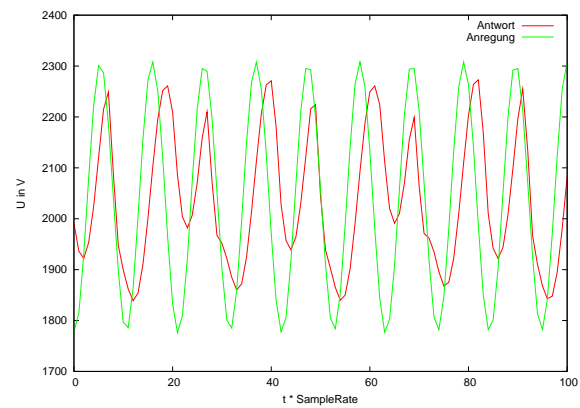
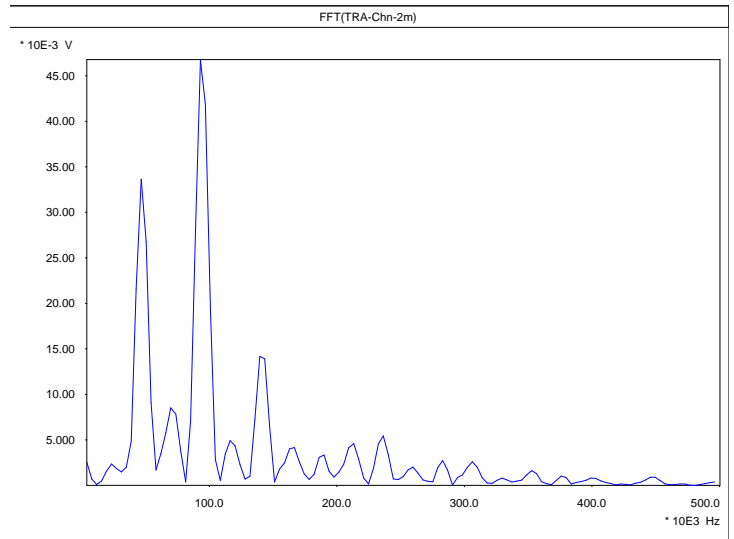
3.2.5  $U_{ss} = 2,5 \text{ V}$ 

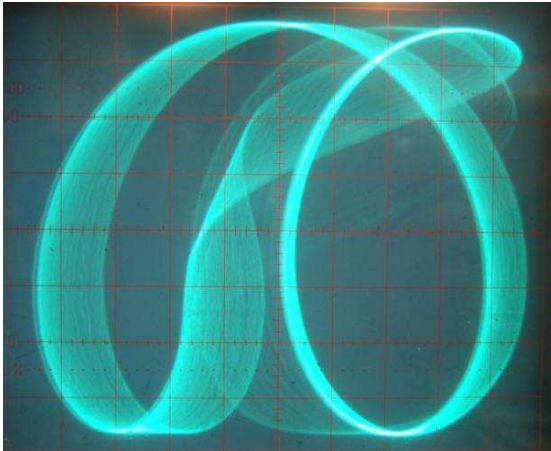
Hier ist ein Signal mit Periode 4 zu sehen. Auf dem FFT erkennt man gut die Anteile bei  $n \cdot \frac{f}{2}$ . Zusätzliche allerdings sehr kleine Anteile bei  $n \cdot \frac{f}{4}$  bedingen die Periode 4.



