

Formelsammlung

Analysis III - Funktionentheorie für Physiker und Mathematiker

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 21.07.2006 - Version: 1.0.1

ERHÄLTlich UNTER [HTTP://PRIVAT.MACROLAB.DE](http://privat.macrolab.de)

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung "Analysis III - Funktionentheorie" von Prof. Dr. Linus Kramer an der Technischen Universität Darmstadt im Wintersemester 2005/06.

Die folgende Formelsammlung steht zum kostenlosen Download zur Verfügung. Das Urheberrecht und sonstige Rechte an dem Text verbleiben beim Verfasser, der keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit der Inhalte übernehmen kann.

Inhaltsverzeichnis

<p>1 Holomorphe Funktionen 2</p> <p>1.1 Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen . . . 2</p> <p style="padding-left: 20px;">1.1.1 Definition von \mathbb{C} 2</p> <p style="padding-left: 20px;">1.1.2 Topologie auf \mathbb{C} 2</p> <p style="padding-left: 20px;">1.1.3 Komplexe Funktionen 2</p> <p style="padding-left: 20px;">1.1.4 Cayleyabbildung 2</p> <p>1.2 (weg-) zusammenhängend 2</p> <p>1.3 Gebiet 3</p> <p>1.4 \mathbb{C}-differenzierbar / holomorph 3</p> <p>1.5 Eigenschaften von holomorphen Funktionen 3</p> <p>1.6 Drehstreckungen 3</p> <p>1.7 Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen 3</p> <p>1.8 harmonisch 3</p> <p>1.9 Funktionenfolge / Konvergenzradius . . . 4</p> <p style="padding-left: 20px;">1.10 Ableitung einer Funktionenfolge 4</p> <p style="padding-left: 20px;">1.11 Wirtinger Kalkül 4</p> <p>2 Cauchys Integralsatz 4</p> <p>2.1 Integral 4</p> <p>2.2 Kreisintegral 4</p> <p>2.3 Dreieck 4</p> <p>2.4 Stammfunktion 5</p>	<p>2.5 Integral-Lemma von Goursat 5</p> <p>2.6 Sternförmige Mengen 5</p> <p>2.7 homotop, einfach zusammenhängend . . . 5</p> <p>2.8 Cauchys Integralsatz 5</p> <p>2.9 Cauchys Integralsatz v.2 5</p> <p>2.10 Cauchys Integralformel 5</p> <p>2.11 Entwicklungslemma 5</p> <p>2.12 Cauchy-Taylor Entwicklungssatz 6</p> <p>2.13 Äquivalente Aussagen über Holomorphe Funktionen 6</p> <p>2.14 Satz von Morera 6</p> <p>2.15 Fortsetzungssatz 6</p> <p>3 Eigenschaften holomorpher Funktionen 6</p> <p>3.1 Identitätssatz 6</p> <p>3.2 Folgerung 6</p> <p>3.3 Satz von Liouville 6</p> <p>3.4 Verallgemeinerter Satz von Liouville . . 6</p> <p>3.5 Fundamentalsatz der Algebra 7</p> <p>3.6 Linearfaktorzerlegung 7</p> <p>3.7 Mittelwertgleichung 7</p> <p>3.8 Offen 7</p> <p>3.9 Satz von der Gebietsinvarianz 7</p> <p>3.10 Eigenschaften Konstanter Funktionen . 7</p> <p>3.11 Maximumsprinzip 7</p> <p>3.12 Maxima auf beschränkten Gebiet 7</p> <p>3.13 Schwarzsches Lemma 7</p> <p>3.14 Automorphismus 7</p> <p>3.15 Projektive lineare Gruppe 8</p> <p>3.16 Riemannscher Abbildungssatz 8</p> <p>3.17 Kreiskettenverfahren 8</p> <p>3.18 Fehlen von Geraden im Definitionsbereich 8</p>
---	--

3.19 Spiegelungssatz	8	1 Holomorphe Funktionen
3.20 biholomorph	8	
3.21 injektiv und biholomorph	8	1.1 Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen
3.22 Konform / Winkeltreu	8	
4 Isolierte Singularitäten	8	1.1.1 Definition von \mathbb{C}
4.1 Kreisring	8	Für die Definition von \mathbb{C} und den Operationen darauf siehe mein "Formelsammlung für Analysis I / II".
4.2 Integralsatz für Kreistränge	9	
4.3 Integralformel für Kreistränge	9	1.1.2 Topologie auf \mathbb{C}
4.4 Haupt- und Nebenteil	9	Definition von Konvergenz, Cauchy-Folge, abgeschlossenheit und stetigkeit äquivalent zu Analysis I / II.
4.5 Entwicklungssatz von Laurent	9	
4.6 Partialbruchzerlegung	9	1.1.3 Komplexe Funktionen
4.7 Singularität	9	• $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$
4.8 hebbare Singularität und Beschränktheit	10	• $e^{x+iy} = e^x (\cos x + i \sin y)$
4.9 Grenzwert und Pol	10	1.1.4 Cayleyabbildung
4.10 Satz von Casorati-Weierstrass	10	Wir betrachten die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \Im(z) > 0\}$
4.11 Singularität in ∞	10	Die Cayleyabbildung $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ bildet die obere Halbebene \mathbb{H} auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} z < 1\}$ ab. Die Umkehrabbildung dazu ist $z \mapsto i \frac{1+z}{1-z}$.
4.12 diskret	10	
4.13 meromorph	10	
4.14 Kombination von meromorphen Funktionen	10	
4.15 Körper der meromorphen Funktionen	10	
4.16 Riemannsphäre	10	
5 Residuen	11	1.2 (weg-) zusammenhängend
5.1 Residuum	11	Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <i>zusammenhängend</i> , wenn es <i>keine</i> offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit
5.2 Stammfunktion	11	1. $U \cup V \supseteq X$
5.3 Pol 1-ter Ordnung	11	2. $U \cap V \cap X = \emptyset$
5.4 Bruch	11	3. $X \cap U \neq \emptyset \neq V \cap X$
5.5 Pol m-ter Ordnung	11	$\mathbb{R}^n \supseteq X$ heißt <i>wegzusammenhängend</i> , falls es für alle $a, b \in X$ eine stetige Abbildung (einen Weg)
5.6 Polstellenordnung / Polstellenmenge	11	$C : [0, 1] \rightarrow X$
5.7 Windungszahl / Index	11	gibt mit $C(0) = a$ und $C(1) = b$.
5.8 logarithmische Ableitung	11	
5.9 Innere	11	• Ist X wegzusammenhängend, dann ist X zusammenhängend
5.10 Null-homolog	11	• Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, dann ist U wegzusammenhängend
5.11 Residuensatz	11	
5.12 Eigenschaften des Indexes	12	
5.13 Nullstellenordnung	12	
5.14 Nullstellenmenge	12	
5.15 Residuumberechnung	12	
5.16 Integration von meromorphen Funktionen 1	12	
5.17 Integration von meromorphen Funktionen 2	12	
5.18 Satz von Rouché	12	
5.19 Berechnung trigonometrischer Integrale	12	
5.20 Berechnung uneigentlicher Integrale	13	

