Formelsammlung
Analysis I / II
für Physiker und Mathematiker

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 17.12.2005 - Version: 1.0.1
Erhältlich unter http://privat.macrolab.de

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung "Analysis I" & "Analysis II" von Prof. Dr. Linus Kramer an der Technischen Universität Darmstadt im Wintersemester 2004/05 und Sommersemester 2005.

Inhaltsverzeichnis

1 Ringe, Körper, Anordnung

1.1 Kommutativer Ring

Gegeben sei eine Menge R. Wir nehmen an, es gibt in R zwei spezielle Elemente, die 0 (Null) und 1 (Eins) heißen. Weiter soll es auf R zwei Verknüpfungen "+" (plus) und "$*$" (mal) geben, die jeweils zwei Elementen x und y in R neue Elemente $x+y$ und $x*y$ in R zuordnen. Wir nennen $(R, 0, 1, +, *)$ einen *kommutativen Ring*, falls die folgenden Rechenregeln für alle x, y, z in R gelten.

1. Kommutativgesetze
   (K_+) $x+y=y+x$
   (K_*) $x*y=y*x$
2. Assoziativgesetze
   (A_+) $(x+y)+z=x+(y+z)$
   (A_*) $(x*y)*z=x*(y*z)$
3. Distributivgesetze
   (D) $x*(y+z)=(x*y)+(x*z)$
   (D) $(x+y)*z=(x*z)+(y*z)$
4. Existens von Neutralelementen
   (N_+) $x+0=0+x=x$
   (N_*) $1*x=x*1=x$
5. Inverses Element
   (I_+) zu jedem x gibt es genau ein y mit $x+y=0$. Schreibe $y=-x$

- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$, sind Beispiele für kommutative Ringe. $\mathbb{N}$ ist *kein* Ring.
- Falls (K_*) nicht ausdrücklich verlangt wird, spricht man von einem *nicht-kommutativen Ring.*

1.1.1 Rechenregeln

In einem kommutativen Ring gelten folgende Rechenregeln:

- Klammern werden nur geschrieben wenn sie nicht durch die Assoziativität überflüssig gemacht werden.
- $-(-x)=x$
- aus $x+y=x$ folgt $y=0$
- $0*x=0$
- $(-x)*y=-(x*y)=x*(-y)$

1.2 Körper

Ein kommutativer Ring $(R, 0, 1, +, *)$ heißt *Körper* wenn gilt:

1. $0 \neq 1$
2. Inverses Element
   (I_*) Ist $x \neq 0$ so gibt es genau ein y in R mit $x*y=1=y*x$. Schreibe $y=x^{-1}=\frac{1}{x}=1/x$

- $(\mathbb{F}_2, +, *)$ mit

+	0	1
0	0	1
1	1	0

und

*	0	1
0	0	0
1	0	1

ist der kleinste mögliche Körper.
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind Körper

1.3 (Ordnungs-) Relationen

1.3.1 totale Ordnung

Es sei X eine (nichtleere) Menge und "$<$" sei eine *zweistellige Relation* auf X (das heißt folgendes: für $x, y \in X$ gilt entweder "$x < y$" oder "nicht $y < x$"). Wir nennen "$<$" *Ordnung* oder *Anordnung* auf X, falls folgendes für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. (O_1) Entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $x < y$ (genau 1er dieser 3 Fälle)
2. Transitivität
   (O_2) Falls $x < y$ und $y < z$, so gilt auch $x < z$

1.3.2 partielle Ordnung

Eine partielle Ordnungsrelation R auf einer Menge M ist eine Teilmenge von $M \times M$ die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Reflexivität
   $(x, x) \in R$ für alle $x \in M$
2. antisymmetrisch
   $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
3. transitiv
   $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Wir schreiben anstatt $(x, y) \in R$ auch $x \leq y$ und sagen, dass R auf M eine *partielle Ordnung* definiert.

- Nicht alle Elemente müssen vergleichbar sein.