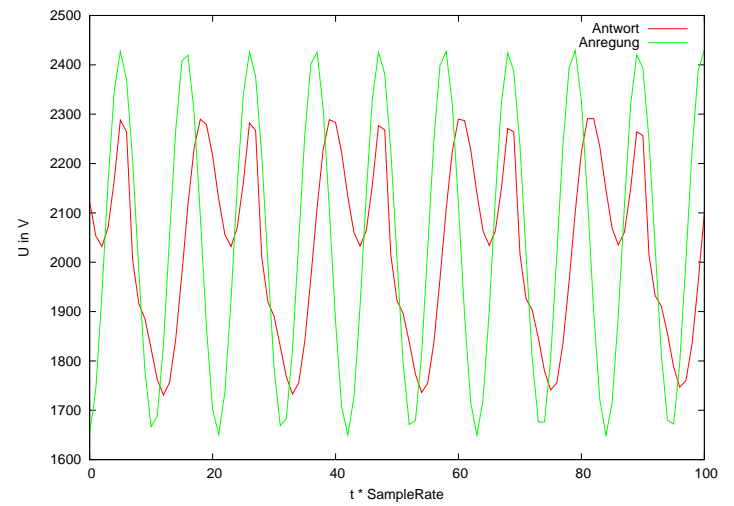
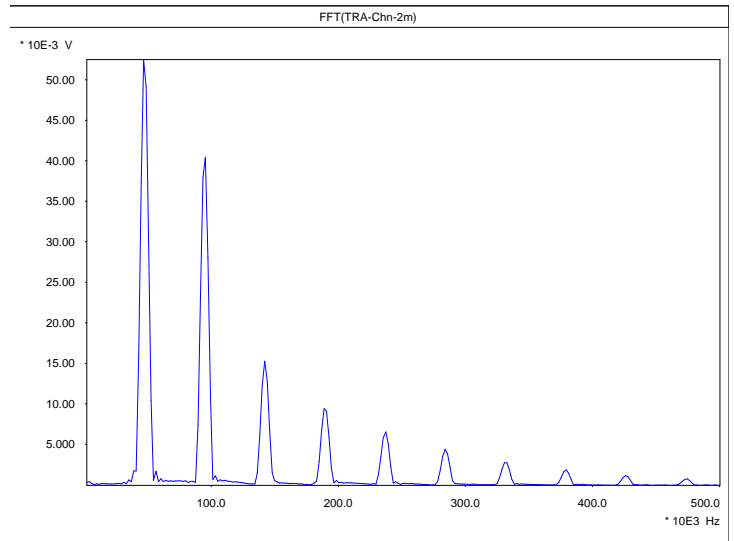
3.2.6  $U_{ss} = 2,6 \text{ V}$ 

Hier ist ein Schnappschuss eines chaotischen Signals zu sehen. Durch die kurze Verschlusszeit des Fotoapparats ist dieses Bild leider nur bedingt verwaschen. Auf dem FFT erkennt man ein sehr dichtes Spektrum das allerdings noch klare Maxima aufweist. Dies ist ein weiterer Grund dafür, dass man noch meint einen Attraktor erkennen zu können.

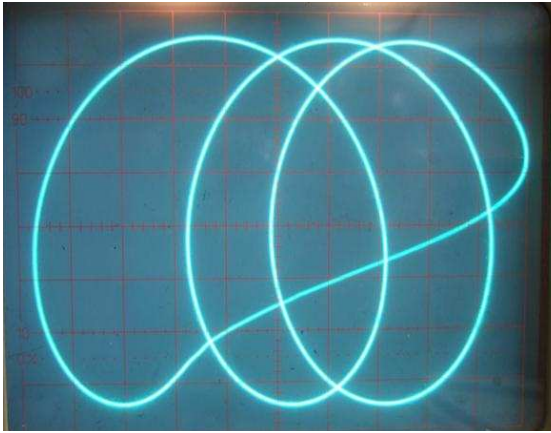


3.2.7  $U_{ss} = 3,8 \text{ V}$ 

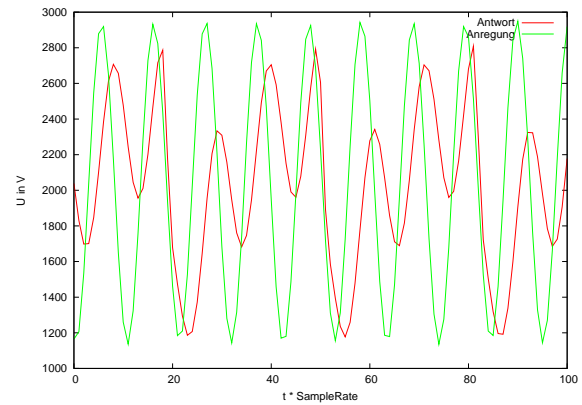
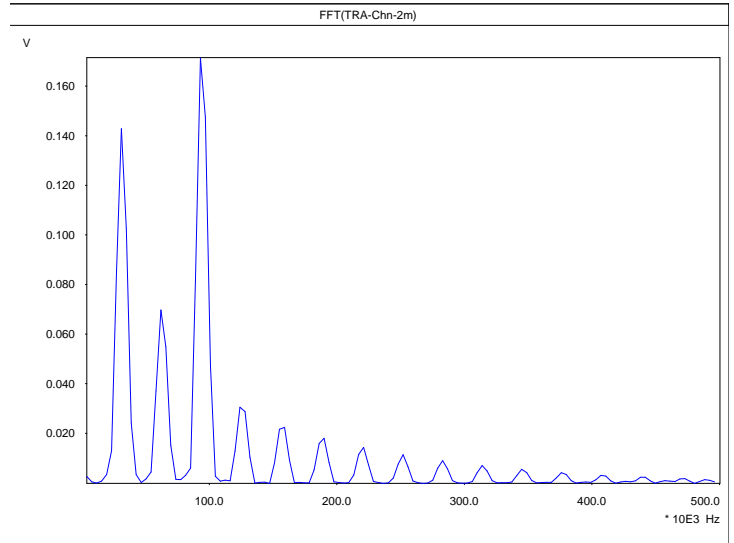
Hier ist ein Signal mit Periode 2 zu sehen das allerdings schon einen chaotischen Anteil enthält. Auf dem FFT erkennt man gut die Anteile bei  $n \cdot \frac{f}{2}$ .