1.3 Gebiet

Ein *Gebiet* in \mathbb{R}^n ist eine offene, zusammenhängende (also wegzusammenhängende) nichtleere Teilmenge.

- z.B. $B_\varepsilon(z), \mathbb{C}$
- z.B. obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$
- Es gibt Mengen in \mathbb{R}^n , die zusammenhängend, aber *nicht* wegzusammenhängend sind.

1.4 \mathbb{C} -differenzierbar / holomorph

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, sei $z \in U$. Wir sagen f ist \mathbb{C} -differenzierbar in z falls es eine stetige Funktion

$$\theta : B_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{C}$$

gibt, so dass

$$f(z+h) - f(z) = \theta(h) \cdot h$$

gilt für alle $h \in B_\varepsilon(0)$ (wähle ε so, dass $B_\varepsilon(z) \subseteq U$).

Falls solch ein θ existiert, ist es eindeutig bestimmt. Die *Ableitung* von f ist $f'(z) = \theta(0)$.

Ist f in *jedem* Punkt $z \in U$ \mathbb{C} -differenzierbar und ist U ein Gebiet dann heißt f *holomorph*.

Funktionen die auf ganz \mathbb{C} holomorph sind, nennt man *schlichte Funktionen*.

- Der Differenzierbarkeitsbegriff aus Analysis II wird im folgenden \mathbb{R} -differenzierbarkeit genannt

1.5 Eigenschaften von holomorphen Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

$$\mathcal{O}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} | f \text{ ist holomorph}\}$$

Dann ist $\mathcal{O}(\Omega)$ ein \mathbb{C} -Vektorraum und ein Ring, der Ring der holomorphen Funktionen auf Ω . Für alle $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$, alle $c \in \mathbb{C}$ gilt

1. $f + g = [z \rightarrow f(z) + g(z)] \in \mathcal{O}(\Omega)$
 $(f + g)' = f' + g'$
2. $f \cdot g = [z \rightarrow f(z) \cdot g(z)] \in \mathcal{O}(\Omega)$
 $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
3. $c \cdot f = [z \rightarrow c \cdot f(z)] \in \mathcal{O}(\Omega)$
 $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

- Polynome sind holomorph
 $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$
- gebrochen rationale Funktionen sind holomorph

- $f(x) = \bar{x}$ ist *nicht* holomorph, genauso wie alle Funktionen die mit Hilfe der Konjugation formuliert sind.
- $f(x) = |x|$ ist *nicht* holomorph
- Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ \mathbb{C} -differenzierbar in $z \in U$, dann ist f in z \mathbb{R} -differenzierbar.
- $f \circ g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit Kettenregel:
 $(f \circ g)'(z) = g'(z) \cdot f'(g(z))$

1.6 Drehstreckungen

Sei $J : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $J(z) = i \cdot z$, das ist eine lineare Abbildung auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit $J^2 = -\text{id}$, also $(J)(-J) = \text{id}$.

Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist genau dann linear über \mathbb{C} , wenn gilt

$$JT = TJ$$

In Matrixschreibweise mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

muss T die Form haben

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Solche 2×2 -Matrizen werden *Drehstreckungen* genannt.

- Falls man \mathbb{C} als \mathbb{R}^2 auffasst entspräche die Multiplikation mit einer komplexen Zahl genau einer solchen Drehstreckung.

1.7 Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und \mathbb{R} -differenzierbar im Punkt $z \in U$. Dann ist f \mathbb{C} -differenzierbar in z genau dann, wenn $f = u + iv$ die *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen* in z erfüllt, nämlich

1. $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z)$
2. $\frac{\partial u}{\partial y}(z) + \frac{\partial v}{\partial x}(z) = 0$

1.8 harmonisch

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn sie C^2 ist und wenn gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Ist $g = u + iv$ holomorph und C^2 , dann sind u und v *harmonisch*.

1.9 Funktionenfolge / Konvergenzradius

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} , $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Setze $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, $R = \frac{1}{L}$ (wobei $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$). Für $r < R$ und $|z| \leq r$ konvergiert die Reihe $f(z)$. Auf der Kreisscheibe $B_r(0)$ konvergiert diese *Funktionenfolge* gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. Wir nennen R den *Konvergenzradius* der Reihe.

- Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) z^n$ hat den gleichen Konvergenzradius wie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

1.10 Ableitung einer Funktionenfolge

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{C} , R der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Sei $r < R$. Dann ist die Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ holomorph auf der offenen Kreisscheibe $B_r(0)$, mit der Ableitung $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$.

- $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ist für
 - $\rightarrow |z| < 1 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$
 - $\rightarrow |z| > 1 \Rightarrow f(z) = -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n$
- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, $R = \infty$
- $\sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $R = \infty$
- $\cos(z) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, $R = \infty$
- $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$

1.11 Wirtinger Kalkül

Man definiert für reell differenzierbare komplexe Funktionen die sogenannten *Wirtinger Ableitungen* durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Seien nun $A, B \subset \mathbb{C}$ offen und $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Sei weiter $a \in A$ und $b := f(a) \in B$. Definiere $\bar{f} : A \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\bar{f}(z) := \overline{f(z)}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} (a) \right)} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} (a) \\ \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (a) \right)} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} (a) \\ \frac{\partial (g \circ f)}{\partial z} (a) &= \frac{\partial g}{\partial \omega} (b) \frac{\partial f}{\partial z} (a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{\omega}} (b) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} (a) \\ \frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}} (a) &= \frac{\partial g}{\partial \omega} (b) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{\omega}} (b) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} (a) \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

wobei Δ der *Laplace-Operator* ist.

