Formelsammlung
Analysis III - Funktionentheorie
für Physiker und Mathematiker

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 21.07.2006 - Version: 1.0.1
Erhältlich unter http://privat.macrolab.de

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung "Analysis III - Funktionentheorie" von Prof. Dr. Linus Kramer an der Technischen Universität Darmstadt im Wintersemester 2005/06.

Inhaltsverzeichnis

1 Holomorphe Funktionen

1.1 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

1.1.1 Definition von $\mathbb{C}$

Für die Definition von $\mathbb{C}$ und den Operationen darauf siehe mein "Formelsammlung für Analysis I / II".

1.1.2 Topologie auf $\mathbb{C}$

Definition von Konvergenz, Cauchy-Folge, abgeschlossenheit und steigkeit äquivalent zu Analysis I / II.

1.1.3 Komplexe Funktionen

- $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$
- $e^{x+iy} = e^x(\cos x + i\sin y)$

1.1.4 Cayleyabbildung

Wir betrachten die *obere Halbebene* $\mathbb{H} = [z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0]$

Die *Caylayabbildung* $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ bildet die obere Halbebene $\mathbb{H}$ auf die offene *Einheitskreisscheibe* $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$ ab. Die Umkehrabbildung dazu ist $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$.

1.2 (weg-) zusammenhängend

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend*, wenn es *keine* offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit

1. $U \cup V \supseteq X$
2. $U \cap V \cap X = \emptyset$
3. $X \cap U \neq \emptyset \neq V \cap X$

$\mathbb{R}^n \supseteq X$ heißt *wegzusammenhängend*, falls es für alle $a, b \in X$ eine stetige Abbildung (einen Weg)

$$C : [0,1] \to X$$

gibt mit $C(0) = a$ und $C(1) = b$.

- Ist X wegzusammenhängend, dann ist X zusammenhängend
- Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, dann ist U wegzusammenhängend

1.3 Gebiet

Ein *Gebiet* in $\mathbb{R}^n$ ist eine offene, zusammenhängende (also wegzusammenhängende) nichtleere Teilmenge.

- z.B. $B_\varepsilon(z), \mathbb{C}$
- z.B. obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$
- Es gibt Mengen in $\mathbb{R}^n$, die zusammenhängend, aber *nicht* wegzusammenhängend sind.

1.4 $\mathbb{C}$-differenzierbar / holomorph

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, sei $z \in U$. Wir sagen f ist $\mathbb{C}$-*differenzierbar in* z falls es eine stetige Funktion

$$\theta : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$$

gibt, so dass

$$f(z+h) - f(z) = \theta(h) \cdot h$$

gilt für alle $h \in B_\varepsilon(0)$ (wähle ε so, dass $B_\varepsilon(z) \subseteq U$).

Falls solch ein θ existiert, ist es eindeutig bestimmt. Die *Ableitung* von f ist $f'(z) = \theta(0)$.

Ist f in *jedem* Punkt $z \in U$ $\mathbb{C}$-differenzierbar und ist U ein Gebiet dann heißt f *holomorph*.

Funktionen die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind, nennt man *schlichte Funktionen*.

- Der Differenzierbarkeitsbegiff aus Analysis II wird im folgenen $\mathbb{R}$-differenzierbarkeit genannt

1.5 Eigenschaften von holomorphen Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

$$\mathcal{O}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} | f \text{ ist holomorph}\}$$

Dann ist $\mathcal{O}(\Omega)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und ein Ring, der Ring der holomorphen Funktionen auf Ω. Für alle $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$, alle $c \in \mathbb{C}$ gilt

1. $f + g = [z \to f(z) + g(z)] \in \mathcal{O}(\Omega)$
   $(f+g)' = f' + g'$
2. $f \cdot g = [z \to f(z) \cdot g(z)] \in \mathcal{O}(\Omega)$
   $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
3. $c \cdot f = [z \to c \cdot f(z)] \in \mathcal{O}(\Omega)$
   $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

- Polynome sind holomorph
  $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$
- gebrochen rartionale Funktionen sind holomorph
- $f(x) = \overline{x}$ ist *nicht* holomorph, genauso wie alle funktionen die mit hilfe der Konjugation formuliert sind.
- $f(x) = |x|$ ist *nicht* holomorph
- Ist $f : U \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-differenzierbar in $z \in U$, dann ist f in z $\mathbb{R}$-differenzierbar.
- $f \circ g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit Kettenregel:
  $(f \circ g)'(z) = g'(z) \cdot f'(g(z))$

1.6 Drehstreckungen

Sei $J : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $J(z) = i \cdot z$, dass ist eine lineare Abbildung auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit $J^2 = -\text{id}$, also $(J)(-J) = \text{id}$.

Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann linear über $\mathbb{C}$, wenn gilt

$$JT = TJ$$

In Matritzenschreibweise mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

muss T die Form haben

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Solche 2×2-Matrizen werden *Drehstreckungen* genannt.

- Falls man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ auffasst entspräche die Multiplikation mit einer komplexen Zahl genau einer solchen Drehstreckung.

1.7 Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Sei $U = \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\mathbb{R}$-differenzierbar im Punkt $z \in U$. Dann ist f $\mathbb{C}$-differenzierbar in z genau dann, wenn $f = u + iv$ die *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen* in z erfüllt, nämlich

1. $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z)$
2. $\frac{\partial u}{\partial y}(z) + \frac{\partial v}{\partial x}(z) = 0$

1.8 harmonisch

$f : U \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn sie C^2 ist und wenn gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} = 0$$

Ist $g = u + iv$ holomorph *und* C^2, dann sind u und v *harmonisch*.

