

Formelsammlung

Analysis III - gewöhnliche Differentialgleichungen für Physiker und Mathematiker

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 18.02.2006 - Version: 1.0.0

ERHÄLTlich UNTER [HTTP://PRIVAT.MACROLAB.DE](http://privat.macrolab.de)

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung "Analysis III - gewöhnliche Differentialgleichungen" von Prof. Dr. Linus Kramer an der Technischen Universität Darmstadt im Wintersemester 2005/06.

Die folgende Formelsammlung steht zum kostenlosen Download zur Verfügung. Das Urheberrecht und sonstige Rechte an dem Text verbleiben beim Verfasser, der keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit der Inhalte übernehmen kann.

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorfelder und Flüsse	1
1.1	Vektorfeld, Integralkurve	1
1.2	(lokaler) Fluss	2
1.3	Existenz und Eindeutigkeit	2
1.4	Picard-Lindelöf-Iteration	2
1.5	eindeutige Fortsetzbarkeit der Integral- kurven	2
1.6	lokal Lipschitz-stetig	2
1.7	Eindeutigkeit des lokalen Flusses	2
1.8	maximale Integralkurve	3
1.9	globaler Fluss	3
1.10	1-Parametergruppe von Abbildungen	3
1.11	Exponentialfunktion	3
1.11.1	Blockdiagonalmatrizen	3
1.11.2	Basiswechsel	3
1.11.3	Jordanblock	4
1.11.4	Jordan-Normalform	4
1.11.5	Nilpotent	4
1.11.6	Exp und Jordan-Block	4
1.12	Lineares Vektorfeld	4
1.13	stetiges Vektorfeld	4
1.14	Eigenschaften von Lösungen	4

1.15	Variation	4
1.15.1	Zeitabhängige Vektorfelder	4
1.15.2	Parameterabhängiges Vektorfeld	5
1.15.3	Vektorfelder höherer Ordnung	5
1.15.4	Anderer Startpunkt	5
1.16	Differentialgleichung mit getrennten Va- riablen	5
2	Lineare Differentialgleichungen	5
2.1	homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	5
2.2	Linear und Zeitabhängig	6
2.3	Inhomogene DGL	6
2.4	Lösungsraum von homogenen DGL - Lö- sungsfundamentalsystem	6
2.5	Lösungsraum der inhomogenen linearen DGL	6
2.6	Allgemeine Lösung der inhomogenen li- nearen DGL	6
2.7	Variation der Konstanten	7
2.8	Äquivalenzen für linearen DGL	7
2.9	Wronski-Determinante	7

1 Vektorfelder und Flüsse

1.1 Vektorfeld, Integralkurve

Sei E ein Banachraum, $U \subseteq E$ sei offen. Ein *Vektorfeld* (VF) ξ ist eine Abbildung

$$\xi : U \rightarrow E$$

Ist ξ stetig / differenzierbar, so heißt ξ stetiges- / differenzierbares Vektorfeld.

Ist $c : (a, b) \rightarrow U$ eine Kurve in U (stetig differenzierbar) und gilt $\xi(c(t)) = \dot{c}(t)$, so heißt c *Integralkurve* zum Vektorfeld ξ .

- Wir veranschaulichen ξ , indem wir am Punkt $u \in U$ den Vektor $\xi(u)$ abtragen.
- “Physikalische” Interpretation: Eine Flüssigkeit strömt durch U . Für $u \in U$ gibt $\xi(u)$ die Strömungsrichtung und Geschwindigkeit an. Eine Integralkurve beschreibt ein Teilchen in der Strömung.
- Beachte: Die Bedingung $\xi(c(t)) = \dot{c}(t)$ ist eine gewöhnliche DGL. Wir werden sehen, dass man *alle* gew. DGL so beschreiben kann.