2 Cauchys Integralsatz

2.1 Integral

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Wir nennen γ *stückweise stetig differenzierbar* (ssd). Wenn es Zahlen $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ gibt, sodass $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ stetig differenzierbar ist, $0 \leq j \leq r-1$.

Für $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ stückweise stetig differenzierbarer Weg (oder Kurve). Setze

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=0}^{r-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t)) \dot{\gamma} dt$$

Das Ergebnis des *Integrals* ist also eine komplexe Zahl.

Das Integrieren ist eine lineare Abbildung. Es gilt:

- $\int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$
- $\int_{\gamma} c \cdot f(z) dz = c \cdot \int_{\gamma} f(z) dz$
- $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L \cdot M$
 $M = \sup \{ |f(\gamma(t))| \mid t \in [a, b] \}$
 $L = L(\gamma) = \text{Kurvenlänge} = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$

2.2 Kreisintegral

Für $r > 0$ und $c \in \mathbb{C}$ setze

$$\int_{|z-c|=r} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

mit

$$\gamma(t) = re^{it} + c$$

und $t \in [0, 2\pi]$.

2.3 Dreieck

Für $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ ist das *Dreieck*

$$\Delta(a_0, a_1, a_2) = \{z = a_0 \cdot r + a_1 \cdot s + a_2 \cdot t \mid r+s+t=1, r, s, t \geq 0\}$$

Für $\Delta = \Delta(a_0, a_1, a_2) \subseteq \Omega$ setze

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= a_0(1-t) + a_1 t & t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) &= a_1(1-t) + a_2 t & t \in [0, 1] \\ \gamma_3(t) &= a_2(1-t) + a_0 t & t \in [0, 1] \end{aligned}$$

- $\partial \Delta$ ist der *Rand* der Menge Δ

2.4 Stammfunktion

Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, und $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $F' = f$, so gilt mit $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ s.s.d.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Man nennt F *Stammfunktion* zu f .

2.5 Integral-Lemma von Goursat

Sei $\Delta = \Delta(a_0, a_1, a_2) \subseteq \Omega$, Ω ein Gebiet, sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

Sei Ω Gebiet, $\omega \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig und holomorph auf $\Omega \setminus \{\omega\}$. Für jedes Dreieck Δ in Ω mit ω als Ecke gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

2.6 Sternförmige Mengen

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bzgl. $x \in X$, falls für alle $y \in X$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$tx + (1 - t)y \in X$$

2.7 homotop, einfach zusammenhängend

Zwei Wege $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow X$ und $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ heißen *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit

1. $H(t, 0) = \gamma_0(t)$
2. $H(t, 1) = \gamma_1(t)$
3. $H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$
4. $H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$

Schreibe dann $\gamma_0 \simeq \gamma_1$.

X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn X wegzusammenhängend ist und für alle Wege γ_0, γ_1 gilt: aus $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ folgt stets $\gamma_0 \simeq \gamma_1$.

- Ω sternförmig $\Rightarrow \Omega$ einfach zusammenhängend
- einfach zusammenhängend kann man sich vorstellen, das es möglich ist ein Quadrat stetig auf X abzubilden, also enthält z.B. X im 2dimensionalen keine "Löcher"
- Das Integral über zwei Wegen die homotopieäquivalent sind ist gleich, wenn f auf diesem Gebiet holomorph

- Fall ein geschlossener Weg homotop zum "Nullweg" ist, nennt sich dieser *Null-homotop*.
D.h. γ heißt null-homotop in Ω falls γ s.s.d. geschlossen und falls es ein stetiges $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega$ gibt mit $H(1, t) = \gamma(t)$ und $H(0, t) = \gamma(a) = \gamma(b)$ für alle t .

2.8 Cauchys Integralsatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das einfach zusammenhängend ist. Dann hat *jede* holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine Stammfunktion auf Ω .

Insbesondere gilt für jeden s.s.d. Weg γ in Ω , dass

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

wobei $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ und $F' = f$. Wenn γ ein geschlossener Weg ist, $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt also $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

2.9 Cauchys Integralsatz v.2

Sei Ω sternförmiges Gebiet bzgl. $\omega \in \Omega$. Wenn $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{\omega\})$, dann hat f eine Stammfunktion $F \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ s.s.d., so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- auf ω ist nur die Stetigkeit verlangt, *nicht* die \mathbb{C} -Differenzierbarkeit

2.10 Cauchys Integralformel

Sei Ω Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, sei $c \in \Omega$ und sei $r > 0$ so, dass $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq r\} \subseteq \Omega$. Dann gilt für alle $z \in B_r(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - c| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

- Die Werte von f auf dem Kreisrand legen also f im Inneren der Kreisscheibe fest.
- Vorsicht, man muss den Weg genau betrachten!

2.11 Entwicklungslemma

Sei $c \in \mathbb{C}, r > 0, K_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = r\}$. Sei $\varphi : K_r \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Für $z \in B_r(c)$ setze

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - c| = r} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Dann ist f holomorph auf $B_r(c)$, und

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - c| = r} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - c)^{k+1}} d\xi$$

2.12 Cauchy-Taylor Entwicklungssatz

Sei Ω ein Gebiet, $c \in \Omega$, sei $r > 0$ so, dass $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq r\} \subseteq \Omega$. Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k$$

für alle $z \in B_r(c)$ und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - c| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{k+1}} d\xi \end{aligned}$$

Insbesondere ist jedes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ beliebig oft \mathbb{C} -differenzierbar.

- Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Ferner sei $a \in \Omega$ und $B_R(a)$ die größte offene Kreisscheibe um a , die noch ganz in Ω enthalten ist. Ist f auf $B_R(a)$ unbeschränkt, dann ist R gleich dem Konvergenzradius der Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt a .
- Taylorreihe ist Spezialfall der *Laurent-Reihe* (siehe 4.5 auf Seite 9) mit $a_k = 0$ für $k < 0$.

