Formelsammlung
Analysis III - gewöhnliche Differentialgleichungen
für Physiker und Mathematiker

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 18.02.2006 - Version: 1.0.0
ERHÄLTLICH UNTER HTTP://PRIVAT.MACROLAB.DE

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung "Analysis III - gewöhnliche Differentialgleichungen" von Prof. Dr. Linus Kramer an der Technischen Universität Darmstadt im Wintersemester 2005/06.

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorfelder und Flüsse 1
- 1.1 Vektorfeld, Integralkurve 1
- 1.2 (lokaler) Fluss 2
- 1.3 Existenz und Eindeutigkeit 2
- 1.4 Picard-Lindelöf-Iteration 2
- 1.5 eindeutige Fortsetzbarkeit der Integralkurven 2
- 1.6 lokal Lipschitz-stetig 2
- 1.7 Eindeutigkeit des lokalen Flusses 2
- 1.8 maximale Integralkurve 3
- 1.9 globaler Fluss 3
- 1.10 1-Parametergruppe von Abbildungen 3
- 1.11 Exponentialfunktion 3
  - 1.11.1 Blockdiagonalmatrizen 3
  - 1.11.2 Basiswechsel 3
  - 1.11.3 Jordanblock 4
  - 1.11.4 Jordan-Normalform 4
  - 1.11.5 Nilpotent 4
  - 1.11.6 Exp und Jordan-Block 4
- 1.12 Lineares Vektorfeld 4
- 1.13 stetiges Vektorfeld 4
- 1.14 Eigenschaften von Lösungen 4
- 1.15 Variation 4
  - 1.15.1 Zeitabhängige Vektorfelder 4
  - 1.15.2 Parameterabhängiges Vektorfeld 5
  - 1.15.3 Vektorfelder höherer Ordnung 5
  - 1.15.4 Anderer Startpunkt 5
- 1.16 Differentialgleichung mit getrennten Variablen 5

2 Lineare Differentialgleichungen 5
- 2.1 homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten 5
- 2.2 Linear und Zeitabhängig 6
- 2.3 Inhomogene DGL 6
- 2.4 Lösungsraum von homogenen DGL - Lösungsfundamentalsystem 6
- 2.5 Lösungsraum der inhomogenen linearen DGL 6
- 2.6 Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL 6
- 2.7 Variation der Konstanten 7
- 2.8 Äquivalenzen für linearen DGL 7
- 2.9 Wronski-Determinante 7

1 Vektorfelder und Flüsse

1.1 Vektorfeld, Integralkurve

Sei E ein Banachraum, $U \subseteq E$ sei offen. Ein *Vektorfeld* (VF) ξ ist eine Abbildung

$$\xi : U \to E$$

Ist ξ stetig / differenzierbar, so heißt ξ stetiges- / differenzierbares Vektorfeld.

Ist $c : (a, b) \to U$ eine Kurve in U (stetig differenzierbar) und gilt $\xi(c(t)) = \dot{c}(t)$, so heißt c *Integralkurve* zum Vektorfeld ξ.

- Wir veranschaulichen ξ, indem wir am Punkt $u \in U$ den Vektor $\xi(u)$ abtragen.
- "Physikalische" Interpretaton: Eine Flüssigkeit strömt durch U. Für $u \in U$ gibt $\xi(u)$ die Strömungsrichtung und Geschwindigkeit an. Eine Integralkurve beschreibt ein Teilchen in der Strömung.
- Beachte: Die Bedingung $\xi(c(t)) = \dot{c}(t)$ ist eine gewöhnliche DGL. Wir werden sehen, das man *alle* gew. DGL so beschreiben kann.

1.2 (lokaler) Fluss

Sei E Banachraum, $U \subseteq E$ sei offen, $\xi : U \to E$ sei Vektorfeld. Sei $V \subseteq U$ offen, sei $r > 0$,

$$\varphi : (-r, r) \times V \to U$$

heißt (lokaler) Fluss zu ξ, falls für alle $v \in V$ gilt:

1. $\varphi(0, v) = v$
2. $c_v(t) = \varphi(t, v)$ ist eine Integralkurve zu ξ.