1.2 (lokaler) Fluss

Sei E Banachraum, $U \subseteq E$ sei offen, $\xi : U \rightarrow E$ sei Vektorfeld. Sei $V \subseteq U$ offen, sei $r > 0$,

$$\varphi : (-r, r) \times V \rightarrow U$$

heißt (lokaler) Fluss zu ξ , falls für alle $v \in V$ gilt:

1. $\varphi(0, v) = v$
 2. $c_v(t) = \varphi(t, v)$ ist eine Integralkurve zu ξ .
- Der Fluss beschreibt also eine Schaar von Integralkurven. $\varphi(t, v)$ beschreibt ein Teilchen in der Strömung zum Zeitpunkt t , das zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $v \in V$ war.
 - Schreibe auch $\varphi_t(u) := \varphi(t, u)$
 - φ ist stetig in beiden Argumenten

1.3 Existenz und Eindeutigkeit

Sei E ein Banachraum, $U \subseteq E$ offen, $\xi : U \rightarrow E$ L -Lipschitzstetiges Vektorfeld. Sei $u \in U$.

Dann gibt es $r, s > 0$ und einen lokalen Fluss $\varphi : (-r, r) \times B_s(u) \rightarrow U$. Der Fluss ist eindeutig bestimmt auf $(-r, r) \times B_s(u)$.

Insbesondere ist φ Lipschitzstetig.

1.4 Picard-Lindelöf-Iteration

Sei E ein Banachraum, $U \subseteq E$ offen, $\xi : U \rightarrow E$ L -Lipschitzstetiges Vektorfeld. Sei $u \in U$. Wähle $s > 0$ so, dass

$$D = \overline{B_{2s}(u)} = \{x \in E \mid \|x - u\| \leq 2s\} \subseteq U$$

und $r > 0$ mit $r < \min\left\{\frac{s}{2L \cdot s + \|\xi(u)\|}, \frac{1}{L}\right\}$. Sei $X_w = \{c : [-r, r] \rightarrow D \mid c \text{ stetig, } c(0) = w\}$.

Die Funktion

$$S_w : X_w \rightarrow X_w \\ [t \mapsto c(t)] \mapsto \left[t \mapsto w + \int_0^t \xi(c(x)) dx \right]$$

ist K -Lipschitzstetig mit $K < 1$, hat also genau einen Fixpunkt $c_w \in X_w$.

$$c_w(t) = \varphi(t, w)$$

ist der lokale Fluss auf $(-r, r) \times B_s(u)$.

c_w lässt sich iterativ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} c_0(t) &= w \\ c_{n+1} &= S_w(c_n) \\ c_{n+1}(t) &= w + \int_0^t \xi(c_n(x)) dx \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= c_w \end{aligned}$$

- $c_w(t)$ ist stetig

1.5 eindeutige Fortsetzbarkeit der Integralkurven

Sei E Banachraum, $U \subseteq E$ offen. Sei $\xi : U \rightarrow E$ ein Lipschitzstetiges Vektorfeld. Seien $a_1, a_2 < 0 < b_1, b_2$ und $c_i : (a_i, b_i) \rightarrow U$ Integralkurven ($i = 1, 2$) mit $c_1(0) = c_2(0) = v$ gegeben.

Dann gilt $c_1(t) = c_2(t)$ für alle $t \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$.

1.6 lokal Lipschitz-stetig

Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir sagen f ist lokal Lipschitz-stetig, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $r > 0$ gibt, sodass die Einschränkung $f|_{B_r(x)}$ Lipschitz-stetig ist.

Sind E, F Banachräume, $U \subseteq E$ offen, $f : U \rightarrow E$ stetig differenzierbar. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig.

- Lipschitz-stetig \Rightarrow lokal Lipschitz-stetig \Rightarrow stetig
- lokal Lipschitz-stetig \Rightarrow stetige Differenzierbarkeit
- lokal Lipschitz-stetig \approx stetige Differenzierbarkeit da lokal Lipschitz-stetige Funktionen schon in sehr vielen Punkten stetig differenzierbar sind
- C^1 -Funktionen sind lokal Lipschitzstetig

1.7 Eindeutigkeit des lokalen Flusses

Sei E Banachraum, $U \subseteq E$ offen, $\xi : U \rightarrow E$ lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Sei $u \in U$, dann gibt es $r, s > 0$ und einen lokalen Fluss $\varphi : (-r, r) \times B_s(u) \rightarrow U$.

Auf diesem Definitionsbereich ist φ eindeutig bestimmt.