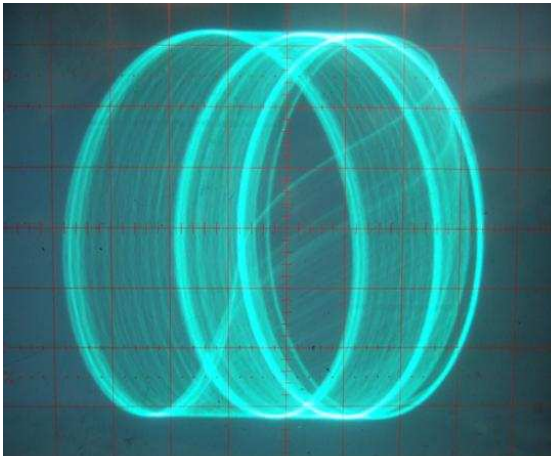


3.2.8  $U_{ss} = 8,8 \text{ V}$

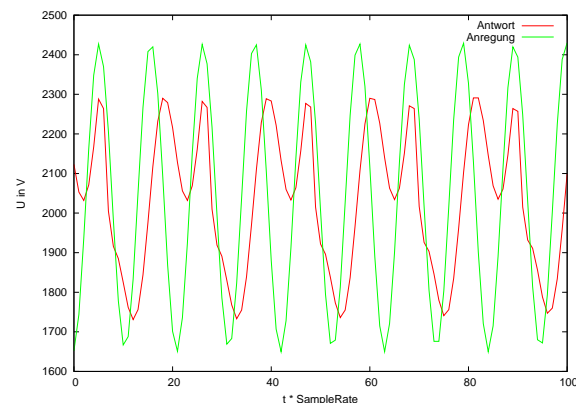
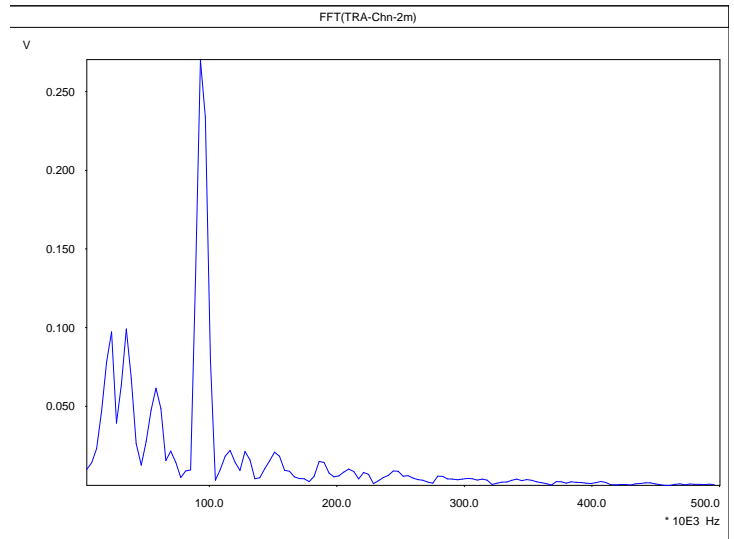


Hier ist ein Signal mit Periode 3 zu sehen. Auf dem FFT erkennt man gut die einzelnen Anteile bei  $n \cdot \frac{f}{3}$ .



3.2.9  $U_{ss} = 13,3 \text{ V}$ 

Hier ist ein weiterer Schnappschuss eines chaotischen Signals zu sehen. Auf dem FFT erkennt man ein sehr dichtes Spektrum, das allerdings noch ein Maximum bei  $f$  aufweist. Diesen Anteil kann man im Bild gut in den verschiedenen Ovalen identifizieren.