1.9 Funktionenfolge / Konvergenzradius

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$. Setze $L=\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$, $R=\frac{1}{L}$ (wobei $\frac{1}{\infty}=0$ und $\frac{1}{0}=\infty$). Für $r<R$ und $|z|\le r$ konvergiert die Reihe $f(z)$. Auf der Kreisscheibe $B_r(0)$ konvergiert diese *Funktionenfolge* gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. Wir nennen R den *Konvergenzradius* der Reihe.

- Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(n+1)z^n$ hat den gleichen Konvergenzradius wie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$.

1.10 Ableitung einer Funktionenfolge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{C}$, R der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$. Sei $r<R$. Dann ist die Funktion $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ holomorph auf der offenen Kreisscheibe $B_r(0)$, mit der Ableitung $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$.

- $f(z)=\frac{1}{1-z}$ ist für

  $\rightarrow$ $|z|<1\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$
  $\rightarrow$ $|z|>1\Rightarrow f(z)=-\sum_{n=-1}^{-\infty}z^n$

- $\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$, $R=\infty$
- $\sin(z)=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$, $R=\infty$
- $\cos(z)=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$, $R=\infty$
- $\exp'=\exp$, $\sin'=\cos$, $\cos'=-\sin$

1.11 Wirtinger Kalkül

Man definiert für reell differenzierbare komplexe Funktionen die sogenannten *Wirtinger Ableitungen* durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

Seien nun $A,B\subset\mathbb{C}$ offen und $f:A\to B, g:B\to\mathbb{C}$ reell differenzierbar. Sei weiter $a\in A$ und $b:=f(a)\in B$. Definiere $\overline{f}:A\to\mathbb{C}$ durch $\overline{f}(z):=\overline{f(z)}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}(a)\right)}&=\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{z}}(a)\\ \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)\right)}&=\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}(a)\\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(a)&=\frac{\partial g}{\partial\omega}(b)\frac{\partial f}{\partial z}(a)+\frac{\partial g}{\partial\overline{\omega}}(b)\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}(a)\\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial \overline{z}}(a)&=\frac{\partial g}{\partial\omega}(b)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)+\frac{\partial g}{\partial\overline{\omega}}(b)\frac{\partial\overline{f}}{\partial \overline{z}}(a)\\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}&=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

wobei Δ der *Laplace-Operator* ist.

2 Cauchys Integralsatz

2.1 Integral

Sei $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ stetig. Wir nennen γ *stückweise stetig differenzierbar* (*ssd*). Wenn es Zahlen $a=a_0<a_1<\ldots<a_r=b$ gibt, sodass $\gamma|_{[a_j,a_{j+1}]}$ stetig differenzierbar ist, $0\le j\le r-1$.

Für $f:\Omega\to\mathbb{C}$ stetig und $\gamma:[a,b]\to\Omega$ stückweise stetig differenzierbarer Weg (oder Kurve). Setze

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{j=0}^{r-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}}f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}dt$$

Das Ergebniss des *Integrals* ist also eine komplexe Zahl.

Das Integrieren ist eine lineare Abbildung. Es gilt:

1. $\int_\gamma(f(z)+g(z))\,dz=\int_\gamma f(z)\,dz+\int_\gamma g(z)\,dz$
2. $\int_\gamma c\cdot f(z)\,dz=c\cdot\int_\gamma f(z)\,dz$
3. $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\le L\cdot M$
   $M=\sup\{|f(\gamma(t))|\,|t\in[a,b]\}$
   $L=L(\gamma)=\text{Kurvenlänge}=\int_a^b|\dot{\gamma}(t)|\,dt$

2.2 Kreisintegral

Für $r>0$ und $c\in\mathbb{C}$ setze

$$\int_{|z-c|=r}f(z)\,dz=\int_\gamma f(z)\,dz$$

mit

$$\gamma(t)=re^{it}+c$$

und $t\in[0,2\pi]$.

2.3 Dreieck

Für $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{C}$ ist das *Dreieck*

$$\Delta(a_0,a_1,a_2)=\{z=a_0\cdot r+a_1\cdot s+a_2\cdot t|r+s+t=1,r,s,t\ge0\}$$

Für $\Delta=\Delta(a_0,a_1,a_2)\subseteq\Omega$ setze

$$\int_{\partial\Delta}f(z)\,dz=\int_{\gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\gamma_2}f(z)\,dz+\int_{\gamma_3}f(z)\,dz$$

mit

$$\begin{aligned}\gamma_1(t)&=a_0(1-t)+a_1t\quad t\in[0,1]\\ \gamma_2(t)&=a_1(1-t)+a_2t\quad t\in[0,1]\\ \gamma_3(t)&=a_2(1-t)+a_0t\quad t\in[0,1]\end{aligned}$$

- $\partial\Delta$ ist der *Rand* der Menge Δ

2.4 Stammfunktion

Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, und $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $F' = f$, so gilt mit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ s.s.d.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Man nennt F *Stammfunktion* zu f.

2.5 Integral-Lemma von Goursat

Sei $\Delta = \Delta(a_0, a_1, a_2) \subseteq \Omega$, Ω ein Gebiet, sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

Sei Ω Gebiet, $\omega \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei stetig und holomorph auf $\Omega \backslash \{\omega\}$. Für jedes Dreieck Δ in Ω mit ω als Ecke gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

2.6 Sternförmige Mengen

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bzgl. $x \in X$, falls für alle $y \in X$ und alle $t \in [0,1]$ gilt

$$tx + (1-t)\,y \in X$$

2.7 homotop, einfach zusammenhängend

Zwei Wege $\gamma_0 : [0,1] \to X$ und $\gamma_1\,[0,1] \to X$ heißen *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ gibt mit

1. $H(t,0) = \gamma_0(t)$
2. $H(t,1) = \gamma_1(t)$
3. $H(0,s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$
4. $H(1,s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$

Schreibe dann $\gamma_0 \simeq \gamma_1$.