1.4 angeordneter Ring / Körper

Ein Ring oder Körper $(R, +, *, 0, 1)$ heißt *angeordneter Ring* (entspr. Ring mit 1 aus LA) / *Körper*, falls "$<$" eine (totale) Ordnung auf R ist, schreibe $(R, +, *, 0, 1, <)$, falls folgendes für alle $x, y, z \in R$ gilt:

1. (OR_1) Wenn $x < y$, so auch $x + z < y + z$
2. (OR_2) Wenn $x < y$ und $0 < z$, so auch $x * z < y * z$

- Jeder angeordnete Ring/Körper hat unendlich viele Elemente
- negativ * negativ = positiv
- negativ * positiv = negativ
- $0 < x^2$ falls $x \neq 0$
- $0 < 1$
- Bernoulli'sche Ungleichung:
  $\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \geq -1 : (1 + x)^n \geq 1 + nx$

Vereinbarungen

1. Schreibe $x \leq y$ falls $x < y \vee x = y$
2. Schreibe $x > y$ falls $y < x$
3. Schreibe $x \geq y$ falls $x > y \vee x = y$
4. x heißt *positiv* falls $x > 0$
5. x heißt *nicht positiv* falls $x \leq 0$
6. x heißt *negativ* falls $x < 0$
7. x heißt *nicht negativ* falls $x \geq 0$

1.5 Absolutbetrag

Wir definieren den *Absolutbetrag* (oder *Betrag*) in einem angeordneten Ring oder Körper R durch

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

1. $|-x| = |x| \geq 0$
2. $|x * y| = |x| * |y|$
3. *Dreiecksungleichung*
   $|x + y| \leq |x| + |y|$
4. *Umgekehrte Dreiecksungleichung*
   $|x - y| \geq ||x| - |y||$

1.6 Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$

Die Elemente von $\mathbb{Q}$ sind die ganzzahligen Brüche der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Brüche werden also durch Paare ganzer Zahlen beschrieben, allerdings nicht eindeutig. Setze $X = \{(a, b) \,|a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$ die Menge aller Paare ganzer Zahlen (a, b) mit $b \neq 0$. Das Paar (a, b)soll den Bruch $\frac{a}{b}$ darstellen. Wir nennen zwei Paare (a, b) und (a', b') äquivalent, falls $ab' = a'b$ $((a, b) \sim (a', b'))$. Wir identifizieren äquivalente Paare miteinander und schreiben $\frac{a}{b}$ für die Menge aller Paare (a', b') mit $ab' = a'b$. Wir definieren die Rechenregeln wie folgt auf $\mathbb{Q} = X/\sim$:

1. Addition
$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$$
2. Multiplikation
$$\frac{a_1}{b_1} * \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 * a_2}{b_1 * b_2}$$

- Aus Ringen lassen sich Körper "basteln", das macht man in der Algebra. Stichwort "lokalisieren von Ringen".

1.7 Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$

Ganz ähnlich wie die Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ durch Äquivalenzklassen von Paaren. Setze $Y = \{(m,n)\,|m,n \in \mathbb{N}\}$. Das Paar (m,n) soll die ganze Zahl "$m-n$" kodieren. Wir nennen zwei Paare (m,n) und (m',n') äquivalent ($\sim$), falls $m+n' = m'+n$. Die entsprechenden Äquivalenzklassen von Paaren sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\sim$. Schreibe $m-n$ für die durch (m,n) kodierte Zahl. Es gelten folgende Rechenregeln:

1. Addition

$$(m_1-n_1)+(m_2-n_2)=(m_1+m_2)-(n_1+n_2)$$

2. Multiplikation

$$(m_1-n_1)*(m_2-n_2)=(m_1m_2+n_1n_2)-(m_1n_2+m_2n_1)$$

1.8 Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Wir konstruieren den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen wie folgt:

$$\mathbb{C} = \{(x,y)\,|x,y \in \mathbb{R}\}$$

Wir stellen uns eine komplexe Zahl $z=(x,y)$ als Punkt in der Ebene vor. Wir definieren Verknüpfungen $+$ und $*$ auf $\mathbb{C}$ wie folgt:

1. Addition

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

2. Multiplikation

$$(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$$

- Einselement $(1,0)$
- Nullelement $(0,0)$
- Inverses Element zu (x,y)
  $\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$
  $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- Identifiziere Teilmenge $\{(x,0)\,|x\in\mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}$
- schreibe $i=(0,1)$
- $i^2=-1$
- schreibe statt $z=(x,y)$ nun $z=x+iy$
  - hiermit lassen sich die Rechenregeln leichter merken
- Realteil
  $\Re(x+iy)=\mathrm{Re}(x+iy)=x$
- Imaginärteil
  $\Im(x+iy)=\mathrm{Im}(x+iy)=y$
- Komplex konjungiert
  wenn $z=x+iy$ dann $\bar{z}=x-iy$
  - $\bar{\bar{z}}=z$
  - $\bar{z}=z \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$
  - $z*\bar{z}=x^2+y^2\geq 0$
- Betrag oder Norm von einer komplexen Zahl
  $|z|=\sqrt{z*\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$

2 Mengen, natürliche Zahlen, Induktion

2.1 Mengen

In der Sprache der Mengenlehre gibt es nur ein fundamentales Zeichen: $\in$

- $\in$ "ist Element von"
- $x\in y$ "x ist Element von y"
- $x\notin y$ "x ist nicht Element von y"

Vereinbarung: schreibe $A\subseteq X$ (A ist Teilmenge von X) falls für jedes $a\in A$ gilt $a\in X$.

Mengen werden nach bestimmten Spielregeln gebaut, den Zermelo-Fraenkel-Axiomen (ZFC (c wie choice)):

1. (Ex) Es gibt Mengen
2. (Ext) Zwei Mengen sind gleich, falls sie die gleichen Elemente haben: $X\subseteq Y \wedge Y\subseteq X \Rightarrow X=Y$
3. (Aus) Ist X eine Menge, φ eine Formel (Bedingung), so ist $\{x\in X|\varphi(x) \text{ gilt}\}$ ebenfalls eine Menge (eine Teilmenge von X).
   - Die *leere Menge* ist definiert durch $\emptyset=\{\}:=\{x\in X|x\neq x\}$
   - Der *Durchschnitt* (Schnittmenge) $X\cap Y=\{x\in X|x\in Y\}$
   - *Disjunkt* heißen zwei Mengen, wenn $X\cap Y=\emptyset$
   - Das *Komplement* $X\backslash Y = X-Y = \{x\in X|x\notin Y\}$
   - Die *symmetrische Differenz* $A\triangle B=A\backslash B\cup B\backslash A$
4. $(Paar)$ Sind X,Y Mengen, dann gibt es eine Menge Z, deren Elemente genau X und Y sind. (entsprechend mit mehr als 2 Mengen)
5. (Ver) Ist X eine Menge, so gibt es eine Menge Z, deren Elemente genau die Elemente der Elemente von X sind, $Z=\bigcup X=\{z|\exists x\in X: z\in x\}$
   - Die *Vereinigung* von zwei Mengen lässt sich auch so schreiben: $X\cup Y=\bigcup\{X,Y\}$

- Für die Vereinigung von disjunkten Mengen X, Y schreibe auch $X \dot{\cup} Y$

6. (Pot) Ist X eine Menge, so gibt es eine Menge, deren Elemente genau die Teilmengen von X sind, die Potenzmenge $\mathcal{P}(X) = \{Y | Y \subseteq X\}$.
   - $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$
   - $X \in \mathcal{P}(X)$
   - $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
   - Ist X endlich mit n Elementen, so hat die Potenzmenge 2^n Elemente
   - Ist X endlich mit n Elementen, so gibt es genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Mengen in der Potenzmenge von X (bzw. k-elementige Teilmengen in X)
7. ($Fund$) Es gibt keine *bodenlosen* Mengen. Ist X eine nichtleere Menge, so gibt es ein $Y \in X$ mit $X \cap Y = \emptyset$
   - für keine Menge X kann gelten $X \in X$
   - Die "Russelmenge" $R = \{M | M \notin M\}$ ist nach den Axiomen keine Menge.
8. (Inf) Es gibt unendliche Mengen.
9. (Ers) Ist $\varphi(x, y)$ eine Formel, die einer Menge x eine neue Menge y zuordnet, und ist X eine Menge, so ist auch $\{y | x \in X \wedge \varphi(x, y)\}$ eine Menge.
10. ($Choice$) Ist X eine nichtleere Menge mit der Eigenschaft, dass alle Elemente von X disjunkt sind, so gibt es eine Menge Z, die mit jedem Element von X genau ein Element gemeinsam hat. (Teilweise umstrittenes Axiom)