## 4 Resonanzkurve und Bifurkationskurve

## 4.1 Resonanzkurve

Im Gegensatz zur Messung der Resonanzkurve und Hysterese in Aufgabe 2 messen wir hier nicht mehr jeden Frequenzwert separat, sondern "wobbeln" sie durch. Unter Wobbeln versteht man folgendes: Ein Sägezahnsignal mit relativ kleiner Frequenz (bei uns  $\frac{1}{f} = T = 0.03\text{s}$ ) wird auf einen spannungsgeregelten Oszillator (VCO) gegeben. Dieser fährt somit im Takt des Sägezahn einen vorgegebenen Frequenzbereich immer wieder ab. Der Ausgang der VCO wird nun auf den zu untersuchenden Schwingkreis gelegt.

Dies ist nun mit Hilfe eines Oszilloskops leicht zu visualisieren, indem der Sägezahn, der proportional zur Frequenz ist, auf die x-Achse und der Ausgang des Schwingkreises auf die y-Achse aufgetragen wird. Dies entspricht bis auf die fehlende Beschaltung des Z-Eingangs dem Blockschaltbild aus Abbildung 2 auf der nächsten Seite. In Abbildung 4 auf Seite 13 sind einige solcher Resonanzkurven zu sehen.

## 4.2 Bifurkationskurve

Um eine Bifurkationskurve aufzunehmen verwenden wir den Aufbau aus Abbildung 2 auf der nächsten Seite (ähnlich dem der Resonanzkurve). Allerdings wird zusätzlich ein zur Anregung in Phase liegender Puls erzeugt und auf den Z-Eingang des Oszilloskops gelegt. Somit erhält man immer zu gleichen Anreizzeitpunkten einen Leuchtpunkt auf dem Schirm. Falls das Ausgangssignal mit der gleichen Frequenz schwingen würde, wäre dieser für eine gegebene Frequenz immer an der gleichen Stelle. Im Falle einer Perioden-  $n$ -fachung erhalten wir allerdings  $n$  solcher Punkte übereinander. In Abbildung 5 auf Seite 14 sind einige solche Bifurkationskurven zu sehen.