2.13 Äquivalente Aussagen über Holomorphe Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Folgende Bedingungen sind äquivalent.

1. f ist holomorph
2. f ist in jedem Punkt $z \in \Omega$ beliebig oft \mathbb{C} -differenzierbar
3. Für jedes $c \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(c) \subseteq \Omega$ gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k$$

wobei

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - c| = r'} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{k+1}} d\xi \end{aligned}$$

mit $r' < r$

2.14 Satz von Morera

Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Wenn $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ gilt, für alle s.s.d. Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, dann ist f holomorph.

- Die Umkehrung gilt auch, nach dem Integralsatz (siehe 2.8 auf der vorherigen Seite).

2.15 Fortsetzungssatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $c \in \Omega$, sei $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$. Falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$M = \{|g(z)| \mid |z - c| \leq \varepsilon\}$$

beschränkt ist, dann gibt es genau eine Abbildung $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $g(z) = f(z)$ für alle $z \in \Omega \setminus \{c\}$.

Man nennt f *holomorphe Fortsetzung* von g in c . Der Satz gilt insbesondere, falls g holomorph in $\Omega \setminus \{c\}$ und stetig in c ist.

3 Eigenschaften holomorpher Funktionen

3.1 Identitätssatz

Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{C} , $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $f = g$
2. Es gibt eine unendliche Menge $X \subseteq \Omega$, die einen Häufungspunkt $c \in \Omega$ hat, und $f|_X = g|_X$
3. Es gibt $c \in \Omega$, so dass $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Folgerung

$I = [a, b] \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ mit $a \neq b$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet mit $I \subseteq \Omega$. Ist $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so gibt es höchstens ein $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $g|_I = f$.

- Die aus Analysis I bekannten Funktionen wie $\sin, \cos, \exp, \log, \dots$ haben also *eindeutige* Fortsetzungen. Alle Rechenregeln aus dem Reellen gelten also auf in \mathbb{C}

3.3 Satz von Liouville

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (d.h. f ist ganze/schlichte Funktion). Wenn $|f|$ beschränkt ist, so ist f konstant.

3.4 Verallgemeinerter Satz von Liouville

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Falls es Zahlen $l, m, n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|f(z)| \leq |z|^n \cdot m + l$$

so ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$, d.h.

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

3.5 Fundamentalsatz der Algebra

Ist $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$, so gibt es $\omega \in \mathbb{C}$ mit $p(\omega) = 0$.

3.6 Linearfaktorzerlegung

Ist $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ Polynom vom Grad n , mit $p(c) = 0$, so gibt es ein Polynom $q(z)$ vom Grad $n - 1$ so, dass

$$p(z) = q(z)(z - c)$$

Daraus folgt, dass es eindeutig bestimmte Zahlen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$p(z) = a_n \cdot (z - c_1) \cdot (z - c_2) \cdot \dots \cdot (z - c_n)$$

(Zerlegung in Linearfaktoren)

3.7 Mittelwertgleichung

Ist $D_r(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq r\}$, Ω ein Gebiet mit $D_r(c) \subseteq \Omega$, so gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

$$|f(c)| \leq \sup \{|f(z)| \mid |z - c| = r\}$$

- Es gibt auf dem Kreisrand also einen Punkt der größer ist (dem Betrage nach) als in der Mitte

3.8 Offen

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *offen*, falls für jede offene Menge $U \subseteq \Omega$ auch $f(U)$ offen in \mathbb{C} ist.

Sei Ω Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sei *nicht* konstant. Ist $c \in \Omega$ und $B_r(c) \subseteq \Omega$, dann gibt es $s > 0$ mit

$$B_s(f(c)) \subseteq f(B_r(c))$$

- Insbesondere sind alle nicht konstanten $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, mit Ω Gebiet, offen.

3.9 Satz von der Gebietsinvarianz

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und nicht konstant, so ist $f(\Omega)$ wieder ein Gebiet.

3.10 Eigenschaften Konstanter Funktionen

Sei Ω Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

1. f ist konstant
2. $|f|$ ist konstant
3. $\Re(f)$ ist konstant
4. $\Im(f)$ ist konstant

3.11 Maximumsprinzip

Ist Ω Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $c \in \Omega$ sei ein lokales Maximum von $|f|$. Dann ist f konstant.

Anders gesagt: Wenn f nicht konstant ist, hat $|f|$ *keine* lokalen Maxima!

- Eine nichtkonstante holomorphe Funktion kann durchaus lokale Minima für $|f|$ haben!

3.12 Maxima auf beschränkten Gebiet

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *beschränktes* Gebiet (d.h. $\Omega \subseteq B_R(0)$ für ein $R \in \mathbb{R}$), $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig, und holomorph auf Ω . Dann hat $|f|$ Maxima auf $\overline{\Omega}$, aber alle Maxima von $|f|$ liegen in $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$.

Anders gesagt: alle (lokalen) Maxima von $|f|$ liegen im *Rand* $\partial\Omega$.

- $\overline{\Omega}$ ist der Abschluss von Ω

3.13 Schwarzsches Lemma

Sei $E = B_1(0)$, sei $f \in \mathcal{O}(E)$ mit $f(E) \subseteq E$ und $f(0) = 0$. Dann gilt entweder $f(z) = a \cdot z$ mit $|a| = 1$ ($a \in \mathbb{C}$) oder $|f'(0)| < 1$ sowie $|f(z)| < |z|$ für alle $z \in E \setminus \{0\}$.

3.14 Automorphismus

Sei $E = B_1(0)$. Eine Abbildung $f \in \mathcal{O}(E)$ heißt *Automorphismus* von E , wenn gilt $f(E) \subseteq E$ und wenn es $g \in \mathcal{O}(E)$ gibt mit $g(E) \subseteq E$, so dass

$$f \circ g = \text{id}_E = g \circ f$$

Die Inverse g zu f ist durch f eindeutig bestimmt. Die Menge

$$\text{Aut}(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) \mid f \text{ ist Automorphismus von } E\}$$

bildet eine Gruppe bezüglich Komposition, id_E ist Neutralelement.