- Der Fluss beschreibt also eine Schaar von Integralkurven. $\varphi(t, v)$ beschreibt ein Teilchen in der Strömung zum Zeitpunkt t, das zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $v \in V$ war.
- Schreibe auch $\varphi_t(u) := \varphi(t, u)$
- φ ist stetig in beiden Argumenten

1.3 Existenz und Eindeutigkeit

Sei E ein Banachraum, $U \subseteq E$ offen, $\xi : U \to E$ L-Lipschitzstetiges Vektorfeld. Sei $u \in U$.

Dann gibt es $r, s > 0$ und einen lokalen Fluss $\varphi : (-r, r) \times B_s(u) \to U$. Der Fluss ist eindeutig bestimmt auf $(-r, r) \times B_s(u)$.

Insbesondere ist φ Lipschitzstetig.

1.4 Picard-Lindelöf-Iteration

Sei E ein Banachraum, $U \subseteq E$ offen, $\xi : U \to E$ L-Lipschitzstetiges Vektorfeld. Sei $u \in U$. Wähle $s > 0$ so, dass

$$D = \overline{B_{2s}(u)} = \{x \in E | \, \|x - u\| \leq 2s\} \subseteq U$$

und $r > 0$ mit $r < \min\left\{\frac{s}{2L \cdot s + \|\xi(u)\|}, \frac{1}{L}\right\}$. Sei $X_w = \{c : [-r, r] \to D | c \text{ stetig}, \, c(0) = w\}$.

Die Funktion

$$\begin{aligned} S_w : X_w &\to X_w \\ [t \mapsto c(t)] &\mapsto \left[t \mapsto w + \int_o^t \xi(c(x)) \, dx\right] \end{aligned}$$

ist K-Lipschitzstetig mit $K < 1$, hat also genau einen Fixpunkt $c_w \in X_w$.

$$c_w(t) = \varphi(t, w)$$

ist der lokale Fluss auf $(-r, r) \times B_s(u)$.

c_w lässt sich iterativ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} c_o(t) &= w \\ c_{n+1} &= S_w(c_n) \\ c_{n+1}(t) &= w + \int_0^t \xi(c_n(x)) \, dx \\ \lim_{n \to \infty} c_n &= c_w \end{aligned}$$

- $c_w(t)$ ist stetig

1.5 eindeutige Fortsetzbarkeit der Integralkurven

Sei E Banachraum, $U \subseteq E$ offen. Sei $\xi : U \to E$ ein Lipschitzstetiges Vektorfeld. Seien $a_1, a_2 < 0 < b_1, b_2$ und $c_i : (a_i, b_i) \to U$ Integralkurven ($i = 1, 2$) mit $c_1(0) = c_2(0) = v$ gegeben.

Dann gilt $c_1(t) = c_2(t)$ für alle $t \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$.

1.6 lokal Lipschitz-stetig

Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir sagen f ist lokal Lipschitz-stetig, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $r > 0$ gibt, sodass die Einschränkung $f|_{B_r(x)}$ Lipschitz-stetig ist.

Sind E, F Banachräume, $U \subseteq E$ offen, $f : U \to E$ stetig differenzierbar. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig.

- Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ lokal Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ stetig
- lokal Lipschitz-stetig $\not\Rightarrow$ stetige Differenzierbarkeit
- lokal Lipschitz-stetig $\approx$ stetige Differenzierbarkeit da lokal Lipschitz-stetige Funktionen schon in sehr vielen Punkten stetig differenzierbar sind
- C^1-Funktionen sind lokal Lipschitzstetig

1.7 Eindeutigkeit des lokalen Flusses

Sei E Banachraum, $U \subseteq E$ offen, $\xi : U \to E$ lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Sei $u \in U$, dann gibt es $r, s > 0$ und einen lokalen Fluss $\varphi : (-r, r) \times B_s(u) \to U$.

Auf diesem Definitionsbereich ist φ eindeutig bestimmt.

1.8 maximale Integralkurve

Sei E Banachraum, $U \subseteq E$ offen, $\xi : U \to E$ lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Sei $u \in U$, dann gibt es $r, s > 0$ und einen lokalen Fluss $\varphi : (-r, r) \times B_s(u) \to U$.