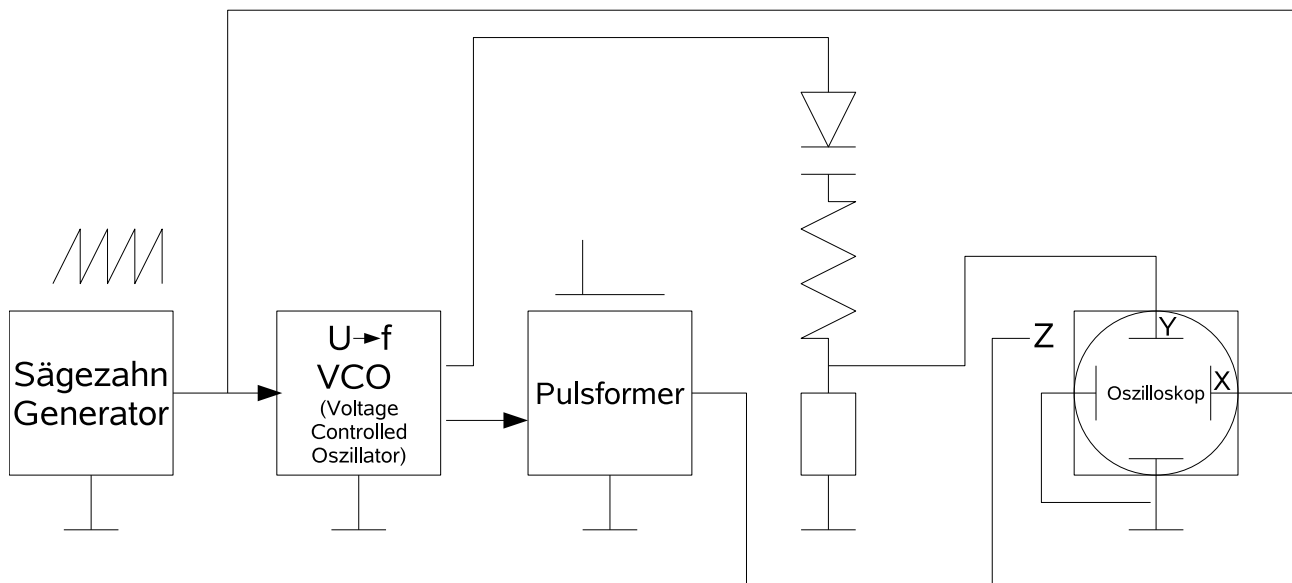


Abbildung 2: Blockschaltbild für Resonanz und Bifurkationsmessung