- Sei $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$, setze

$$f_{a,b}(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}}$$

es gilt $f_{a,b} \in \text{Aut}(E)$

- $f_{a,0}(z) = a^2 z$ ist eine Drehung, jede Drehung lässt sich so schreiben. Es gilt

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac+b\bar{d}, ad+b\bar{c}}$$

- $f_{a,b} \circ f_{\bar{a}, -b} = \text{id}_E$

- es gilt $G = \{f_{a,b} \mid |a|^2 - |b|^2 = 1\} = \text{Aut}(E)$
- $z \mapsto az, |a| = 1$ Drehung. Ist ein Automorphismus.
- $H = \{f_{a,0} \mid |a|^2 = 1\} \subseteq G = \text{Aut}(E)$ ist die Menge der Drehungen
- Sei $h \in \text{Aut}(E)$ mit $h(0) = 0$. Dann gilt $h \in H$, d.h. h ist eine Drehung

3.15 Projektive lineare Gruppe

$G = \{f_{a,b} \mid |a|^2 - |b|^2 = 1\}$ ist eine Gruppe (von Abbildungen), die von 3 reellen Parametern bestimmt wird. G ist eine sogenannte reelle dreidimensionale Liegruppe, nämlich $PSL_2\mathbb{R}$ (projektive lineare Gruppe).

- $PSL_2\mathbb{R}$ entspricht einer 2×2 -Matrix mit $\det = 1$

3.16 Riemannscher Abbildungssatz

Ist Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{C} mit $\Omega \neq \mathbb{C}$, so gibt es eine biholomorphe Abbildung

$$f : \Omega \xrightarrow{\cong} E$$

- Für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ gilt $\text{Aut}(\Omega) \cong \text{Aut}(E) = G = PSL_2\mathbb{R}$
- Abbildung von oberer Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ auf die Einheitskreisscheibe mit $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ und der Umkehrfunktion $z \mapsto i \frac{1+z}{z-1}$

3.17 Kreiskettenverfahren

Ist Ω ein Gebiet, $c \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Es gilt

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$$

Es kann passieren, dass diese Reihe konvergiert auf einer Kreisscheibe $B_R(c)$, die nicht mehr ganz in Ω enthalten ist. Dann kann man f auf einem größeren Definitionsbereich fortsetzen (*analytische Fortsetzung*).

- "Monodrome?" \rightarrow Ist man nach einem geschlossenem Umlauf wieder bei f ?

3.18 Fehlen von Geraden im Definitionsbereich

Sei $\Omega = B_r(c)$, $\Im(c) < 0$, sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $\Omega \setminus \mathbb{R}$. Dann ist f holomorph auf Ω .

- Man kann also auf die Holomorphie auf der Geraden die das Gebiet schneidet, schließen.
- Gleiches gilt auch für beliebige stetige Schnitte.

3.19 Spiegelungssatz

Ist Ω ein Gebiet in \mathbb{C} mit: $z \in \Omega \Leftrightarrow \bar{z} \in \Omega$ (Ω symmetrisch bzgl. \mathbb{R} -Achse), und ist $f : \{z \in \Omega \mid \Im(z) \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $\{z \in \Omega \mid \Im(z) > 0\}$ und gilt $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{R}$, so hat f analytische Fortsetzung auf ganz Ω , durch

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{falls } \Im(z) \geq 0 \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{falls } \Im(z) < 0 \end{cases}$$

3.20 biholomorph

Seien Ω_1, Ω_2 Gebiete in \mathbb{C} , $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ sei holomorph. Falls es ein holomorphes $g : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ gibt mit

$$\begin{aligned} g \circ f &= \text{id}_{\Omega_1} \\ f \circ g &= \text{id}_{\Omega_2} \end{aligned}$$

heißt f *biholomorph* und Ω_1, Ω_2 heißen *biholomorph äquivalent*.

3.21 injektiv und biholomorph

Ist Ω_1 ein Gebiet in \mathbb{C} , $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ nicht konstant, so wissen wir schon, dass $\Omega_2 = f(\Omega_1)$ ein Gebiet ist.

Falls f injektiv ist, ist $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ biholomorph.

- Für eine biholomorphe Funktion f gilt für alle $z \in \Omega_1$ dass $f'(z) \neq 0$ ist.

3.22 Konform / Winkeltreu

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet. Eine \mathbb{R} -differenzierbare Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *konform*, wenn sie *winkeltreu* ist, d.h. wenn für alle $z \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\angle(a, b) = \angle(Df(z)(a), Df(z)(b))$$

Ist f holomorph, $f'(z) \neq 0$, so ist $Df(z) = f'(z)$ *Drehstreckung*, verändert also Winkel *nicht*.

- biholomorphe Abbildungen sind konform

4 Isolierte Singularitäten

4.1 Kreisring

Für $c \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < s \leq \infty$ ist

$$K_{r,s}(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-c| < s\}$$

$K_{r,s}(c)$ heißt *Kreisring*.

- $K_{r,s}^+(c) = B_s(c)$

- $K_{r,s}^-(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| > r\}$
- $K_{r,s}^+(c) \cup K_{r,s}^-(c) = \mathbb{C}$
- $K_{r,s}^+(c) \cap K_{r,s}^-(c) = K_{r,s}(c)$
- $g(\omega) = c + \frac{1}{\omega}$ ist biholomorphe Abbildung mit

$$B_{\frac{1}{r}}(0) \xrightarrow{g} K_{r,s}^-(c)$$

4.2 Integralsatz für Kreise

Sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$, sei

$$0 \leq r < r' < s' < s \leq \infty$$

dann gilt

$$\int_{|z-c|=r'} f(z) dz = \int_{|z-c|=s'} f(z) dz$$

4.3 Integralformel für Kreise

Sei $c \in \mathbb{C}$, $r < r' < s' < s$, $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $r' < |z - c| < s'$ gilt stets

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\xi-c|=s'} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi - \int_{|\xi-c|=r'} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi \right)$$

4.4 Haupt- und Nebenteil

Sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$. Dann gibt es $f_+ \in \mathcal{O}(K_{r,s}^+(c))$ und $f_- \in \mathcal{O}(K_{r,s}^-(c))$ mit $f_+(z) + f_-(z) = f(z)$ für alle $z \in K_{r,s}(c)$.