Für $u \in U$ setze

$$J_u = \bigcup \{(a,b) \in \mathbb{R} | a < 0 < b,\ c : (a,b) \to U \text{ ist Integralkurve mit } c(0) = u\}$$

Dann gibt es genau eine Integralkurve $c_u : J_u \to U$ mit $c_u(0) = u$.

- J_u ist also ein offenes Intervall

1.9 globaler Fluss

Sei E Banachraum, $U \subseteq U$ offen, $\xi : U \to E$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ definiert als

$$\Omega = \{(s, v) | s \in J_v\}$$

und $\varphi : \Omega \to U$, $\varphi(t, u) = c_u(t)$.

Man nennt φ den (*globalen*) *Fluss* von ξ, und Ω seinen Definitionsbereich.

Für jedes $(s, u) \in \Omega$ gilt

$$J_{\varphi(s,u)} = \{t - s | t \in J_u\} = J_u - s$$

weiter gilt

$$\varphi(s, \varphi(t, u)) = \varphi(s + t, u) = \varphi(t, \varphi(s, u))$$

wo das definiert ist. Schreibe kurz

$$\varphi_s(u) := \varphi(s, u)$$

$$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t} = \varphi_t \circ \varphi_s$$

- Ω ist der maximale Definitionsbereich für φ

1.10 1-Parametergruppe von Abbildungen

Ist $\Omega = \mathbb{R} \times U$ (d.h. c_u ist auf $\mathbb{R}$ definiert für alle $u \in U$)

- $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}\ \forall s, t \in \mathbb{R}$
- $\varphi_s^{-1} = \varphi_{-s}$
- $\varphi_0 = \mathrm{id}$

Man spricht hier auch von einer 1-*Parametergruppe von Abbildungen*.

$$s \mapsto \varphi_s$$

ist der entsprechnende Gruppenhomomorphismus.

- selbst bei $E = U = \mathbb{R}$ gilt im Allgemeinen *nicht* $J_u = \mathbb{R}$

1.11 Exponentialfunktion

Sei $U = E$ Banachraum z.B. $E = \mathbb{R}^n$ $T : E \to E$ linear und stetig ($T \in \mathcal{L}(E, E)$).

$$\exp(T) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k$$

- $\frac{d}{dt} \exp(t \cdot T) = T \cdot \exp(t \cdot T) = \exp(t \cdot T) \cdot T$
- $\exp((t + s) \cdot T) = \exp(t \cdot T) \cdot \exp(s \cdot T)$
- Falls $X \cdot Y = Y \cdot X$ gilt
  $\exp(X + Y) = \exp(X) \cdot \exp(Y)$
- $\exp(0 \cdot T) = \mathrm{id}$
- $(\exp(T))^{-1} = \exp(-T)$
- $\exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & t \cdot r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^t & e^t \cdot t \cdot r \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$
- Drehmatrix

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.11.1 Blockdiagonalmatrizen

Ist A eine *Blockdiagonalmatrix*, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{pmatrix}$$

mit $A_1, \ldots, A_r$ ebenfalls Matritzen. Dann gilt

$$\exp(t \cdot A) = \begin{pmatrix} \exp(t \cdot A_1) & & & 0 \\ & \exp(t \cdot A_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp(t \cdot A_r) \end{pmatrix}$$

- Dies ist für Diagonalmatrizen bereits eine geschlossene Lösungsformel
- gilt ebenso für komplexe Matritzen

1.11.2 Basiswechsel

Ist $A \in \mathcal{L}(E)$ und ist $R \in \mathcal{L}$ invertierbar (d.h. $R \in GL(E)$), so gilt

$$\exp\left(RAR^{-1}\right) = R \exp(A) R^{-1}$$

- gilt ebenso für komplexe Matritzen

1.11.3 Jordanblock

Eine komplexe $k \times k$-Matrix der Form

$$J_k(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \mathbb{C}$, heißt *Jordan-Block* der Größe k zum Eigenwert α.

1.11.4 Jordan-Normalform

Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so gibt es $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$, R invertierbar, so dass gilt

$$RAR^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

ist Blockdiagonal und $A_j = J_{m_j}(\alpha_j)$ ist Jordanblock. RAR^{-1} nennt sich die *Jordan-Normalform* von A.