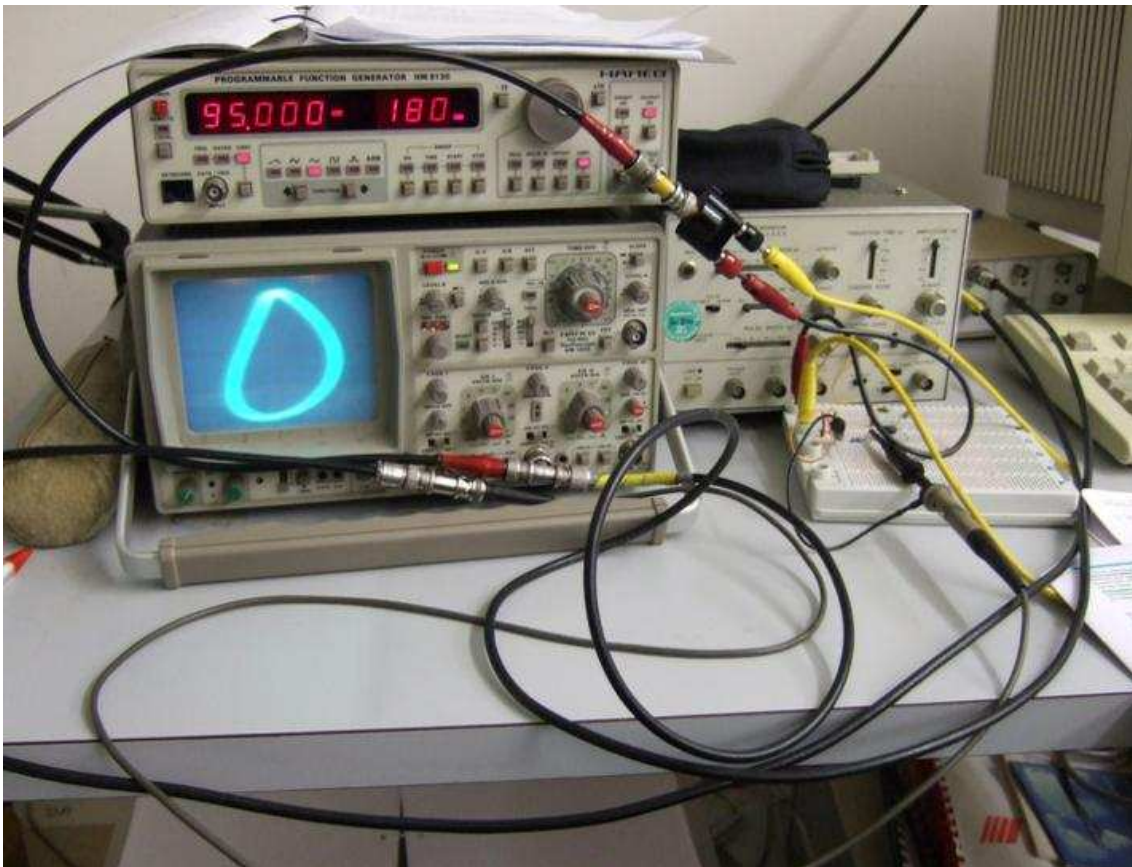
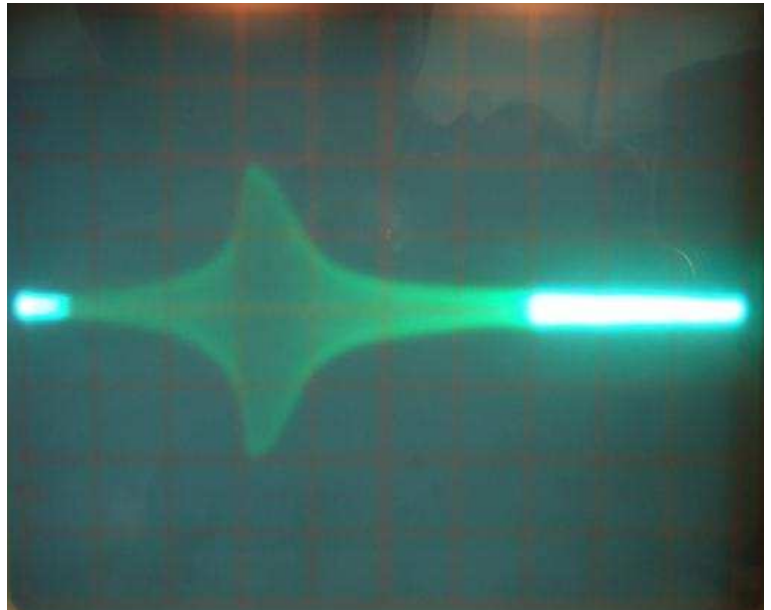
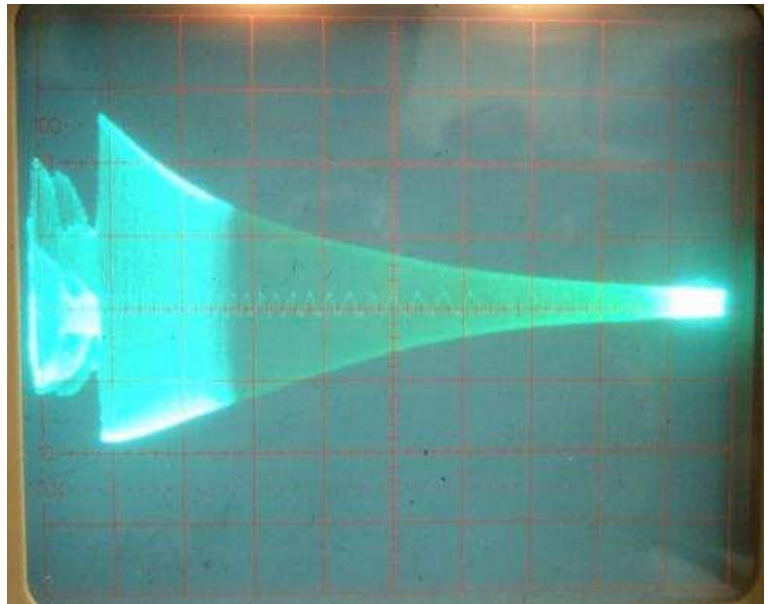