2.1.1 Rechenregeln für Mengen

- Komplementbildung
  Sei $A \subseteq M$ dann ist $A^c = M \backslash A$
- Distributivgesetz
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- de Morgan'sch Regel
  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2.1.2 Paare

Ein *geordnetes Paar* (x, y) hat eine erste Komponente x und eine zweite Komponente y. In der Sprache der Mengenlehre setzt man $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Es gilt $(x, y) = (x', y')$ genau dann, wenn $x = x'$ und $y = y'$.

Das *kartesische Produkt* $X \times Y$ zweier Mengen X, Y ist $\{(x, y) | x \in X \wedge y \in Y\}$. Ist $X = Y$ schreibt man $X \times X = X^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in X\}$. Dieses lässt sich Iterrieren zu Produkten $(\ldots(X_1 \times X_2) \times \ldots) \times X_n$. Die Klammern sind nicht wichtig, wir lassen sie weg. Ist $X = X_1 = \ldots = X_n$, schreiben wir $X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n-mal}$. Die Elemente dieser Menge heißen n-Tupel.

2.1.3 Intervalle

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$.

Die Menge $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ heißt *abgeschlossenes endliches Intervall* (*abgeschlossenes beschränktes Inervall*).

Die Menge $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ heißt *offenes endliches Intervall*.

- andere Schreibweise auch gebäuchlich: $(a, b) =]a, b[$

2.1.4 ε-Umgebung

Für $\varepsilon > 0$ heißt die Menge $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ε-Umgebung von x.

2.1.5 offene Menge

Eine Menge X heißt *offen*, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x)$ gibt, welche ganz in X liegt. Mit Qantoren:

$$\forall x \in X \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq X$$

- $\mathbb{R}, \emptyset, (a, b), (a, b) \cup (c, d)$ sind offene Mengen
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, [a, b]$ sind *nicht* offen

2.2 Nachfolgerstruktur (Konstruktion von $\mathbb{N}$)

Eine Menge N mit einer Abbildung $\sigma : N \to N$ (σ heiße Nachfolgerabbildung) heißt *Nachfolgerstruktur*, falls sie die *Peano-Axiome* erfüllt:

1. (P_1) Es gibt ein Element $o \in N$, so dass $\forall x \in N : \sigma(x) \neq o$
2. (P_2) Aus $\sigma(x) = \sigma(y)$ folgt $x = y$ (σ ist injektiv)
3. (P_3) Ist $X \subseteq N$ eine Teilmenge, und gilt $o \in X$, und folgt aus $x \in X \Rightarrow \sigma(x) \in X$ (d.h. X ist abgeschlossen unter der Nachfolgerfunktion) so gilt $X = N$.

- (P_3) ist das Axiom der *vollständigen Induktion.*
- Es gibt genau eine Nachfolgerstruktur mit $(\mathbb{N}, s)$ mit $o = \emptyset$ und $s(x) = x \cup \{x\}$
- Ist (N, σ) eine Nachfolgerstruktur, dann gibt es genau eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to N$ mit $\varphi(\emptyset) = o$, $s(x) = x \cup \{x\}$ und $\varphi(s(x)) = \sigma(\varphi(x))$

- Addition:
  $o + o = o$
  $o + x = x = x + o$
  $\sigma(x) + y = \sigma(x + y)$
- Multiplikation:
  $o * o = o$
  $o * x = o = x * o$
  $\sigma(x) * y = x * y + y$
- Bei dieser Kodierung der natürlichen Zahlen gilt:
  $n < m \Leftrightarrow n \in m$

2.2.1 Vollständige Induktion

Das Peano-Axiom (P_3) sagt: ist φ eine Aussage über natürliche Zahlen und gilt:

1. $\varphi(0)$ ist wahr
2. $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$

dann ist $\varphi(m)$ wahr für alle $m \in \mathbb{N}$.