1.11.5 Nilpotent

Eine Matrix $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *nilpotent*, falls $N^m = 0$ gilt für ein $m \in \mathbb{N}$.

Ist $N, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, N nilpotent mit $N^m = 0$ und gilt $AN = NA$, so gilt

1. $\exp(t\cdot N) = 1 + t\cdot N + \frac{1}{2}t^2N^2 + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}N^{m-1}$
2. $\exp(t(N+A)) = \exp(t\cdot N)\exp(t\cdot A) = \exp(t\cdot A)\exp(t\cdot N)$

- Gilt $XY = YX$ für $X, Y \in \mathcal{L}(E)$, so gilt $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$

1.11.6 Exp und Jordan-Block

Setze

$$\begin{aligned} E_{n,k} &= \begin{pmatrix} & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \\ (E_{n,k})_{i,j} &= \begin{cases} 1 & i-j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Hiermit lässt sich ein Jordan Block schreiben als

$$J_n(\alpha) = \alpha\cdot 1 + E_{n,1}$$

Hiermit gilt nun

$$\exp(t\cdot J_n(\alpha)) = e^{\alpha t}\left(1 + tE_{n,1} + \frac{t^2}{2}E_{n,2} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}E_{n,n-1}\right)$$

- $E_{n,k} = 0$ für $k \geq n$
- $E_{n,0} = 1$
- $E_{n,k}\cdot E_{n,l} = E_{n,k+l}$
- $E_{n,1}^n = 0$
- $\alpha 1 \cdot E_{n,1} = E_{n,1}\alpha 1$

1.12 Lineares Vektorfeld

Wir betrachten das Vektorfeld ξ auf $F = U = \mathcal{L}(E,E)\times\mathcal{L}(E,E)$ und

$$\xi(S,T) = (S\cdot T, 0)$$

das heißt die zugehörige DGL hat folgende Gestalt

$$\left(\dot{S}(t), \dot{T}(t)\right) = (S(t)\cdot T(t), 0)$$

Die Lösung für s lautet

$$\begin{aligned} T(t) &= T_0 \\ S(t) &= S_0\cdot\exp(t\cdot T_0) \end{aligned}$$

1.13 stetiges Vektorfeld

Sei $U \subseteq E$ offen, E Banachraum, $\xi : U \to E$ ein C^k-Vektorfeld, $k \geq 1$. Dann gibt es zu jedem $u \in U$ $a, b > 0$ so, dass $\varphi : (-a,a)\times B_b(u) \to U$ k-mal stetig differenzierbar (als Funktion in allen Variablen).

1.14 Eigenschaften von Lösungen

Sei E Banachraum, $U \subseteq E$ offen, $\xi : U \to E$ (lokal) Lipschitz-stetig bzw. C^k-Funktion, $k \geq 1$. Dann ist $\Omega = \{(t,u)\,|t \in J_u\} \subseteq \mathbb{R}\times U$ offen und $\varphi : \Omega \to U$ ist stetig, bzw. C^k-Funktion auf ganz Ω.

1.15 Variation

1.15.1 Zeitabhängige Vektorfelder

Gegeben E Banachraum, $U \subseteq E\times\mathbb{R}$ offen

$$\begin{aligned} \xi : U &\to E \\ (x,t) &\mapsto \xi(x,t) \end{aligned}$$

Gesucht ist Integralkurve $c_v : I \to E$ mit $\dot{c}_v(t) = \xi(c_v(t), t)$ und $c_v(0) = v$.

Sei $\tilde{\xi} : U \to U$, $\tilde{\xi}(v,t) \mapsto (\xi(v,t), 1)$ und $\tilde{v} = (v, 0)$ mit der Integralkurve $\tilde{c}_{\tilde{v}}(t) = (\mathbf{c_v}(\mathbf{t}), t)$.

- Löse also Ersatzkurve $\tilde{\xi}$ und nehme erste Komponente $\mathbf{c_v}(\mathbf{t})$ als Lösung für ursprüngliches Problem

1.15.2 Parameterabhängiges Vektorfeld

Sei E, F Banachräume, $U \subseteq E \times F$ offen. Eine Abbildung $\xi : U \to E$, $(x,y) \mapsto \xi(x,y)$ heißt parameterabhängiges Vektorfeld. Gesucht ist Integralkurve $c_v : I \to E$ mit $\dot{c}_v(t) = \xi(c_v(t), w)$ und $c_v(0) = v$.