X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn X wegzusammenhängend ist und für alle Wege γ_0, γ_1 gilt: aus $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ folgt stets $\gamma_0 \simeq \gamma_1$.

- Ω sternförmig $\Rightarrow$ Ω einfach zusammenhängend
- einfach zusammenhängend kann man sich vorstellen, das es möglich ist ein quadrat stetig auf X abzubilden, also enthält z.B. X im 2dimensionalen keine "Löcher"
- Das Integral über zwei Wegen die homotopieäquivalent sind ist gleich, wenn f auf diesem Gebiet holomorph
- Fall ein geschlossener Weg homotop zum "Nullweg" ist, nennt sich dieser *Null-homotop*.
  D.h. γ heißt null-homotop in Ω falls γ s.s.d. geschlossen und falls es ein stetiges $H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ gibt mit $H(1,t) = \gamma(t)$ und $H(0,t) = \gamma(a) = \gamma(b)$ für alle t.

2.8 Cauchys Integralsatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das einfach zusammenhängend ist. Dann hat *jede* holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine Stammfunktion auf Ω.

Insbesondere gilt für jeden s.s.d. Weg γ in Ω, dass

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

wobei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ und $F' = f$. Wenn γ ein geschlossener Weg ist, $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt also $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

2.9 Cauchys Integralsatz v.2

Sei Ω sternförmiges Gebiet bzgl. $\omega \in \Omega$. Wenn $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig ist und $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega\})$, dann hat f eine Stammfunktion $F \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Ist $\gamma : [a,b] \to \Omega$ s.s.d., so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- auf ω ist nur die Stetigkeit verlangt, *nicht* die $\mathbb{C}$-differenzierbarkeit

2.10 Cauchys Integralformel

Sei Ω Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, sei $c \in \Omega$ und sei $r > 0$ so, dass $\{z \in \mathbb{C} |\, |z-c| \leq r\} \subseteq \Omega$. Dann gilt für alle $z \in B_r(c) = \{z \in \mathbb{C} |\, |z-c| < r\}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - c| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

- Die Werte von f auf dem Kreisrand legen also f im Inneren der Kreisscheibe fest.
- Vorsicht, man muss den Weg genau betrachten!

2.11 Entwicklungslemma

Sei $c \in \mathbb{C}, r > 0, K_r = \{z \in \mathbb{C} |\, |z-c| = r\}$. Sei $\varphi : K_r \to \mathbb{C}$ stetig. Für $z \in B_r(c)$ setze

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - c| = r} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Dann ist f holomorph auf $B_r(c)$, und

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k \\ a_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - c| = r} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - c)^{k+1}} d\xi \end{aligned}$$

2.12 Cauchy-Taylor Entwicklungssatz

Sei Ω ein Gebiet, $c \in \Omega$, sei $r > 0$ so, dass $\{z \in \mathbb{C} | \, |z-c| \leq r\} \subseteq \Omega$. Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$$

für alle $z \in B_r(c)$ und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - c| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{k+1}} d\xi \end{aligned}$$

Insbesondere ist jedes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ beliebig oft $\mathbb{C}$-differenzierbar.

- Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Ferner sei $a \in \Omega$ und $B_R(a)$ die größte offene Kreisscheibe um a, die noch ganz in Ω enthalten ist. Ist f auf $B_R(a)$ unbeschränkt, dann ist R gleich den Konvergenzradius der Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt a.
- Taylorreihe ist Spezialfall der *Laurent-Reihe* (siehe 4.5 auf Seite 9) mit $a_k = 0$ für $k < 0$.

2.13 Äquivalente Aussagen über Holomorphe Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Folgende Bedinugen sind äquivalent.

1. f ist holomorph
2. f ist in jedem Punkt $z \in \Omega$ beliebig oft $\mathbb{C}$-differenzierbar
3. Für jedes $c \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(c) \subseteq \Omega$ gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$$

wobei

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - c| = r'} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{k+1}} d\xi \end{aligned}$$

mit $r' < r$

2.14 Satz von Morera

Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Wenn $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ gilt, für *alle* s.s.d. Wege $\gamma : [a,b] \to \Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, dann ist f holomorph.

- Die Umkehrung gilt auch, nach dem Integralsatz (siehe 2.8 auf der vorherigen Seite).

2.15 Fortsetzungssatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $c \in \Omega$, sei $g \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{c\})$. Falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$M = \{|g(z)| \, | \, |z-c| \leq \varepsilon\}$$

beschränkt ist, dann gibt es genau eine Abbildung $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $g(z) = f(z)$ für alle $z \in \Omega \backslash \{c\}$.

Man nennt f *holomorphe Fortsetzung* von g in c. Der Satz gilt insbesondere, falls g holomorph in $\Omega \backslash \{c\}$ und stetig in c ist.

3 Eigenschaften holomorpher Funktionen

3.1 Identitätssatz

Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $f = g$
2. Es gibt eine unendliche Menge $X \subseteq \Omega$, die einen Häufungspunkt $c \in \Omega$ hat, und $f|_X = g|_X$
3. Es gibt $c \in \Omega$, so dass $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Folgerung

$I = [a,b] \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ mit $a \neq b$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet mit $I \subseteq \Omega$. Ist $f : I \to \mathbb{C}$ stetig, so gibt es höchstens ein $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $g|_I = f$.