2.3 Relationen

Relationen sind Eigenschaften von Elementen von Mengen bzw. von n-Tupeln. Sie sind entweder erfüllt oder nicht erfüllt. Diese Eigenschaft wird repräsentiert durch das Element sein in einer entsprechenden Teilmenge oder nicht Element sein.

2.3.1 Einstellige Relationen

Eine *einstellige Relation* einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subseteq X$, schreibe $R(x)$ für $x \in R$.

2.3.2 zweistellige Relationen

Eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ heißt zweistellige Relation. Schreibe xRy falls $(x, y) \in R$.

Eine zeistellige Relation $R \subseteq X^2$ heißt

reflexiv falls $\forall x \in X : xRx$

symmetrisch falls $xRy \Rightarrow yRx$

transitiv falls $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Äquivalenzrelation falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- Die Menge $[x] = [x]_R = \{y \in X | xRy\}$ heißt *Äquivalentzklasse* von x. Setze $X/R = \{[x]_R | x \in X\}$, gesprochen "$X$ mod R", ist die Menge aller Äquivalenzklassen.

Ordnungsrelationen siehe 1.3 auf Seite 6

2.3.3 n-stellige Relationen

Eine Teilmenge $R \subseteq X_1 \times \ldots \times x_n$ heißt n-stellige Relation. Schreibe $R(x_1, \ldots, x_n)$ falls $(x_1, \ldots, x_n) \in R$.

2.4 Abbildungen

Eine Relation $f \subseteq Y \times X$ heißt *Abbildung* oder *Funktion* falls es zu jedem $x \in X$genau ein $y \in Y$ gibt mit $(y, x) \in f$. Schreibe $f(x) = y$ falls yfx. Schreibe dafür kurz

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, und ist $A \subseteq X$, so ist $f(A) = \{f(a) | a \in A\} \subseteq Y$ das f-Bild von A. Ist $B \subseteq Y$, so ist $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\} \subseteq X$ das f-Urbild von B.
- Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Für $A \subseteq X$ definiere $f|_A : A \rightarrow Y$ mit $a \mapsto f(a)$ die *Einschränkung* von f auf A.
- Es gilt für $B_1, B_2 \subseteq Y$
  $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$
  $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup B_2)$
  $f^{-1}(B_1^C) = (f^{-1}(B_1))^C$

2.4.1 Familie

Eine Famile k ist eine Funktion die

$$n \mapsto k_n$$

n ist dabei ein Element aus der Indexmenge, die alle möglichen k_n sozusagen durchindiziert.

2.4.2 Komposition

Sind $R \subseteq Z \times Y$ und $S \subseteq Y \times X$ Relationen, setze $R \circ S \subseteq Z \times X$ durch $R \circ S = \{(z, x) \in Z \times X | \exists y \in Y : zRy \wedge ySx\}$.

Speziell: sind $f : Y \rightarrow Z$ und $g : X \rightarrow Y$ Abbildungen, so ist $f \circ g$ die Abbildung $x \mapsto f(g(x))$, lies "f nach g".

- Kompositionen sind assoziativ, d.h. es muss nicht geklammert werden.

2.4.3 injektiv, surjektiv, bijektiv

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt:

surjektiv falls es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt

- $\exists g : Y \rightarrow X : f \circ g = id_Y$

injektiv falls $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ bzw. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

- $\exists g : Y \to X : g \circ f = id_X$
- Verknüpfung von injektiven Funktionen ist wieder injektiv

bijektiv falls sie surjektiv und injektiv ist, d.h. falls es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$

- $\exists g : Y \to X : f \circ g = id_Y \wedge g \circ f = id_X$

2.5 Kombinatorik

2.5.1 Anzahl Elemente in einer Menge

Für die Anzahl der Elemente einer Menge A schreibe kurz: $n = \#A = \operatorname{card}(A)$ (bzw. $n = |A|$)

2.5.2 Fakultät und Binomialkoeffizient

Wir schreiben für die Zahl n dessen *Fakultät* mit $n!$. Wir definieren $0! = 1$ und $(n+1)! = (n+1)\,n! = 1 * 2 * \ldots * (n+1)$.

Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, lies n über k, ist definiert für alle $0 \leq k \leq n$.

- ergibt im gesamten Definitionsbereich natürliche Zahlen
- $n! = \prod_{i=1}^{n} i$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $0 \leq k < n$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $2^n \leq n!$ für $n > 3$
- $n! \leq n^n$

2.5.3 Summen / Produktsymbol

Sind $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n$ Elemente eines Ringes. Dann setze das *Summensymbol* wie folgt:

$$\sum_{l=i}^{n} a_l = a_i + a_{i+1} + \ldots + a_n$$

Sind sie sogar Elemente eines kommutativen Ringes setzen wir das *Produktsymbol* wie folgt:

$$\prod_{l=i}^{n} a_l = a_i * a_{i+1} * \ldots * a_n$$

- Diese Zeichen binden ähnlich wie das Integralzeichen solange, wie nur Multiplikationen vorgenommen werden.
- $n! = \prod_{k=1}^{n} k$

2.5.4 Eigenschaften von Teilmengen

Sei X eine n-elementige endliche Menge. Dann besitzt X genau 2^n Teilmengen. Darunter sind genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen.

2.5.5 Binomische Formel

Sind a, b Elemente eines kommutativen Ringes, so gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2.5.6 Geometische Summe

Sei K ein Körper, $q \in K$ und $q \neq 1$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

2.5.7 Wichtige Summen / Reihen

- $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
- $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

2.5.8 Fast alle

Eine Aussage gilt für *fast alle* natürlichen Zahlen, wenn sie nur *endlich* viele Ausnahmen hat.

3 Die reellen Zahlen

3.1 Schranken

3.1.1 Schranken / Mini- & Maxima

Es sei $(X, <)$ eine geordnete Menge und sei $A \subseteq X$. Ein Element $x \in X$ heißt *obere Schranke* (*untere Schranke*) für A, falls für alle $a \in A$ gilt $a \leq x$ (bzw. $a \geq x$). Falls es $a_0 \in A$ gibt, das obere Schranke (untere Schranke) ist, so heißt a_0 *Maximum* (*Minimum*) von A).

- eine Menge kann im allgemeinen mehrere odere / untere Schranken haben, aber höchstens ein Minimum / Maximum
- das Minimum / Maximum muss nicht existieren

3.1.2 Supremum / Infimum

Eine kleinste (größte) obere (untere) Schranke heißt *Supremum* (*Infimum*) für A, schreibe $x = \sup(A)$ ($x = \inf(A)$).

Eine geordnete Menge $(X, <)$ hat *Supremumseigenschaft*, falls jede Teilmenge $A \subseteq X$ die eine obere Schranke hat, auch ein Supremum besitzt.

- falls A ein Minimum (Maximum) hat, ist dies auch das Infimum (Maximum)
- $\mathbb{Q}$ hat die *nicht* Supremumseigenschaft
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ haben die Supremumseigenschaft
- Jeder angeordnete Ring / Körper der die Supremumseigenschaft hat, ist auch archimedisch.

3.1.3 Archimedisch

Ein angeordneter kommutativer Ring oder Körper R ist *archimedisch*, falls es zu jedem Element $r \in R$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n * 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-mal} \geq r$.

- Ist R ein archimedischer geordneter Körper, und ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind archimedisch
- es gibt viele Körper, die nicht archimedisch sind, z.B. die nicht-Standard-Zahlen

3.1.4 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Es gibt angeordnete Körper mit der Supremumseigenschaft. Je zwei solcher Körper sind *kanonisch isomorph* (es gibt genau einen Isomorphismus zwischen ihnen). Ein solcher Körper ist $\mathbb{R}$.