1.8 maximale Integralkurve

Sei E Banachraum, $U \subseteq E$ offen, $\xi : U \rightarrow E$ lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Sei $u \in U$, dann gibt es $r, s > 0$ und einen lokalen Fluss $\varphi : (-r, r) \times B_s(u) \rightarrow U$.

Für $u \in U$ setze

$$J_u = \bigcup \{(a, b) \in \mathbb{R} \mid a < 0 < b, c : (a, b) \rightarrow U \text{ ist Integralkurve mit } c(0) = u\}$$

Dann gibt es genau eine Integralkurve $c_u : J_u \rightarrow U$ mit $c_u(0) = u$.

- J_u ist also ein offenes Intervall

1.9 globaler Fluss

Sei E Banachraum, $U \subseteq E$ offen, $\xi : U \rightarrow E$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ definiert als

$$\Omega = \{(s, v) \mid s \in J_v\}$$

und $\varphi : \Omega \rightarrow U$, $\varphi(t, u) = c_u(t)$.

Man nennt φ den (*globalen*) Fluss von ξ , und Ω seinen Definitionsbereich.

Für jedes $(s, u) \in \Omega$ gilt

$$J_{\varphi(s, u)} = \{t - s \mid t \in J_u\} = J_u - s$$

weiter gilt

$$\varphi(s, \varphi(t, u)) = \varphi(s + t, u) = \varphi(t, \varphi(s, u))$$

wo das definiert ist. Schreibe kurz

$$\varphi_s(u) := \varphi(s, u)$$

$$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t} = \varphi_t \circ \varphi_s$$

- Ω ist der maximale Definitionsbereich für φ

1.10 1-Parametergruppe von Abbildungen

Ist $\Omega = \mathbb{R} \times U$ (d.h. c_u ist auf \mathbb{R} definiert für alle $u \in U$)

- $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$
- $\varphi_s^{-1} = \varphi_{-s}$
- $\varphi_0 = \text{id}$

Man spricht hier auch von einer *1-Parametergruppe von Abbildungen*.

$$s \mapsto \varphi_s$$

ist der entsprechende Gruppenhomomorphismus.

- selbst bei $E = U = \mathbb{R}$ gilt im Allgemeinen *nicht* $J_u = \mathbb{R}$

1.11 Exponentialfunktion

Sei $U = E$ Banachraum z.B. $E = \mathbb{R}^n$ $T : E \rightarrow E$ linear und stetig ($T \in \mathcal{L}(E, E)$).

$$\exp(T) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k$$

- $\frac{d}{dt} \exp(t \cdot T) = T \cdot \exp(t \cdot T) = \exp(t \cdot T) \cdot T$
- $\exp((t + s) \cdot T) = \exp(t \cdot T) \cdot \exp(s \cdot T)$
- Falls $X \cdot Y = Y \cdot X$ gilt $\exp(X + Y) = \exp(X) \cdot \exp(Y)$
- $\exp(0 \cdot T) = \text{id}$
- $(\exp(T))^{-1} = \exp(-T)$
- $\exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & t \cdot r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^t & e^t \cdot t \cdot r \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$
- Drehmatrix

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.11.1 Blockdiagonalmatrizen

Ist A eine *Blockdiagonalmatrix*, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_r \end{pmatrix}$$

mit A_1, \dots, A_r ebenfalls Matrizen. Dann gilt

$$\exp(t \cdot A) = \begin{pmatrix} \exp(t \cdot A_1) & & 0 \\ & \exp(t \cdot A_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \exp(t \cdot A_r) \end{pmatrix}$$

- Dies ist für Diagonalmatrizen bereits eine geschlossene Lösungsformel
- gilt ebenso für komplexe Matrizen

1.11.2 Basiswechsel

Ist $A \in \mathcal{L}(E)$ und ist $R \in \mathcal{L}$ invertierbar (d.h. $R \in GL(E)$), so gilt

$$\exp(RAR^{-1}) = R \exp(A) R^{-1}$$

- gilt ebenso für komplexe Matrizen

1.11.3 Jordanblock

Eine komplexe $k \times k$ -Matrix der Form

$$J_k(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \mathbb{C}$, heißt *Jordan-Block* der Größe k zum Eigenwert α .