- Die aus Analysis I bekannten Funktionen wie $\sin, \cos, \exp, \log, \ldots$ haben also *eindeutige* Fortsetzungen. Alle Rechenregeln aus dem Reellen gelten also auf in $\mathbb{C}$

3.3 Satz von Liouville

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (d.h. f ist ganze/schlichte Funktion). Wenn $|f|$ beschränkt ist, so ist f konstant.

3.4 Verallgemeinerter Satz von Liouville

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Falls es Zahlen $l, m.n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|f(z)| \leq |z|^n \cdot m + l$$

so ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$, d.h.

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

3.5 Fundamentalsatz der Algebra

Ist $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$, so gibt es $\omega \in \mathbb{C}$ mit $p(\omega) = 0$.

3.6 Linearfaktorzerlegung

Ist $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ Polynom vom Grad n, mit $p(c) = 0$, so gibt es ein Polynom $q(z)$ vom Grad $n-1$ so, dass

$$p(z) = q(z)(z-c)$$

Daraus folgt, dass es eindeutig bestimmte Zahlen $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$p(z) = a_n \cdot (z - c_1) \cdot (z - c_2) \cdot \ldots \cdot (z - c_n)$$

(Zerlegung in Linearfaktoren)

3.7 Mittelwertgleichung

Ist $D_r(c) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z-c| \leq r\}$, Ω ein Gebiet mit $D_r(c) \subseteq \Omega$, so gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

$$|f(c)| \leq \sup\{|f(z)| \,|\, |z-c| = r\}$$

- Es gibt auf dem Kreisrand also einen Punkt der größer ist (dem Betrage nach) als in der Mitte

3.8 Offen

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *offen*, falls für jede offene Menge $U \subseteq \Omega$ auch $f(U)$ offen in $\mathbb{C}$ ist.

Sei Ω Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sei *nicht* konstant. Ist $c \in \Omega$ und $B_r(c) \subseteq \Omega$, dann gibt es $s > 0$ mit

$$B_s(f(c)) \subseteq f(B_r(c))$$

- Insbesondere sind alle nicht konstanten $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, mit Ω Gebiet, offen.

3.9 Satz von der Gebietsinvarianz

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und nicht konstant, so ist $f(\Omega)$ wieder ein Gebiet.

3.10 Eigenschaften Konstanter Funktionen

Sei Ω Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

1. f ist konstant
2. $|f|$ ist konstant
3. $\Re(f)$ ist konstant
4. $\Im(f)$ ist konstant

3.11 Maximumsprinzip

Ist Ω Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $c \in \Omega$ sei ein lokales Maximum von $|f|$. Dann ist f konstant.

Anders gesagt: Wenn f nicht konstant ist, hat $|f|$ *keine* lokalen Maxima!

- Eine nichtkonstante holomorphe Funktion kann durchaus lokale Minima für $|f|$ haben!

3.12 Maxima auf beschränkten Gebiet

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *beschränktes* Gebiet (d.h. $\Omega \subseteq B_R(0)$ für ein $R \in \mathbb{R}$), $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ sei stetig, und holomorph auf Ω. Dann hat $|f|$ Maxima auf $\overline{\Omega}$, aber alle Maxima von $|f|$ liegen in $\partial\Omega := \overline{\Omega} \backslash \Omega$.

Anders gesagt: alle (lokalen) Maxima von $|f|$ liegen im *Rand* $\partial\Omega$.

- $\overline{\Omega}$ ist der Abschluss von Ω

3.13 Schwarzsches Lemma

Sei $E = B_1(0)$, sei $f \in \mathcal{O}(E)$ mit $f(E) \subseteq E$ und $f(0) = 0$. Dann gilt entweder $f(z) = a \cdot z$ mit $|a| = 1$ ($a \in \mathbb{C}$) oder $|f'(0)| < 1$ sowie $|f(z)| < |z|$ für alle $z \in E \backslash \{0\}$.

3.14 Automorphismus

Sei $E = B_1(0)$. Eine Abbildung $f \in \mathcal{O}(E)$ heißt *Automorphismus* von E, wenn gilt $f(E) \subseteq E$ und wenn es $g \in \mathcal{O}(E)$ gibt mit $g(E) \subseteq E$, so dass

$$f \circ g = \mathrm{id}_E = g \circ f$$

Die Inverse g zu f ist durch f eindeutig bestimmt. Die Menge

$$\mathrm{Aut}(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) \,|\, f \text{ ist Automorphismus von } E\}$$

bildet eine Gruppe bezüglich Komposition, id_E ist Neutralelement.

- Sei $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$, setze
  $$f_{a,b}(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z + \overline{a}}$$
  es gilt $f_{a,b} \in \mathrm{Aut}(E)$
- $f_{a,0}(z) = a^2 z$ ist eine Drehung, jede Drehung lässt sich so schreiben. Es gilt
  $$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac+b\overline{d}, ad+b\overline{c}}$$
- $f_{a,b} \circ f_{\overline{a},-b} = \mathrm{id}_E$

- es gilt $G = \left\{ f_{a,b} \middle| |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} = \mathrm{Aut}(E)$
- $z \mapsto az$, $|a| = 1$ Drehung. Ist ein Automorphismus.
- $H = \left\{ f_{a,0} \middle| |a|^2 = 1 \right\} \subseteq G = \mathrm{Aut}(E)$ ist die Menge der Drehungen
- Sei $h \in \mathrm{Aut}(E)$ mit $h(0) = 0$. Dann gilt $h \in H$, d.h. h ist eine Drehung

3.15 Projektive lineare Gruppe

$G = \left\{ f_{a,b} \middle| |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$ ist eine Gruppe (von Abbildungen), die von 3 reellen Parametern bestimmt wird. G ist eine sogenannte reelle dreidimensionale Liegruppe, nämlich $PSL_2\mathbb{R}$ (projektive lineare Gruppe).