Dabei kann f_- so gewählt werden, dass $\lim_{z \rightarrow \infty} f_-(z) = 0$. Mit dieser Zusatzbedingung ist f_+ und f_- eindeutig bestimmt.

Die Funktionen f_- und f_+ heißen *Haupt-* und *Nebenteil* von f .

- $f_+(z) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-c|=t} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$
- $f_-(z) = \lim_{t \rightarrow r} -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-c|=t} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$

4.5 Entwicklungssatz von Laurent

Sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$, f_- und f_+ wie in 4.4 mit $\lim_{z \rightarrow \infty} f_-(z) = 0$. Dann gilt

$$f_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$$

auf $K_{r,s}^+(c)$ und

$$f_-(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-c)^k$$

auf $K_{r,s}^-(c)$ oder kurz

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-c)^k$$

Laurent-Reihe für f mit Entwicklungspunkt c .

Beide Reihen konvergieren gleichmäßig auf jeder kompakten Menge K , und

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-c|=t} \frac{f(\xi)}{(\xi-c)^{k+1}} d\xi$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

- Verallgemeinerung von Taylorreihe (siehe 2.12 auf Seite 6)

4.6 Partialbruchzerlegung

1. Polynomdivision, und die Funktion in der Form $\frac{z(x)}{n(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{n(x)}$ schreiben.

- grad von r ist kleiner als grad von n

2. Den Rest $r(x)$ durch Partialbruchzerlegung vereinfachen, dazu $n(x)$ in Linearfaktoren zerlegen. Dazu die Nullstellen p_1, \dots, p_k mit den Vielfachheiten h_1, \dots, h_k

$$n(x) = a \cdot (x-p_1)^{h_1} \cdot \dots \cdot (x-p_k)^{h_k}$$

3. Nun die Gleichung Ansatz für Partialbruchzerlegung aufstellen

$$\frac{r(x)}{n(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-p_1)^1} + \dots + \frac{A_{i,1}}{(x-p_i)^1} + \dots + \frac{A_{k,h_i}}{(x-p_i)^{h_i}} + \dots + \frac{A_{k,h_k}}{(x-p_k)^{h_k}}$$

- Falls ein Nullstelle des Nennerpolynoms $h_i > 1$ mal vorkommt, muss man sie mehrfach als Nenner verwenden, in den Potenzen 1 bis h_i .

4. Hauptnenner des Partialbruchs bilden und auf einen Nenner (dies ist dann ja genau $n(x)$) bringen.

5. Für x der Reihe nach p_1 bis p_k einsetzen. So erhält man k Bestimmungsgleichungen für die n Unbekannten $A_{i,j}$

6. Fertig!!

- Mit Partialbruchzerlegung lassen sich alle Gleichungen zur Summe über geometrischen Reihen oder ähnlichem umformen

4.7 Singularität

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $c \in \Omega$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$. Wir sagen dann hat f eine *isolierte Singularität* in c .

Ist $K_{0,s}(c) = B_s(c) \setminus \{0\} \subseteq \Omega$ so haben wir auf diesem Kreisring eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-c)^k$$

1. c heißt *hebbare Singularität* wenn $a_k = 0$ für alle $k < 0$

- mit $f(c) = a_0$
- f ist in c analytisch fortsetzbar

2. c heißt *Pol (-stelle)* falls es ein $k < 0$ gibt mit $a_k \neq 0$ und $a_k = 0$ für fast alle $k < 0$.

- Wenn c ein Pol, dann heißt $p_c(f) = \max\{k > 0 \mid a_{-k} \neq 0\}$ *Polstellenordnung* von c .

3. c heißt *wesentliche Singularität* wenn c weder Pol noch hebbbar, d.h. es existieren unendlich viele $a_k \neq 0$ mit $k < 0$.

4.8 hebbare Singularität und Beschränktheit

Sei $c \in \Omega$ Singularität von $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$. Dann gilt: c ist hebbare Singularität genau dann, wenn es $t > 0$ gibt, so dass f auf $K_{0,t}(c)$ beschränkt ist.

- Dann hat f holomorphe Fortsetzung in Punkt c

4.9 Grenzwert und Pol

Sei $c \in \Omega$ Singularität von $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$. Dann ist c Pol von f genau dann, wenn gilt

$$\lim_{z \rightarrow c} |f(z)| = \infty$$

4.10 Satz von Casorati-Weierstrass

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $c \in \Omega$, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$. Dann hat f eine wesentliche Singularität in c genau dann, wenn es zu jedem $\omega \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Ω gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \omega$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$. Man sagt auch, die Werte von f nach c liegen dicht in \mathbb{C} .

4.11 Singularität in ∞

Ist $f \in \mathcal{O}(K_{r,\infty}(0))$ so sagt man, ∞ ist isolierte Singularität von f .

1. ∞ ist hebbare Singularität von $f \Leftrightarrow 0$ hebbare Singularität von $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$
2. ∞ ist Pol von $f \Leftrightarrow 0$ Pol von $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$
3. ∞ ist wesentliche Singularität von $f \Leftrightarrow 0$ wesentliche Singularität von $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$

4.12 diskret

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *diskret*, wenn es zu jedem $d \in D$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $B_\varepsilon(d) \cap D = \{d\}$.

- Die Vereinigung abgeschlossener diskreter Mengen ist wieder diskret
- D hat keine Häufungspunkte

4.13 meromorph

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $D \subseteq \Omega$ sei abgeschlossen (in Ω) und diskret.

Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus D)$ heißt *meromorph*, wenn alle Punkte in D hebbare Singularitäten oder Pole sind (wesentliche Singularitäten sind nicht erlaubt).

Setze $P(f) = \{d \in D \mid f \text{ hat Pol in } d\}$.

Es sei

$$M(\Omega) = \{f \mid f \text{ meromorph auf } \Omega \text{ für irgendeine abgeschlossene diskrete Menge } D \subseteq \Omega\}$$

4.14 Kombination von meromorphen Funktionen

Sind f, g meromorph auf Ω , so auch $f + g$ und $f \cdot g$. Ist g nicht die Nullfunktion, d.h. $g \neq [z \mapsto 0]$, so ist $\frac{1}{g}$ meromorph.