1.11.4 Jordan-Normalform

Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so gibt es $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$, R invertierbar, so dass gilt

$$RAR^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

ist Blockdiagonal und $A_j = J_{m_j}(\alpha_j)$ ist Jordanblock. RAR^{-1} nennt sich die *Jordan-Normalform* von A .

1.11.5 Nilpotent

Eine Matrix $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *nilpotent*, falls $N^m = 0$ gilt für ein $m \in \mathbb{N}$.

Ist $N, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, N nilpotent mit $N^m = 0$ und gilt $AN = NA$, so gilt

$$1. \exp(t \cdot N) = 1 + t \cdot N + \frac{1}{2}t^2 N^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!} N^{m-1}$$

$$2. \exp(t(N+A)) = \exp(t \cdot N) \exp(t \cdot A) = \exp(t \cdot A) \exp(t \cdot N)$$

- Gilt $XY = YX$ für $X, Y \in \mathcal{L}(E)$, so gilt $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$

1.11.6 Exp und Jordan-Block

Setze

$$E_{n,k} = \begin{pmatrix} & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

$$(E_{n,k})_{i,j} = \begin{cases} 1 & i-j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hiermit lässt sich ein Jordan Block schreiben als

$$J_n(\alpha) = \alpha \cdot 1 + E_{n,1}$$

Hiermit gilt nun

$$\exp(t \cdot J_n(\alpha)) = e^{\alpha t} \left(1 + tE_{n,1} + \frac{t^2}{2}E_{n,2} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}E_{n,n-1} \right)$$

- $E_{n,k} = 0$ für $k \geq n$

- $E_{n,0} = 1$

- $E_{n,k} \cdot E_{n,l} = E_{n,k+l}$

- $E_{n,1}^n = 0$

- $\alpha 1 \cdot E_{n,1} = E_{n,1} \alpha 1$

1.12 Lineares Vektorfeld

Wir betrachten das Vektorfeld ξ auf $F = U = \mathcal{L}(E, E) \times \mathcal{L}(E, E)$ und

$$\xi(S, T) = (S \cdot T, 0)$$

das heißt die zugehörige DGL hat folgende Gestalt

$$\left(\dot{S}(t), \dot{T}(t) \right) = (S(t) \cdot T(t), 0)$$

Die Lösung für s lautet

$$T(t) = T_0$$

$$S(t) = S_0 \cdot \exp(t \cdot T_0)$$

1.13 stetiges Vektorfeld

Sei $U \subseteq E$ offen, E Banachraum, $\xi : U \rightarrow E$ ein C^k -Vektorfeld, $k \geq 1$. Dann gibt es zu jedem $u \in U$ $a, b > 0$ so, dass $\varphi : (-a, a) \times B_b(u) \rightarrow U$ k -mal stetig differenzierbar (als Funktion in allen Variablen).

1.14 Eigenschaften von Lösungen

Sei E Banachraum, $U \subseteq E$ offen, $\xi : U \rightarrow E$ (lokal) Lipschitz-stetig bzw. C^k -Funktion, $k \geq 1$. Dann ist $\Omega = \{(t, u) \mid t \in J_u\} \subseteq \mathbb{R} \times U$ offen und $\varphi : \Omega \rightarrow U$ ist stetig, bzw. C^k -Funktion auf ganz Ω .

1.15 Variation

1.15.1 Zeitabhängige Vektorfelder

Gegeben E Banachraum, $U \subseteq E \times \mathbb{R}$ offen

$$\begin{aligned} \xi : U &\rightarrow E \\ (x, t) &\mapsto \xi(x, t) \end{aligned}$$

Gesucht ist Integralkurve $c_v : I \rightarrow E$ mit $\dot{c}_v(t) = \xi(c_v(t), t)$ und $c_v(0) = v$.

Sei $\tilde{\xi} : U \rightarrow U$, $\tilde{\xi}(v, t) \mapsto (\xi(v, t), 1)$ und $\tilde{v} = (v, 0)$ mit der Integralkurve $\tilde{c}_{\tilde{v}}(t) = (\mathbf{c}_v(t), t)$.