- $PSL_2\mathbb{R}$ entspricht einer 2×2-Matrix mit $\det = 1$

3.16 Riemannscher Abbildungssatz

Ist Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ mit $\Omega \neq \mathbb{C}$, so gibt es eine biholomorphe Abbildung

$$f : \Omega \overset{\simeq}{\to} E$$

- Für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Aut}(\Omega) \simeq \mathrm{Aut}(E) = G = PSL_2\mathbb{R}$
- Abbildung von oberer Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$ auf die Einheitskreisscheibe mit $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ und der Umkehrfunktion $z \mapsto i\frac{1+z}{z-1}$

3.17 Kreiskettenverfahren

Ist Ω ein Gebiet, $c \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gilt

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$$

Es kann passieren, dass diese Reihe konvergiert auf einer Kreisscheibe $B_R(c)$, die nicht mehr ganz in Ω enthalten ist. Dann kann man f auf einem größeren Definitionsbereich fortsetzen (*analytische Fortsetzung*).

- "Monodrome?" $\to$ Ist man nach einem geschlossenem Umlauf wieder bei f?

3.18 Fehlen von Geraden im Definitionsbereich

Sei $\Omega = B_r(c)$, $\Im(c) < 0$, sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $\Omega \backslash \mathbb{R}$. Dann ist f holomorph auf Ω.

- Man kann also auf die Holomorphie auf der Geraden die das Gebiet schneidet, schließen.
- Gleiches gilt auch für beliebige stetige Schnitte.

3.19 Spiegelungssatz

Ist Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ mit: $z \in \Omega \Leftrightarrow \overline{z} \in \Omega$ (Ω symmetrisch bzgl. $\mathbb{R}$-Achse), und ist $f : \{z \in \Omega | \Im(z) \geq 0\} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $\{z \in \Omega | \Im(c) > 0\}$ und gilt $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{R}$, so hat f analytische Fortsetzung auf ganz Ω, durch

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{falls } \Im(z) \geq 0 \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{falls } \Im(z) < 0 \end{cases}$$

3.20 biholomorph

Seien Ω_1, Ω_2 Gebiete in $\mathbb{C}$, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ sei holomorph. Falls es ein holomorphes $g : \Omega_2 \to \Omega_1$ gibt mit

$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathrm{id}_{\Omega_1} \\ f \circ g &= \mathrm{id}_{\Omega_2} \end{aligned}$$

heißt f *biholomorph* und Ω_1, Ω_2 heißen *biholomorph äquivalent.*

3.21 injektiv und biholomorph

Ist Ω_1 ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ nicht konstant, so wissen wir schon, dass $\Omega_2 = f(\Omega_1)$ ein Gebiet ist.

Falls f injektiv ist, ist $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ biholomorph.

- Für eine biholomorphe Funktion f gilt für alle $z \in \Omega_1$ dass $f'(z) \neq 0$ ist.

3.22 Konform / Winkeltreu

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet. Eine $\mathbb{R}$-differenzierbare Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *konform*, wenn sie *winkeltreu* ist, d.h. wenn für alle $z \in \Omega$ $a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\measuredangle(a, b) = \measuredangle(Df(z)(a), Df(z)(b))$$

Ist f holomorph, $f'(z) \neq 0$, so ist $Df(z) = f'(z)$ *Drehstreckung*, verändert also Winkel *nicht.*

- biholomorphe Abbildungen sind konform

4 Isolierte Singularitäten

4.1 Kreisring

Für $c \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < s \leq \infty$ ist

$$K_{r,s}(c) = \{z \in \mathbb{C} | r < |z-c| < s\}$$

$K_{r,s}(c)$ heißt *Kreisring.*

- $K^{+}_{r,s}(c) = B_s(c)$

- $K_{r,s}^{-}(c) = \{z \in \mathbb{C} | |z - c| > r\}$
- $K_{r,s}^{+}(c) \cup K_{r,s}^{-}(c) = \mathbb{C}$
- $K_{r,s}^{+}(c) \cap K_{r,s}^{-}(c) = K_{r,s}(c)$
- $g(\omega) = c + \frac{1}{\omega}$ ist biholomorphe Abbildung mit

$$B_{\frac{1}{r}}(0) \overset{g}{\to} K_{r,s}^{-}(c)$$

4.2 Integralsatz für Kreisringe

Sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$, sei

$$0 \leq r < r' < s' < s \leq \infty$$

dann gilt

$$\int_{|z-c|=r'} f(c)\, dz = \int_{|z-c|=s'} f(c)\, dz$$

4.3 Integralformel für Kreisringe

Sei $c \in \mathbb{C}$, $r < r' < s' < s$ $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $r' < |z - c| < s'$ gilt stets

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\xi-c|=s'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{|\xi-c|=r'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi\right)$$

4.4 Haupt- und Nebenteil

Sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$. Dann gibt es $f_{+} \in \mathcal{O}\left(K_{r,s}^{+}(c)\right)$ und $f_{-} \in \mathcal{O}\left(K_{r,s}^{-}(c)\right)$ mit $f_{+}(z) + f_{-}(z) = f(z)$ für alle $z \in K_{r,s}(c)$.