4.15 Körper der meromorphen Funktionen

$M(\Omega)$ ist ein Körper. Dabei muss man meromorphe Funktionen $f, \tilde{f} \in M(\Omega)$ als gleich betrachten, falls $P(f) = P(\tilde{f})$ und falls f und \tilde{f} die gleichen holomorphen Fortsetzungen auf $\Omega \setminus P(f)$ haben.

Fasst man $c \in \mathbb{C}$ als konstante Funktion $z \mapsto c$ auf, hat man Inklusionen $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{O}(\Omega) \subseteq M(\Omega)$. \mathbb{C} und $M(\Omega)$ sind Körper, $\mathcal{O}(\Omega)$ ist Ring.

$M(\Omega)$ heißt *Funktionskörper* (Körper der meromorphen Funktionen auf Ω).

- Jede meromorphe Funktion ist Quotient holomorpher Funktionen, d.h. $M(\Omega)$ ist Quotientenkörper des Ringes $\mathcal{O}(\Omega)$.

4.16 Riemannsphäre

Die *Riemannsphäre* ist $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Man definiert $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert gegen $\infty \Leftrightarrow$ zu jedem $R > 0$ gibt es $l \in \mathbb{N}$, so dass $|z_n| \geq R$ für alle $n \geq l$.

Ist $f \in M(\Omega)$, $d \in P(f)$, definiere $f(d) = \infty$, dann ist $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ stetig.

5 Residuen

5.1 Residuum

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $c \in \Omega$, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$. Sei $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-c)^k$ Laurententwicklung von f auf $K_{0,s}(c) \subseteq \Omega$. Das *Residuum* von f in c ist

$$\operatorname{Res}_c(f) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-c|=t} f(\xi) d\xi$$

für $0 < t < s$.

- Ist c eine hebbare Singularität von f , so gilt $\operatorname{Res}_c(f) = 0$

5.2 Stammfunktion

$\operatorname{Res}_c(f) = a$ ist die bestimmte komplexe Zahl a , für die gilt

$$z \mapsto f(z) - \frac{a}{z-c} \in \mathcal{O}(K_{0,s}(c))$$

hat eine Stammfunktion.

5.3 Pol 1-ter Ordnung

Hat f Pol 1-ter Ordnung in c , so gilt

$$\operatorname{Res}_c(f) = \lim_{z \rightarrow c} (z-c) \cdot f(z)$$

5.4 Bruch

Sind $f, g \in \mathcal{O}(B_r(c))$ mit $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$ und $g'(c) \neq 0$, so hat $\frac{f}{g}$ Pol. 1. Ordnung in c , und

$$\operatorname{Res}_c\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(c)}{g'(c)}$$

5.5 Pol m-ter Ordnung

Hat $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ Pol höchstens m -ter Ordnung in c , ist

$$g(z) = (z-c)^m f(z)$$

holomorphe Fortsetzung, so gilt

$$\operatorname{Res}_c(f) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(c)$$

- f hat Pol höchstens m -ter Ordnung in $c \Leftrightarrow (z-c)^m f(z)$ hat holomorphe Fortsetzung in $z = c$

5.6 Polstellenordnung / Polstellenmenge

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Mit $p_c(f)$ wird die *Polstellenordnung* bezeichnet. $p_c(f)$ ist das kleinste m für das $(z-c)^m f(z)$ holomorph fortsetzbar ist.

Mit $P(f)$ wird die *Menge alle Polstellen* auf Ω bezeichnet.

5.7 Windungszahl / Index

Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ s.s.d. Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Für $c \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ setze

$$\operatorname{Ind}_\gamma(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\xi-c} d\xi \in \mathbb{Z}$$

die *Windungszahl* oder den *Index* von c bezüglich γ .

5.8 logarithmische Ableitung

Ist $l \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine Umkehrfunktion für \exp (d.h. $\exp \circ l = \operatorname{id}_\Omega$) und ist $\Omega_1 \rightarrow \Omega$ holomorph auf $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}$, $h(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega_1$, so gilt

$$(l \circ h)' = \frac{h'}{h}$$

Man nennt $\frac{h'}{h}$ *logarithmische Ableitung* von h .

5.9 Innere

Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ s.s.d. geschlossen ($\gamma(a) = \gamma(b)$), so ist das *Innere* von γ

$$\operatorname{Inn}(\gamma) = \{c \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ind}_\gamma(c) \neq 0\}$$

Ist $\operatorname{Ind}_\gamma(c) \in \{0, 1\}$ für alle $c \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ so heißt γ *einfach geschlossener Weg*.

5.10 Null-homolog

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ s.s.d. geschlossen. Falls $\int_\gamma f(\xi) d\xi = 0$ für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so heißt γ *Null-homolog* in Ω .

- Null-homotope Wege sind stets null homolog

5.11 Residuensatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ nullhomolog in Ω , $D \subseteq \Omega$ sei endliche Menge mit $D \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$. Für jedes $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus D)$ gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{d \in D} \operatorname{Res}_d(f) \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(d)$$

5.12 Eigenschaften des Indexes

Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ s.s.d. und geschlossen. Sei $U = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

Dann ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und

$$z \mapsto \text{Ind}_\gamma(z)$$

ist *stetig* auf U . Außerdem ist sie lokal konstant auf $M \subseteq U$.

Die Menge $\text{Inn}(\gamma)$ ist offen und beschränkt, und

$$\text{Ext}(\gamma) = \{z \in U \mid \text{Ind}_\gamma(z) = 0\}$$

ist offen und unbeschränkt.

- Eine Funktion f ist *lokal konstant* auf U genau dann, wenn es zu jedem $z \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f auf $B_\varepsilon(z)$ konstant ist.

5.13 Nullstellenordnung

Die *Nullstellenordnung* einer holomorphen Funktion f in $c \in \Omega$ ist die größte Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die die Funktion

$$z \mapsto (z - c)^{-n} f(z)$$

eine holomorphe Fortsetzung in c hat. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k$ die Taylorreihe um c , so gilt

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0 \quad a_n \neq 0$$

falls die Nullstellenordnung n ist.