- Löse also Ersatzkurve $\tilde{\xi}$ und nehme erste Komponente $\mathbf{c}_v(t)$ als Lösung für ursprüngliches Problem

1.15.2 Parameterabhängiges Vektorfeld

Sei E, F Banachräume, $U \subseteq E \times F$ offen. Eine Abbildung $\xi : U \rightarrow E$, $(x, y) \mapsto \xi(x, y)$ heißt parameterabhängiges Vektorfeld. Gesucht ist Integralkurve $c_v : I \rightarrow E$ mit $\dot{c}_v(t) = \xi(c_v(t), w)$ und $c_v(0) = v$.

Sei $\tilde{\xi} : U \rightarrow U$, $\tilde{\xi}(x, y) \mapsto (\xi(x, y), 0)$ und $\tilde{v} = (v, w)$ mit der Integralkurve $\tilde{c}_{\tilde{v}}(t) = (\mathbf{c}_v(t), w)$.

- Löse also Ersatzkurve $\tilde{\xi}$ und nehme erste Komponente $\mathbf{c}_v(t)$ als Lösung für ursprüngliches Problem

1.15.3 Vektorfelder höherer Ordnung

Sei E Banachraum, $U \subseteq E^n = E \times \dots \times E$ offen. Sei $\xi : U \rightarrow E$ mit der gesuchten Integralkurve

$$\begin{aligned} c_v^{(n)}(t) &= \xi(c_v(t), \dot{c}_v(t), \ddot{c}_v(t), \dots, c_v^{(n-1)}(t)) \\ c_v^{(k)}(0) &= v_k \text{ für } k = 0, \dots, n-1 \\ v &= (v_0, \dots, v_{n-1}) \end{aligned}$$

Betrachte das Vektorfeld

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} : U &\rightarrow U \\ (x_0, \dots, x_{n-1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \xi(x_0, \dots, x_{n-1})) \end{aligned}$$

Dies hat die Integralkurve

$$\tilde{c}_v(t) = (\mathbf{c}_v(t), c_1(t), \dots, c_{n-1}(t))$$

- Löse also Ersatzkurve $\tilde{\xi}$ und nehme erste Komponente $\mathbf{c}_v(t)$ als Lösung für ursprüngliches Problem
- Ist $\xi(x_1, \dots, x_n) = a_0x_1 + a_1x_2 + \dots + a_{n-1}x_n$, $E = \mathbb{R}$. Es gilt

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} c(t)$$

1.15.4 Anderer Startpunkt

Ist c_k eine Integralkurve zu ξ mit $c_v(0) = v$, so ist

$$c_{v,t_0}(t) = c_v(t - t_0)$$

eine Integralkurve mit $c_{v,t_0}(t_0) = v$.

- Also erst Lösen mit Startzeitpunkt 0 und dann t mit $t - t_0$ substituieren

1.16 Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Sei

$$y' = f(t)g(y)$$

eine DGL mit $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in I$.

Ansatz

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(s) ds \\ H(y) &= \int_{y_0}^y \frac{1}{g(\omega)} d\omega \end{aligned}$$

Dann gilt für die Lösung $y(t)$ zum Anfangswert $y(0) = y_0$, dass

$$H(y(t)) = F(t)$$

- Falls $H(t)$ invertierbar, gilt

$$y(t) = H^{-1}(F(t))$$

- Als Merksregel lässt sich dies wie folgt festhalten:

1. $y' = \frac{dy}{dt} = f(t)g(y)$
2. $\frac{1}{g(y)}dy = f(t)dt$
3. $\int_{y_0}^y \frac{1}{g(\tilde{y})}d\tilde{y} = \int_{t_0}^t f(\tilde{t})d\tilde{t}$
4. Integrale lösen
5. nach y freistellen
6. *Probe!!*

- Bei $y' = f\left(\frac{y}{t+a}\right)$ mit $z = \frac{y}{t+a}$ substituieren

2 Lineare Differentialgleichungen

Betrachte folgende Situation: E Banachraum

$$\mathcal{L}(E) : \{T : E \rightarrow E | T \text{ linear und stetig}\}$$

$\mathcal{L}(E)$ ist Banachraum bzgl. Operatornorm und $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ (Raum der $n \times n$ Matrizen).

2.1 homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in \mathcal{L}(E)$, betrachte die DGL

$$y' = Ay$$

Diese DGL heißt *homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten*.