Dabei kann f_{-} so gewählt werden, das $\lim_{z\to\infty} f_{-}(z) = 0$. Mit dieser Zusatzbedingung ist f_{+} und f_{-} eindeutig bestimmt.

Die Funktionen f_{-} und f_{+} heißen *Haupt-* und *Nebenteil* von f.

- $f_{+}(z) = \lim_{t\to s} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-c|=t} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$
- $f_{-}(z) = \lim_{t\to r} -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-c|=t} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$

4.5 Entwicklungssatz von Laurent

Sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$, f_{-} und f_{+} wie in 4.4 mit $\lim_{z\to\infty} f_{-}(z) = 0$. Dann gilt

$$f_{+} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k$$

auf $K_{r,s}^{+}(c)$ und

$$f_{-}(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - c)^k$$

auf $K_{r,s}^{-}(c)$ oder kurz

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - c)^k$$

Laurent-Reihe für f mit Entwicklungspunkt c.

Beide Reihen konvergieren gleichmäßig auf jeder kompakten Menge K, und

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-c|=t} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{k+1}} d\xi$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

- Verallgemeinerung von Taylorreihe (siehe 2.12 auf Seite 6)

4.6 Partialbruchzerlegung

1. Polynomdivision, und die Funktion in der Form $\frac{z(x)}{n(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{n(x)}$ schreiben.
   - grad von r ist kleiner als grad von n
2. Den Rest $r(x)$ durch Partialbruchzerlegung vereinfachen, dazu $n(x)$ in Linearfaktoren zerlegen. Dazu die Nullstellen $p_1, \ldots, p_k$ mit den Vielfachheiten $h_1, \ldots, h_k$

   $$n(x) = a \cdot (x - p_1)^{h_1} \cdot \ldots \cdot (x - p_k)^{h_k}$$

3. Nun die Gleichung Ansatz für Partialbruchzerlegung aufstellen

   $$\frac{r(x)}{n(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-p_1)^1} \ldots + \frac{A_{i,1}}{(x-p_i)^1} + \ldots + \frac{A_{k,h_i}}{(x-p_i)^{h_i}} + \ldots + \frac{A_{k,h_k}}{(x-p_k)^{h_k}}$$

   - Falls ein Nullstelle des Nennerpolynoms $h_i > 1$ mal vorkommt, muss man sie mehrfach als Nenner verwenden, in den Potenzen 1 bis h_i.
4. Hauptnenner des Partialbruchs bilden und auf einen Nenner (dies ist dann ja genau $n(x)$) bringen.
5. Für x der Reihe nach p_1 bis p_k einsetzen. So erhält man k Bestimmungsgleichunen für die n Unbekannten $A_{i,j}$
6. Fertig!!

- Mit Partialbruchzerlegung lassen sich alle Gleichungen zur Summe über geometrischen Reihen oder ähnlichem Umformen

4.7 Singularität

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $c \in \Omega$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{c\})$. Wir sagen dann hat f eine *isolierte Singularität* in c.

Ist $K_{0,s}(c) = B_s(c) \setminus \{0\} \subseteq \Omega$ so haben wir auf diesem Kreisring eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - c)^k$$

1. c heißt *hebbare Singularität* wenn $a_k = 0$ für alle $k < 0$
   - mit $f(c) = a_0$
   - f ist in c analytisch fortsetzbar
2. c heißt *Pol (-stelle)* falls es ein $k < 0$ gibt mit $a_k \neq 0$ und $a_k = 0$ für fast alle $k < 0$.
   - Wenn c ein Pol, dann heißt $p_c(f) = \max\{k > 0 | a_{-k} \neq 0\}$ *Polstellenordnung* von c.
3. c heißt *wesentliche Singularität* wenn c weder Pol noch hebbar, d.h. es existieren unendlich viele $a_k \neq 0$ mit $k < 0$.

4.8 hebbare Singularität und Beschränktheit

Sei $c \in \Omega$ Singularität von $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{c\})$. Dann gilt: c ist hebbare Singularität genau dann, wenn es $t > 0$ gibt, so dass f auf $K_{0,t}(c)$ beschränkt ist.

- Dann hat f holomorphe Fortsetzung in Punkt c

4.9 Grenzwert und Pol

Sei $c \in \Omega$ Singularität von $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{c\})$. Dann ist c Pol von f genau dann, wenn gilt

$$\lim_{z \to c} |f(z)| = \infty$$

4.10 Satz von Casorati-Weierstrass

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $c \in \Omega$, $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{c\})$. Dann hat f eine wesentliche Singularität in c genau dann, wenn es zu jedem $\omega \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Ω gibt mit $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = \omega$ und $\lim_{n \to \infty} z_n = c$. Man sagt auch, die Werte von f nach c liegen dicht in $\mathbb{C}$.

4.11 Singularität in ∞

Ist $f \in \mathcal{O}(K_{r,\infty}(0))$ so sagt man, ∞ ist isolierte Singularität von f.

1. ∞ ist hebbare Singularität von $f \Leftrightarrow 0$ hebbare Singularität von $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$
2. ∞ ist Pol von $f \Leftrightarrow 0$ Pol von $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$
3. ∞ ist wesentliche Singularität von $f \Leftrightarrow 0$ wesentliche Singularität von $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$

4.12 diskret

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *diskret*, wenn es zu jedem $d \in D$ eine $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $B_\varepsilon(d) \cap D = \{d\}$.