3.2 Folgen

3.2.1 Folge

Es sei $I \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge natürlicher Zahlen. Eine (reelle) *Folge* ist eine Abbildung $c : I \to \mathbb{R}, i \mapsto c(i) = c_i$. I ist die *Indexmenge* der Folge, die Zahlen c_i heißen *Folgenglieder* der Folge. Schreibe auch $(c_i)_{i \in I}$.

- $c_i = r$ ist eine *konstante Folge*

3.2.2 Konvergenz

Eine Folge $(c_i)_{i \in I}$ *konvergiert* gegen eine Zahl r, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|c_l - r| \leq \varepsilon$ für alle $l \in I$ mit $l \geq n$ gilt. Mit Quantoren ausgedrückt:

$$\lim_{i \in I} c_i = r \Leftrightarrow_{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall l \in I, l \geq n : |c_l - r| \leq \varepsilon}$$

Für diesen *Grenzwert* r schreiben wir

$$\lim_{i \in I} c_i = r$$

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 nennen wir *Nullfolge*.

- Wenn eine Folge konvergiert, nennt man sie *konvergent*, anderenfalls *divergent*.
- Eine Folge konvergiert gegen höchstens eine Zahl
- Für Grenzwert auch andere Schreibweisen gebräuchlich: $\lim_{i \to \infty} c_i = r$
- Umformulierung des Satzes: $\lim_{i \in I} c_i = r \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall l \geq n : |c_l - r| \leq k\varepsilon$
- Jeder Grenzwert ist ein Häufungspunkt

3.2.3 Beschränkt

Eine Folge $(c_i)_{i \in I}$ heißt *beschränkt*, falls es Zahlen $k, K \in \mathbb{R}$ gibt mit $k \leq c_i \leq K$ für alle $i \in I$. Äquivalent dazu: Es gibt ein $l \in \mathbb{R}$ mit $|c_i| \leq l$ für alle $i \in I$.

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

3.2.4 Monotonie

Eine Folge $(c_i)_{i \in I}$ heißt

- monoton wachsend falls $c_i \leq c_j$
- streng monoton wachsend falls $c_i < c_j$
- monoton fallend falls $c_i \geq c_j$
- streng monoton fallend falls $c_i > c_j$

für alle $i < j$ gilt.

Ist die Folge $(c_i)_{i \in I}$ monoton wachsend (fallend) und beschränkt, dann konvergiert sie.

- Bei monoton wachsenden konvergenten Folgen gilt $\lim_{i \in I} c_i = \sup\{c_i | i \in I\}$
- Bei monoton fallenden konvergenten Folgen gilt $\lim_{i \in I} c_i = \inf\{c_i | i \in I\}$

3.2.5 Kombination von Folgen

Seien $(a_n)_{n\in I}$ und $(b_n)_{n\in I}$ konvergent mit $\lim_{n\in I} a_n = a$ und $\lim_{n\in I} b_n = b$. Betrachte die *Summenfolge*$(a_n + b_n)_{n\in I}$ und *Produktfolge* $(a_n b_n)_{n\in I}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\in I}(a_n + b_n) &= a + b \\ \lim_{i\in I}(a_n b_n) &= ab \end{aligned}$$

Falls $a \neq 0 \neq a_n$ für alle $n \in I$ gilt, folgt

$$\lim_{n\in I}\left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{a}$$

- Die Menge der konvergenten Folgen $\mathcal{F}$ bildet einen Vektorraum. Die Grenzwertbildung ist ein lineares Funktional auf $\mathcal{F}$, das heist, dass $\lim : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist.

3.2.6 Häufungspunkt

Eine Zahl r heißt *Häufungspunkt* der Folge $(c_n)_{n\in I}$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in I | \, |c_n - r| \leq \varepsilon\}$ unendlich ist.

- Jeder Grenzwert ist ein Häufungspunkt
- Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert.
- Eine Zahl r ist Häufungspunkt der Folge $(c_i)_{i\in I}$ genau dann, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen r konvergiert.