Das zugehörige Vektorfeld ξ auf E ist $\xi(u) = Au$. Beachte: ξ ist C^∞ -Funktion, das Gleiche gilt also für den Fluss φ . Es gilt

$$\varphi_t(u) = \exp(t \cdot A)u$$

auf $\Omega = \mathbb{R} \times E$.

- mit $E = \mathbb{R}^n$, $A = \mathbb{R}^{n \times n}$ Matrix. Die DGL $y' = Ay$ mit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat die Lösung

$$y = \exp(t \cdot A) \cdot y_0$$

- Falls es zu auswändig ist, die Jordan Basis zu bestimmen, einfach nur die Jordan Matrix berechnen, und prüfen, ob die Elemente der Matrix mögliche Lösungen sind. Sobald n unterschiedliche Lösungen gefunden wurden, hat man den kompletten Lösungsraum der DGL abgedeckt.

2.2 Linear und Zeitabhängig

Sei E Banachraum, $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall mit $0 \in J$, $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig. Betrachte die DGL

$$\dot{c}(t) = \alpha(t) \cdot A(t) \cdot c(t)$$

für festes $A \in \mathcal{L}(E)$. Die Lösung auf dem Lösungsintervall J lautet

$$c(t) = \exp\left(\left(\int_0^t \alpha(s) ds\right) \cdot A\right) \cdot c(0)$$

2.3 Inhomogene DGL

Sei E Banachraum, $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall mit $0 \in J$. Seien $A: J \rightarrow \mathcal{L}(E)$ und $b: J \rightarrow E$ stetig. Die DGL

$$\dot{c}(t) = A \cdot c(t) + b(t)$$

heißt *inhomogene lineare Differentialgleichung*. Das Lösungsintervall ist ganz J .

2.4 Lösungsraum von homogenen DGL - Lösungsfundamentalsystem

Sei $A: J \rightarrow \mathcal{L}(E)$ stetig, E Banachraum. Angenommen $c_u: J \rightarrow E$ und $c_v: J \rightarrow E$ sind Lösungen der DGL

$$\dot{c}(t) = A(t) c(t)$$

mit $c_u(0) = u$ und $c_v(0) = v$.

Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so ist

$$c(t) = a \cdot c_u(t) + b \cdot c_v(t)$$

wieder Lösung zum Anfangswert

$$a \cdot u + b \cdot v$$

Die Abbildung $u \mapsto c_u$, $E \rightarrow C^1(J, E)$ ist linear und injektiv. Das Bild dieser Abbildung $\{c_u | u \in E\}$ heißt *Lösungsraum* der lin. homogenen DGL. Insbesondere: ist $\dim E = n$, so ist der Lösungsraum n -dimensional. Ist b_1, \dots, b_n Basis von E so ist

$$c_u(t) = \sum_{k=1}^n a_k c_{b_k}(t)$$

die (eindeutige) Lösung zum Anfangswert

$$u = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Man nennt c_1, \dots, c_n dann auch *Lösungsfundamentalsystem* der homogenen lin. DGL $\dot{c} = Ac$.

- Der Real- und Imaginärteil einer Komplexen Lösung sind wieder reelle Lösungen
- Die Spalten von $\exp(t \cdot A)$ bilden ein Fundamentalsystem, unabhängig von der konkreten Basis von A

2.5 Lösungsraum der inhomogenen linearen DGL

Ist E Banachraum, $A: J \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $b: J \rightarrow E$ stetig, inhomogene lin. DGL

$$\dot{c} = Ac + b$$

Angenommen $c: J \rightarrow E$ ist eine Lösung der DGL $\dot{c}(t) = A(t)c(t) + b(t)$ und $e: J \rightarrow E$ ist Lösung der homogenen DGL

$$\dot{e}(t) = A(t)e(t)$$

Dann ist $t \mapsto (c + e)(t)$ eine Lösung der inhomogenen linearen DGL

$$\dot{(c + e)} = A(t)(c + e)(t) + b(t)$$

zum Anfangswert $e(0) + c(0)$.

2.6 Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL

Sei E Banachraum, $A: J \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $b: J \rightarrow E$ seien stetig auf offenes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in J$. Ist $e: J \rightarrow E$ eine Lösung der homogenen lin. DGL $\dot{e}(t) = A(t)e(t) + b(t)$, mit Anfangswert $e(0) = u \in E$, so erhalten wir alle weiteren Lösungen zu anderen Anfangswerten durch Addieren von Lösungen der homogenen linearen DGL $\dot{c} = Ac$.