Schreibe

$$n_c(f) = n$$

- $n = 0 \Leftrightarrow$ keine Nullstelle in c
- n ist die *algebraische Vielfachheit* der Nullstelle c

5.14 Nullstellenmenge

Ist $f \in M(\Omega)$, so ist

$$N(f) = \{c \in \Omega \mid f(c) = 0 \text{ oder } f \text{ hat holomorphe Fortsetzung in } c \text{ mit } f(c) = 0\}$$

die *Nullstellenmenge* von f .

5.15 Residuumberechnung

Sind $g, h \in \mathcal{O}(\Omega)$, $n_c(g) \geq 1$ für $c \in \Omega$, so gilt

$$\text{Res}_c \left(h \cdot \frac{g'}{g} \right) = +n_c(g) \cdot h(c)$$

Ist $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{c\})$ mit Pol n -ter Ordnung in c , so gilt

$$\text{Res}_c \left(h \frac{g'}{g} \right) = -p_c(g) \cdot h(c)$$

5.16 Integration von meromorphen Funktionen 1

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in M(\Omega)$ und $D = N(f) \cup P(f)$ sei *endlich*. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ nullhomolog in Ω und gilt $D \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$, und ist $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(\xi) \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi &= \sum_{c \in N(f)} n_c(f) \text{Ind}_\gamma(c) g(c) \\ &- \sum_{c \in P(f)} p_c(f) \text{Ind}_\gamma(c) g(c) \end{aligned}$$

5.17 Integration von meromorphen Funktionen 2

Ist Ω Gebiet, $D = P(f) \cup N(f)$ endlich, $f \in M(\Omega)$. γ sei nullhomolog in Ω und einfach geschlossen mit $D \subseteq \text{Inn}(\gamma)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \sum_{c \in N(f)} n_c(f) - \sum_{c \in P(f)} p_c(f)$$

5.18 Satz von Rouche

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ sei nullhomolog in Ω und einfach geschlossen. Weiter seien $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $N(g) \cup N(f) \subseteq \text{Inn}(\gamma)$ endlich.

Falls gilt

$$|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| < |g(\gamma(t))|$$

für alle $t \in [a, b]$ so gilt

$$\sum_{c \in N(f)} n_c(f) = \sum_{c \in N(g)} n_c(g)$$

- Summe der alg. Vielfachheiten ist gleich (die Funktionen haben gleichviele Nullstellen).

5.19 Berechnung trigonometrischer Integrale

Sei $R(u, v)$ komplexe rationale Funktion in zwei (komplexen) Variablen. Wir nehmen an, dass R auf der Menge

$$\{(\cos(t), \sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

definiert und stetig ist. Setze

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z} R \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)$$

dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt = 2\pi \cdot \sum_{|z| < 1} \text{Res}_z(\tilde{R})$$

5.20 Berechnung uneigentlicher Integrale

Gegeben sei das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(t) dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t) dt$$

Sei

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0\}$$

die abgeschlossene obere Halbebene, sei $D \subseteq H \setminus \mathbb{R}$ endlich, für alle $d \in D$ gelte $\Im(d) > 0$. Weiter sei $\Omega \supseteq H$ Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus D)$. Falls gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$$

und falls die Integrale $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ und $\int_0^{\infty} f(t) dt$ existieren, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 2\pi i \sum_{z \in D} \operatorname{Res}_z(f)$$

Index

- Ableitung, 3
- Abschluss, 7
- algebraische Vielfachheit, 12
- analytische Fortsetzung, 8
- Automorphismus, 7

- biholomorph, 8
- biholomorph äquivalent, 8

- C-differenzierbar, 3
- Casorati-Weierstrass, 10
- Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, 3
- Cauchys Integralsatz, 5
- Caylayabbildung, 2

- differenzierbar
 - stückweise, stetig, 4
- diskret, 10
- Drehstreckungen, 3
- Dreieck, 4

- einfach geschlossener Weg, 11
- einfach zusammenhängend, 5
- Einheitskreisscheibe, 2
- Entwicklungssatz, 6
- Entwicklungssatz von Laurent, 9

- Fortsetzungssatz, 6
- Fundamentalsatz der Algebra, 7
- Funktionenfolge, 4

- Gebiet, 3
- Gebietsinvarianz, 7

- Halbebene, 2
- harmonisch, 3
- Hauptteil, 9
- hebbare Singularität, 10
- holomorph, 3
- holomorphe Fortsetzung, 6
- Holomorphe Funktionen, 6
- homolog, 11
- homotop, 5

- Index, 11
- injektiv, 8
- Innere, 11
- Integral, 4
- Integralformel, 5
- isolierte Singularität, 9

- konform, 8
- konstant, 12
- Konvergenzradius, 4
- Kreisintegral, 4
- Kreiskettenverfahren, 8
- Kreisring, 8

- Laplace-Operator, 4
- Laurent, 9
- Laurent-Reihe, 9
- Linearfaktoren, 7
- Linearfaktorzerlegung, 7
- logarithmische Ableitung, 11
- lokal konstant, 12

- Maximumsprinzip, 7
- meromorph, 10
- Mittelwertgleichung, 7
- Monodrome, 8

- Nebenteil, 9
 - nicht, 7
- Null-homolog, 11
- Null-homotop, 5
- Nullstellenmenge, 12
- Nullstellenordnung, 12

- offen, 7

- Partialbruchzerlegung, 9
- Pol, 10
- Polstelle, 10
- Polstellenordnung, 10, 11
- Projektive lineare Gruppe, 8

- R-differenzierbar, 3
- Rand, 4, 7
- Residuensatz, 11
- Residuum, 11
- Riemannscher Abbildungssatz, 8
- Riemannsphäre, 10

- Satz von Rouché, 12
- schlichte Funktionen, 3
- Schwarz'sches Lemma, 7
- Singularität, 9
- Spiegelungssatz, 8
- ssd, 4
- stückweise stetig differenzierbar, 4
- Stammfunktion, 5
- sternförmig, 5

- trigonometrische Integrale, 12

- uneigentliche Integrale, 13

- wegzusammenhängend, 2
- wesentliche Singularität, 10
- Windungszahl, 11
- winkeltreu, 8
- Wirtinger Ableitungen, 4
- Wirtinger Kalkül, 4

- zusammenhängend, 2, 5