Sei $\tilde{\xi} : U \to U$, $\tilde{\xi}(x,y) \mapsto (\xi(x,y), 0)$ und $\tilde{v} = (v,w)$ mit der Integralkurve $\tilde{c}_{\tilde{v}}(t) = (\mathbf{c_v}(\mathbf{t}), w)$.

- Löse also Ersatzkurve $\tilde{\xi}$ und nehme erste Komponente $\mathbf{c_v}(\mathbf{t})$ als Lösung für ursprüngliches Problem

1.15.3 Vektorfelder höherer Ordnung

Sei E Banachraum, $U \subseteq E^n = E \times \ldots \times E$ offen. Sei $\xi : U \to E$ mit der gesuchten Integralkurve

$$\begin{aligned} c_v^{(n)}(t) &= \xi\left(c_v(t), \dot{c}_v(t), \ddot{c}_v(t), \ldots, c_v^{(n-1)}(t)\right) \\ c_v^{(k)}(0) &= v_k \text{ für } k = 0, \ldots, n-1 \\ v &= (v_0, \ldots, v_{n-1}) \end{aligned}$$

Betrachte das Vektorfeld

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} : U &\to U \\ (x_0, \ldots, x_{n-1}) &\mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi(x_0, \ldots, x_{n-1})) \end{aligned}$$

Dies hat die Integralkurve

$$\tilde{c}_v(t) = (\mathbf{c_v}(\mathbf{t}), c_1(t), \ldots, c_{n-1}(t))$$

- Löse also Ersatzkurve $\tilde{\xi}$ und nehme erste Komponente $\mathbf{c_v}(\mathbf{t})$ als Lösung für ursprüngliches Problem

- Ist $\xi(x_1, \ldots, x_n) = a_0 x_1 + a_1 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_n$, $E = \mathbb{R}$. Es gilt

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix} c(t)$$

1.15.4 Anderer Startpunkt

Ist c_k eine Integralkurve zu ξ mit $c_v(0) = v$, so ist

$$c_{v,t_0}(t) = c_v(t - t_0)$$

eine Integralkurve mit $c_{v,t_0}(t_0) = v$.

- Also erst Lösen mit Startzeitpunkt 0 und dann t mit $t - t_0$ Substituieren

1.16 Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Sei

$$y' = f(t)\, g(y)$$

eine DGL mit $f : J \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ und $g(y) \neq 0$ für *alle* $y \in I$.

Ansatz

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(s)\, ds \\ H(y) &= \int_{y_0}^y \frac{1}{g(\omega)} d\omega \end{aligned}$$

Dann gilt für die Lösung $y(t)$ zum Anfangswert $y(0) = y_0$, dass

$$H(y(t)) = F(t)$$

- Falls $H(t)$ invertierbar, gilt

$$y(t) = H^{-1}(F(t))$$

- Als Merkregel lässt sich dies wie folgt festhalten:
  1. $y' = \frac{dy}{dt} = f(t)\, g(y)$
  2. $\frac{1}{g(y)} dy = f(t)\, dt$
  3. $\int_{y_0}^y \frac{1}{g(\tilde{y})} d\tilde{y} = \int_{t_0}^t f(\tilde{t})\, dt$
  4. Integrale Lösen
  5. nach y freistellen
  6. *Probe!!*

- Bei $y' = f\left(\frac{y}{t+a}\right)$ mit $z = \frac{y}{t+a}$ Substituieren

2 Lineare Differentialgleichungen

Betrachte folgende Situation: E Banachraum

$$\mathcal{L}(E) : \{T : E \to E | T \text{ linear und stetig}\}$$

$\mathcal{L}(E)$ ist Banachraum bzgl. Operatornorm und $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ (Raum der $n \times n$ Matritzen).