Insbesondere $e(0) = 0$ und sind c_1, \dots, c_n Fundamentalsystem der homogenen DGL, so ist jede Lösung der inhomogenen DGL von der Art

$$c(t) = e(t) + \sum_{k=1}^n a_k c_k(t)$$

mit $c(0) = \sum_{k=1}^n a_k b_k$, wobei $b_k = c_k(0)$.

2.7 Variation der Konstanten

Betrachte DGL

$$\dot{c}(t) = A(t)c(t) + b(t)$$

umschreiben in zeitunabhängiges (homogenes) Vektorfeld $\tilde{\xi} : E \times J \rightarrow E \times \mathbb{R}$, $\tilde{\xi}(u, r) = (A(r)u, 1)$. Der zugehörige Fluss

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : J \times E \times J &\rightarrow E \times \mathbb{R} \\ \tilde{\varphi}_t(u, r) &= (\varphi_t(u, r), t + r) \end{aligned}$$

Setze $\Phi_t(u) = \varphi_t(u, 0)$, $\Phi : J \rightarrow \mathcal{L}(E)$, invertierbar.

Definiere die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t \Phi_s^{-1}b(s) ds \\ \dot{h}(t) &= \Phi_t^{-1}b(t) \\ h(0) &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz

$$e(t) = \Phi_t(h(t))$$

gilt

$$\begin{aligned} e(0) &= 0 \\ \dot{e}(t) &= A(t)e(t) + b(t) \end{aligned}$$

- Insegsamt ergibt dies

$$c_w(t) = Re^{t\tilde{A}} \left(\int_0^t e^{-t\tilde{A}} R^{-1}b(t) dt + R^{-1}w \right)$$

- Dieses e ist also die Gesuchte spezielle Lösung des inhomogenen Systems.
- Strategie zum Lösen der inhomogenen DGL $\dot{c} = Ac + b$:
 1. Löse homogene DGL, berechne Φ_t
 2. Finde spezielle Lösung der inhomogenen DGL z.B. durch Variation der Konstanten
 3. Erhalte allgemeine Lösung (alle Lösungen)
 4. aus 1. + 2.

2.8 Äquivalenzen für linearen DGL

Sei E Banachraum, $A : J \rightarrow \mathcal{L}(E)$ stetig. Sei $X \subseteq E$. Dann sind äquivalent:

1. X ist linear unabhängig
2. $\{c_u | u \in X\} \subseteq C(J, E)$ ist linear unabhängig
3. Für alle $t \in J$ ist $\{c_u(t) | u \in X\} \subseteq E$ linear unabhängig
4. Für ein $t \in J$ ist $\{c_u(t) | u \in X\} \subseteq E$ linear unabhängig

2.9 Wronski-Determinante

Betrachte die homogene lineare DGL n -ter Ordnung

$$y^{(n)}(t)a_n(t) + \dots + y'(t)a_1(t) + y(t)a_0(t) = 0$$

mit $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ und $a_n(t) \neq 0$ für alle $t \in J$.

Sind $y_1, \dots, y_n : J \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen dieser DGL, so gilt:

y_1, \dots, y_n ist linear unabhängig genau dann, wenn für ein $t \in J$ (und damit jedes $t \in J$) die *Wronski-Determinante*

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n+1)} & y_2^{(n+1)} & \dots & y_n^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

$\neq 0$ ist.

Index

Blockdiagonalmatrix, 3

Exponentialfunktion, 3

Fluss, 3

globaler Fluss, 3

inhomogene lineare Differentialgleichung, 6

Integralkurve, 1

Jordan-Block, 4

Jordan-Normalform, 4

Lösungsfundamentalsystem, 6

Lösungsraum, 6

lineare DGL, 5

nilpotent, 4

Parameterabhängiges Vektorfeld, 5

Picard-Lindelöf-Iteration, 2

Startpunkt, 5

Variation der Konstanten, 7

Vektorfeld, 1

Vektorfelder höherer Ordnung, 5

VF, 1

Zeitabhängige Vektorfelder, 4