- Die Vereinigung abgeschlossener diskreter Mengen ist wieder diskret
- D hat keine Häufungspunkte

4.13 meromorph

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $D \subseteq \Omega$ sei abgeschlossen (in Ω) und diskret.

Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash D)$ heißt *meromorph*, wenn alle Punkte in D hebbare Singularitäten oder Pole sind (wesentliche Singularitäten sind nicht erlaubt).

Setze $P(f) = \{d \in D | f \text{ hat Pol in } d\}$.

Es sei

$$\begin{aligned} M(\Omega) = \{f | f & \text{ meromorph auf } \Omega \\ & \text{für irgendeine abgeschlossene diskrete} \\ & \text{Menge } D \subseteq \Omega\} \end{aligned}$$

4.14 Kombination von meromorphen Funktionen

Sind f, g meromorph auf Ω, so auch $f + g$ und $f \cdot g$. Ist g nicht die Nullfunktion, d.h. $g \neq [z \mapsto 0]$, so ist $\frac{1}{g}$ meromorph.

4.15 Körper der meromorphen Funktionen

$M(\Omega)$ ist ein Körper. Dabei muss man meromorphe Funktionen $f, \tilde{f} \in M(\Omega)$ als gleich betrachten, falls $P(f) = P\left(\tilde{f}\right)$ und falls f und $\tilde{f}$ die gleichen holomorphen Fortsetzungen auf $\Omega \backslash P(f)$ haben.

Fasst man $c \in \mathbb{C}$ als konstante Funktion $z \mapsto c$ auf, hat man Inklusionen $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{O}(\Omega) \subseteq M(\Omega)$. $\mathbb{C}$ und $M(\Omega)$ sind Körper, $\mathcal{O}(\Omega)$ ist Ring.

$M(\Omega)$ heißt Funktionenkörper (Körper der meromorphen Funktionen auf Ω).

- Jede meromorphe Funktion ist Quotient holomporpher Funktionen, d.h. $M(\Omega)$ ist Quotientenkörper des Ringes $\mathcal{O}(\Omega)$.

4.16 Riemannsphäre

Die *Riemannsphäre* ist $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Man definiert $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert gegen $\infty \Leftrightarrow$ zu jedem $R > 0$ gibt es $l \in \mathbb{N}$, so dass $|z_n| \geq R$ für alle $n \geq l$.

Ist $f \in M(\Omega)$, $d \in P(f)$, definiere $f(d) = \infty$, dann ist $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ stetig.

5 Residuen

5.1 Residuum

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $c \in \Omega$, $f \in \mathcal{O}(\Omega\setminus\{c\})$. Sei $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-c)^k$ Laurententwicklung von f auf $K_{0,s}(c) \subseteq \Omega$. Das *Residuum* von f in c ist

$$\mathrm{Res}_c(f) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-c|=t} f(\xi)\,d\xi$$

für $0 < t < s$.

- Ist c eine hebbare Singularität von f, so gilt $\mathrm{Res}_c(f) = 0$

5.2 Stammfunktion

$\mathrm{Res}_c(f) = a$ ist die bestimmte komplexe Zahl a, für die gilt

$$z \mapsto f(z) - \frac{a}{z-c} \in \mathcal{O}(K_{0,s}(c))$$

hat eine Stammfunktion.

5.3 Pol 1-ter Ordung

Hat f Pol 1-ter Ordnung in c, so gilt

$$\mathrm{Res}_c(f) = \lim_{z\to c}(z-c)\cdot f(z)$$

5.4 Bruch

Sind $f, g \in \mathcal{O}(B_r(c))$ mit $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$ und $g'(c) \neq 0$, so hat $\frac{f}{g}$ Pol. 1. Ordung in c, und

$$\mathrm{Res}_c\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(c)}{g'(c)}$$

5.5 Pol m-ter Ordnung

Hat $f : \Omega \to \mathbb{C}$ Pol höchstens m-ter Ordnung in c, ist

$$g(z) = (z-c)^m f(z)$$

holomorphe Fortsetzung, so gilt

$$\mathrm{Res}_c(f) = \frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(c)$$

- f hat Pol höchstens m-ter Ordung in $c \Leftrightarrow (z-c)^m f(z)$ hat holomorphe Fortsetzung in $z = c$

5.6 Polstellenordnung / Polstellenmenge

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Mit $p_c(f)$ wird die *Polstellenordnung* bezeichent. $p_c(f)$ ist das kleinste m für das $(z-c)^m f(z)$ holomorph fortsetzbar ist.

Mit $P(f)$ wird die *Menge alle Polstellen* auf Ω bezeichnet.

5.7 Windungszahl / Index

Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ s.s.d. Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Für $c \in \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ setze

$$\mathrm{Ind}_\gamma(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi-c}d\xi \in \mathbb{Z}$$

die *Windungszahl* oder den *Index* von c bezüglich γ.

5.8 logarithmische Ableitung

Ist $l \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine Umkehrfunktion für exp (d.h. $\exp\circ l = \mathrm{id}_\Omega$) und ist $\Omega_1 \to \Omega$ holomorph auf $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}$, $h(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega_1$, so gilt

$$(l\circ h)' = \frac{h'}{h}$$

Man nennt $\frac{h'}{h}$ *logarithmische Ableitung* von h.