2.1 homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in \mathcal{L}(E)$, betrachte die DGL

$$y' = Ay$$

Diese DGL heißt *homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.*

Das zugehörige Vektorfeld ξ auf E ist $\xi(u) = Au$. Beachte: ξ ist C^∞-Funktion, das Gleiche gilt also für den Fluss φ. Es gilt

$$\varphi_t(u) = \exp(t \cdot A)\, u$$

auf $\Omega = \mathbb{R} \times E$.

- mit $E = \mathbb{R}^n$, $A = \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrix. Die DGL $y' = Ay$ mit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ hat die Lösung

$$y = \exp(t \cdot A) \cdot y_0$$

- Falls es zu auswändig ist, die Jordan Basis zu bestimmen, einfach nur die Jordan Matrix berechnen, und prüfen, ob die Elemente der Matrix mögliche Lösungen sind. Sobald n unterschiedliche gefunden wurden, hat man den kompletten Lösungsraum der DGL abgedeckt.

2.2 Linear und Zeitabhängig

Sei E Banachraum, $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall mit $0 \in J$, $\alpha : J \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig. Betrachte die DGL

$$\dot{c}(t) = \alpha(t) \cdot A(t) \cdot c(t)$$

für festes $A \in \mathcal{L}(E)$. Die Lösung auf dem Lösungsintervall J lautet

$$c(t) = \exp\left(\left(\int_0^t \alpha(s)\, ds\right) \cdot A\right) \cdot c(0)$$

2.3 Inhomogene DGL

Sei E Banachraum, $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall mit $0 \in J$. Seien $A : J \to \mathcal{L}(E)$ und $b : J \to E$ stetig. Die DGL

$$\dot{c}(t) = A \cdot c(t) + b(t)$$

heißt *inhomogene lineare Differentialgleichung*. Das Lösungsinterall ist ganz J.

2.4 Lösungsraum von homogenen DGL - Lösungsfundamentalsystem

Sei $A : J \to \mathcal{L}(E)$ stetig, E Banachraum. Angenommen $c_u : J \to E$ und $c_v : J \to E$ sind Lösungen der DGL

$$\dot{c}(t) = A(t)\, c(t)$$

mit $c_u(0) = u$ und $c_v(0) = v$.

Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so ist

$$c(t) = a \cdot c_u(t) + b \cdot c_v(t)$$

wieder Lösung zum Anfangswert

$$a \cdot u + b \cdot v$$

Die Abbildung $u \mapsto c_u$, $E \to C^1(J, E)$ ist linear und injektiv. Das Bild dieser Abbildung $\{c_u | u \in E\}$ heißt *Lösungsraum* der lin. homogenen DGL. Insbesondere: ist $\dim E = n$, so ist der Lösungsraum n-dimensional. Ist $b_1, \ldots, b_n$ Basis von E so ist

$$c_u(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k c_{b_k}(t)$$

die (eindeutige) Lösung zum Anfangswert

$$u = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Man nennt $c_1, \ldots, c_k$ dann auch *Lösungsfundamentalsystem* der homogenen lin. DGL $\dot{c} = Ac$.

- Der Real- und Imaginärteil einer Komplexen Lösung sind wieder relle Lösungen

- Die Spalten von $\exp(t \cdot A)$ bilden ein Fundamentalsysten, unabhängig von der konkreten Basis von A

2.5 Lösungsraum der inhomogenen linearen DGL

Ist E Banachraum, $A : J \to \mathcal{L}(E)$, $b : J \to E$ stetig, inhomogene lin. DGL

$$\dot{c} = Ac + b$$

Angenommen $c : J \to E$ ist eine Lösung der DGL $\dot{c}(t) = A(t)\, c(t) + b(t)$ und $e : J \to E$ ist Lösung der homogenen DGL

$$\dot{e}(t) = A(t)\, e(t)$$

Dann ist $t \mapsto (c + e)(t)$eine Lösung der inhomogenen linearen DGL

$$\dot{\overbrace{(c+e)}} = A(t)\,(c+e)(t) + b(t)$$

zum Anfangswert $e(0) + c(0)$.

2.6 Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL

Sei E Banachraum, $A : J \to \mathcal{L}(E)$, $b : J \to E$ seien stetig auf offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in J$. Ist $e : J \to E$ eine Lösung der homogenen lin. DGL $\dot{e}(t) = A(t)\, e(t) + b(t)$, mit Anfangswert $e(0) = u \in E$, so erhalten wir alle weiteren Lösungen zu anderen Anfangswerten durch Addieren von Lösungen der homogenen linearen DGL $\dot{c} = Ac$.