Abbildung 3: Unser Messplatz

Resonanzkurve für  $U_{ss} = 0,1V$  ohne Hysterese. Allerdings erkennt man die Unsymmetrie im Maximum bereits.



Resonanzkurve für  $U_{ss} = 1V$ . Es ist eine ausgeprägte Hysterese vorhanden. Für niedrige Frequenzen sieht man bereits erste Periodenverdopplungen.



Resonanzkurve für  $U_{ss} = 10V$

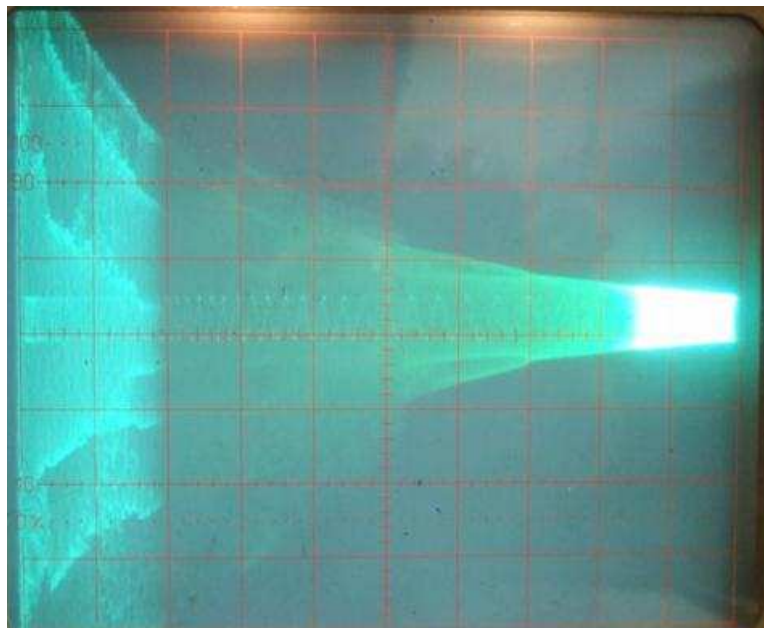


Abbildung 4: Exemplarische Resonanzkurven

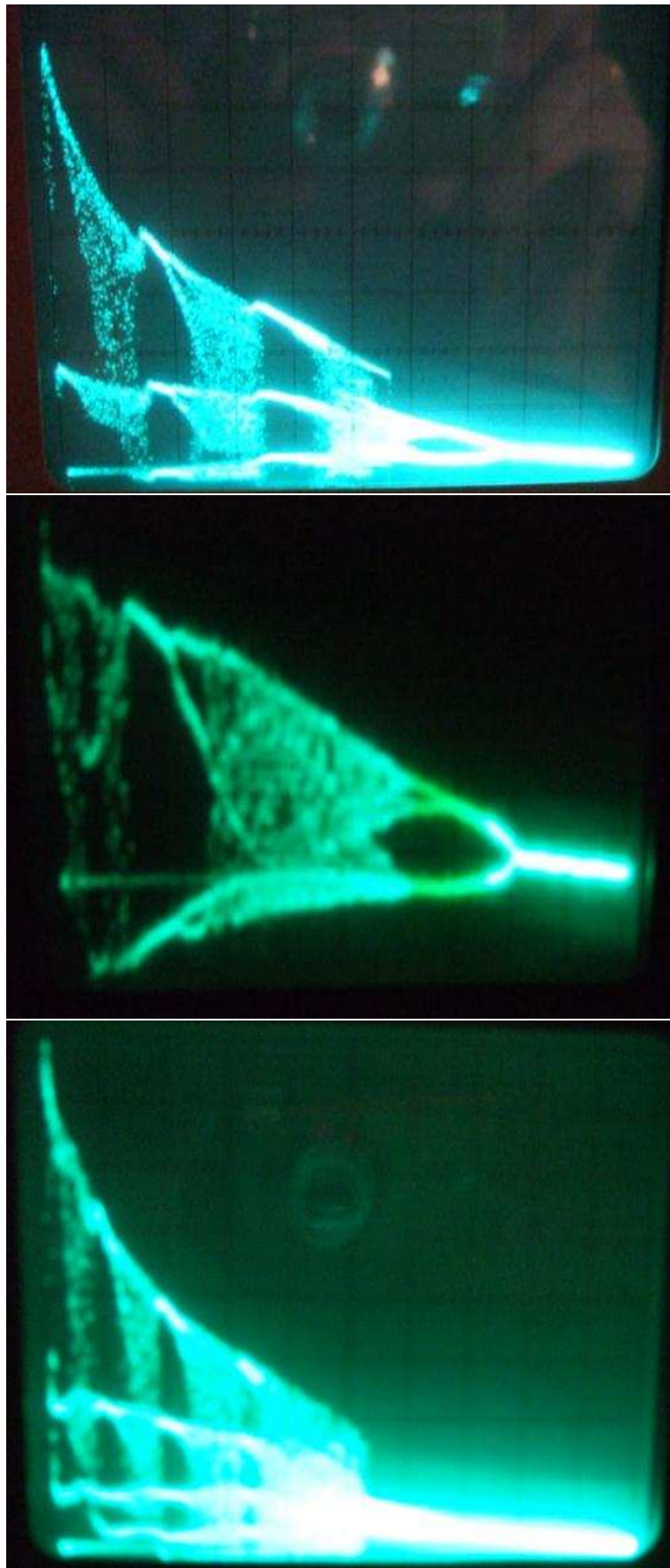


Abbildung 5: Exemplarische Bifurktationskurven

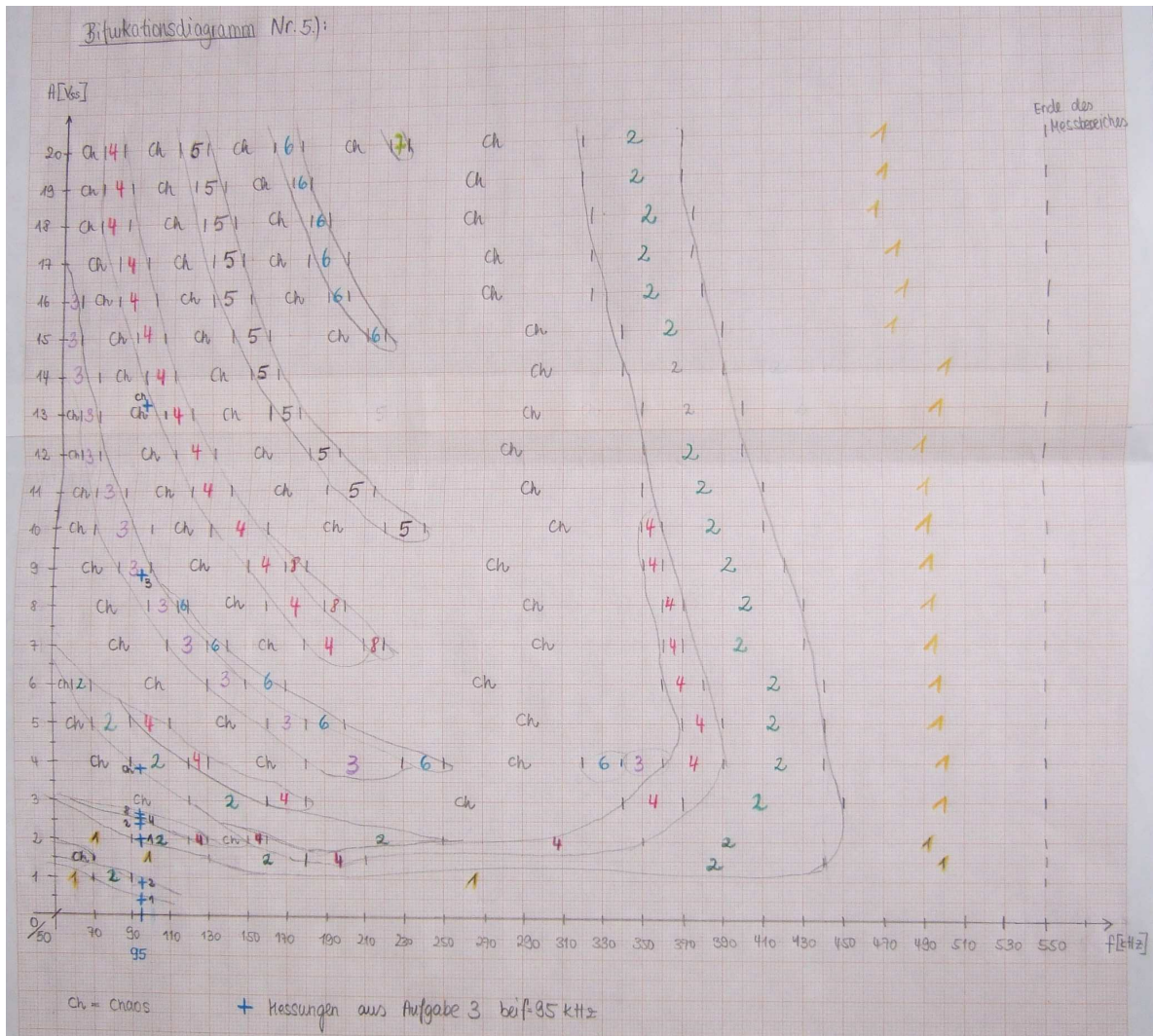


Abbildung 6: Bifurkationsdiagramm

## 5 Bifurkationsdiagramm

Die im vorherigen Punkt beschriebene Messung wird nun für verschiedene Anregungsamplituden wiederholt und die Frequenzen ausgelesen, an denen sich die Periodenzahl ändert.

Bei dem Bifurkationsdiagramm (Abbildung 6) fällt auf, dass in dem Frequenzbereich von 230kHz bis 330kHz ein zentrales Chaosfeld existiert. Dieses verschwindet für sehr kleine Anregungsamplituden von ca. 2,5 V.