5.9 Innere

Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ s.s.d. geschlossen ($\gamma(a) = \gamma(b)$), so ist das *Innere* von γ

$$\mathrm{Inn}(\gamma) = \{c \in \mathbb{C} | \mathrm{Ind}_\gamma(c) \neq 0\}$$

Ist $\mathrm{Ind}_\gamma(c) \in \{0,1\}$ für alle $c \in \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ so heißt γ *einfach geschlossener Weg*.

5.10 Null-homolog

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ s.s.d. geschlossen. Falls $\int_\gamma f(\xi)\,d\xi = 0$ für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so heißt γ *Null-homolog* in Ω.

- Null-homotope Wege sind stets null homolog

5.11 Residuensatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ nullhomolog in Ω, $D \subseteq \Omega$ sei endliche Menge mit $D \cap \gamma([a,b]) = \emptyset$. Für jedes $f \in \mathcal{O}(\Omega\setminus D)$ gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{d\in D}\mathrm{Res}_d(f)\cdot\mathrm{Ind}_\gamma(d)$$

5.12 Eigenschaften des Indexes

Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ s.s.d. und geschlossen. Sei $U = \mathbb{C} \backslash \gamma([a,b])$.

Dann ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und

$$z \mapsto \operatorname{Ind}_\gamma(z)$$

ist *stetig* auf U. Außerdem ist sie lokal konstant auf $M \subseteq U$.

Die Menge $\operatorname{Inn}(\gamma)$ ist offen und beschränkt, und

$$\operatorname{Ext}(\gamma) = \{z \in U | \operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0\}$$

ist offen und unbeschränkt.

- Eine Funktion f ist *lokal konstant* auf U genau dann, wenn es zu jedem $z \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f auf $B_\varepsilon(z)$ konstant ist.

5.13 Nullstellenordung

Die *Nullstellenordnung* einer holomorphen Funktion f in $c \in \Omega$ ist die größte Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die die Funktion

$$z \mapsto (z-c)^{-n} f(z)$$

eine holomorphe Fortsetzung in c hat. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$ die Taylorreihe um c, so gilt

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0 \quad a_n \neq 0$$

falls die Nullstellenordnung n ist.

Schreibe

$$n_c(f) = n$$

- $n = 0 \Leftrightarrow$ keine Nullstelle in c
- n ist die *algebraische Vielfachheit* der Nullstelle c

5.14 Nullstellenmenge

Ist $f \in M(\Omega)$, so ist

$$N(f) = \{c \in \Omega | f(c) = 0 \text{ oder } f \text{ hat holomorphe Fortsetzung in } c \text{ mit } f(c) = 0\}$$

die *Nullstellenmenge* von f.

5.15 Residuumberechnung

Sind $g, h \in \mathcal{O}(\Omega)$, $n_c(g) \geq 1$ für $c \in \Omega$, so gilt

$$\operatorname{Res}_c\left(h \cdot \frac{g'}{g}\right) = +n_c(g) \cdot h(c)$$

Ist $h \in \mathcal{O}(\Omega), g \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{c\})$ mit Pol n-ter Ordnung in c, so gilt

$$\operatorname{Res}_c\left(h \frac{g'}{g}\right) = -p_c(g) \cdot h(c)$$

5.16 Integration von meromorphen Funktionen 1

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in M(\Omega)$ und $D = N(f) \cup P(f)$ sei *endlich*. Ist $\gamma : [a,b] \to \Omega$ nullhomolog in Ω und gilt $D \cap \gamma([a,b]) = \emptyset$, und ist $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(\xi) \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi \quad &= \sum_{c \in N(f)} n_c(f) \operatorname{Ind}_\gamma(c) g(c) \\ &- \sum_{c \in P(f)} p_c(f) \operatorname{Ind}_\gamma(c) g(c) \end{aligned}$$

5.17 Integration von meromorphen Funktionen 2

Ist Ω Gebiet, $D = P(f) \cup N(f)$ endlich, $f \in M(\Omega)$. γ sei nullhomolog in Ω *und* einfach geschlossen mit $D \subseteq \operatorname{Inn}(\gamma)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \sum_{c \in N(f)} n_c(f) - \sum_{c \in P(f)} p_c(f)$$

5.18 Satz von Rouche

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ sei nullhomolog in Ω und einfach geschlossen. Weiter seien $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $N(g) \cup N(f) \subseteq \operatorname{Inn}(\gamma)$ endlich.

Falls gilt

$$|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| < |g(\gamma(t))|$$

für alle $t \in [a,b]$ so gilt

$$\sum_{c \in N(f)} n_c(f) = \sum_{c \in N(g)} n_c(g)$$

- Summe der alg. Vielfachheiten ist gleich (die Funktionen haben gleichviele Nullstellen).

5.19 Berechnung trigonometrischer Integrale

Sei $R(u,v)$ komplexe rationale Funktion in zwei (komplexen) Variablen. Wir nehmen an, dass R auf der Menge

$$\{(\cos(t), \sin(t)) | t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

definiert und stetig ist. Setze

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt = 2\pi \cdot \sum_{|z|<1} \operatorname{Res}_z\left(\tilde{R}\right)$$

5.20 Berechnung uneigentlicher Integrale

Gegeben sei das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(t)\,dt + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(t)\,dt$$

Sei

$$H = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) \geq 0\}$$

die abgeschlossene obere Halbebene, sei $D \subseteq H \backslash \mathbb{R}$ endlich, für alle $d \in D$ gelte $\Im(d) > 0$. Weiter sei $\Omega \supseteq H$ Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash D)$. Falls gilt

$$\lim_{z\to\infty} z \cdot f(z) = 0$$

und falls die Integrale $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ und $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ existieren, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{z\in D} \mathrm{Res}_z(f)$$

Index