Insbesondere $e(0) = 0$ und sind $c_1, \ldots, c_n$ Fundamentalsystem der homogenen DGL, so ist jede Lösung der inhomogenen DGL von der Art

$$c(t) = e(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k c_k(t)$$

mit $c(0) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, wobei $b_k = c_k(0)$.

2.7 Variation der Konstanten

Betrachte DGL

$$\dot{c}(t) = A(t)\,c(t) + b(t)$$

umschreiben in zeitunabhängiges (homogenes) Vektorfeld $\tilde{\xi} : E \times J \to E \times \mathbb{R}$, $\tilde{\xi}(u,r) = (A(r)\,u, 1)$. Der zugehörige Fluss

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : J \times E \times J &\to E \times \mathbb{R} \\ \tilde{\varphi}_t(u,r) &= (\varphi_t(u,r), t+r) \end{aligned}$$

Setze $\Phi_t(u) = \varphi_t(u,0)$, $\Phi : J \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$, invertierbar.

Definiere die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t \Phi_s^{-1} b(s)\, ds \\ \dot{h}(t) &= \Phi_t^{-1} b(t) \\ h(0) &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz

$$e(t) = \Phi_t(h(t))$$

gilt

$$\begin{aligned} e(0) &= 0 \\ \dot{e}(t) &= A(t)\,e(t) + b(t) \end{aligned}$$

- Insegsamt ergibt dies

$$c_w(t) = Re^{t\tilde{A}} \left(\int_0^t e^{-t\tilde{A}} R^{-1} b(t)\, dt + R^{-1} w \right)$$

- Dieses e ist also die Gesuchte spezielle Lösung des inhomogenen Systems.
- Strategie zum Lösen der inhomogenen DGL $\dot{c} = Ac + b$:
  1. Löse homogene DGL, berechne Φ_t
  2. Finde spezielle Lösung der inhomogenen DGL z.B. durch Variation der Konstanten
  3. Erhalte allgemeine Lösung (alle Lösungen)
  4. aus 1. + 2.

2.8 Äquivalenzen für linearen DGL

Sei E Banachraum, $A : J \to \mathcal{L}(E)$ stetig. Sei $X \subseteq E$. Dann sind äquivalent:

1. X ist linear unabhängig
2. $\{c_u | u \in X\} \subseteq C(J,E)$ ist linear unabhängig
3. Für alle $t \in J$ ist $\{c_u(t) | u \in X\} \subseteq E$ linear unabhängig
4. Für ein $t \in J$ ist $\{c_u(t) | u \in X\} \subseteq E$ linear unabhängig

2.9 Wronski-Determinante

Betrachte die homogene lineare DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t)\,a_n(t) + \ldots + y'(t)\,a_1(t) + y(t)\,a_0(t) = 0$$

mit $y : J \to \mathbb{R}$ und $a_n(t) \neq 0$ für alle $t \in J$.

Sind $y_1, \ldots, y_n : J \to \mathbb{R}$ Lösungen dieser DGL, so gilt:

$y_1, \ldots, y_n$ ist linear unabhängig genau dann, wenn für *ein* $t \in J$ (und damit jedes $t \in J$) die *Wronski-Determinante*

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n+1)} & y_2^{(n+1)} & \cdots & y_n^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

$\neq 0$ ist.

Index

Blockdiagonalmatrix, 3

Exponentialfunktion, 3

Fluss, 3

globaler Fluss, 3

inhomogene lineare Differentialgleichung, 6
Integralkurve, 1

Jordan-Block, 4
Jordan-Normalform, 4

Lösungsfundamentalsystem, 6
Lösungsraum, 6
lineare DGL, 5

nilpotent, 4

Parameterabhängiges Vektorfeld, 5
Picard-Lindelöf-Iteration, 2

Startpunkt, 5

Variation der Konstanten, 7
Vektorfeld, 1
Vektorfelder höherer Ordnung, 5
VF, 1

Zeitabhängige Vektorfelder, 4