Im Frequenzbereich von 50 bis ca. 230 kHz ist mit steigender Anregungsamplitude folgendes Schema zu erkennen. Im Groben wechseln sich Blöcke mit Periodenverdopplung mit chaotischen Bereichen ab. Der  $i$ -te Block beginnt immer mit einer Periode  $i$  und verdoppelt diese in immer kürzeren Abständen ( $\Delta U$ ) bis es ins Chaos übergeht. Für  $i = 1$  haben wir 3 solcher Verdopplungen beobachten können. Das maximale  $i$  in unserem Messbereich war 7.

Bereiche mit gleicher Periode liegen allerdings nicht achsenparallel sondern ähneln eher einer  $\frac{1}{f}$  Abhängigkeit. Zu höheren Frequenzen gehend, d.h. ab ca. 350kHz dominiert immer mehr die zweifache Anregungsperiode, wobei ab ca. 410kHz nur noch die Periode 1 auftritt.

Für sehr kleine Anregungsamplituden sind die Bereiche vom kleinen und großen Frequenzbereich verbunden. Im Vergleich zu den in Aufgabe 3) erhaltenen Ergebnissen (die in der Zeichnung mit blauen Kreuzen markiert sind) ist eine Übereinstimmung der beiden Messergebnisse zu erkennen. Abgesehen von Ablesefehlern oder Messungenauigkeiten fallen die Kreuze in die richtigen Bereiche im Bifurkationsdiagramm.