3.2.7 Teilfolge

Ist $(c_i)_{i\in I}$ eine Folge, und ist $J \subseteq I$ unendlich, so heißt die Folge $(c_j)_{j\in J}$ *Teilfolge* der urspünglichen Folge.

3.2.8 Satz von Bolzano - Weierstrass

Jede beschränkte Folge auf einem Ring / Körper der die Supremumseigenschaft erfüllt (z.B. $\mathbb{R}$) hat mindestens einen Häufungspunkt.

- Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

3.2.9 Größter / Kleinster Häufungspunkt

Der größte Häufungspunkt der beschränkten Folge $(c_n)_{n\in I}$ nennt man *Limes superior*:

$$\limsup_{i\in I} c_i = \overline{\lim}_{i\in I} c_i$$

Der kleinste Häufungspunkt heißt *Limes inferior*:

$$\liminf_{i\in I} c_i = \underline{\lim}_{i\in I} c_i$$

- Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt.

$$\lim_{i\in I} c_i \Rightarrow \liminf_{i\in I} c_i = \limsup_{i\in I} c_i$$

3.2.10 Wichtige Folgen

Harmonische Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $\lim_n \frac{1}{n} = 0$

Konstante Folge $(k)_{i\in\mathbb{N}}$ $\lim_n k = k$

geometrische Folge $\left(q^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \wedge |q| < 1$ $\lim_n q^k = 0$

3.3 Konstruktion von $\mathbb{R}$

3.3.1 Ideal

Ist R ein (kommutativer) Ring, $I \subseteq R$ eine nichtleere Teilmenge mit

1. $x, y \in I \Rightarrow x + y \in I$
2. $x \in I \wedge y \in R \Rightarrow x \cdot y \in I$

dann heißt I *Ideal* in R.

Dann ist der *Faktorring* $R/I = \{r + I | r \in R\}$ mit $r + I = \{r + i | i \in I\}$ mit den Verknüpfungen

1. $(r + I) + (s + I) = (r + s) + I$
2. $(r + I) \cdot (s + I) = r \cdot s + I$
3. Nullelement
   $0 = I$
4. Einselement
   $1 = 1 + I$

wieder ein Ring.

- Hiermit lassen sich in R Äquivalenzklassen bilden, mit der Eigenschaft $[r] = \{r + i | i \in I\}$

3.3.2 Ring der Cauchy-Folgen

Setze $\vec{q} = (q)_{n\in\mathbb{N}} = (q, q, q, \ldots)$. Sei $R = CF(\mathbb{Q}) = \{\text{Cauchy-Folgen in } \mathbb{Q}\}$ und $I = NF(\mathbb{Q}) = \{\text{Nullfolgen in } \mathbb{Q}\}$ mit den Verknüpfungen

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Einselement $1 = \vec{1}$
4. Nullelement $0 = \vec{0}$

I ist ein Ideal. Also ist $R/I = \mathbb{R}$ ein Ring.

- Reelle Zahlen sind also Äquivalenzklassen von Cauchy Folgen (bis auf Addition von Nullfolgen verschieden).
- Dieses Konzept nennt sich Vervollständigung eines metrischen Raumes

3.3.3 $\mathbb{R}$ ist Körper

$\mathbb{R}$ ist ein Körper, d.h. wir können dividieren.

Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ gesucht: $y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y = 1$. Es gilt, dass $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + I \neq I$ d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge. Insbesondere ist $x_n \neq 0$ für fast alle n. Setze $y_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_n = 0 \\ \frac{1}{x_n} & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $x_n \cdot y_n = 1$ für fast alle n. Also ist diese $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das gesuchte Inverse zu x.

3.3.4 Anordnung auf $\mathbb{R}$

Sei

$$X = \{r \in CF(\mathbb{Q}) \,|\text{Es gibt } \varepsilon > 0, \text{ so dass } r_n \geq \varepsilon \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt}\}$$

Dann gilt

$$CF(\mathbb{Q}) = -X \dot\cup I \dot\cup X$$

Seien $P \subseteq \mathbb{R}$ die *positiven reellen Zahlen*. $P = \{r + I | r \in X\}$. Damit gilt

$$\mathbb{R} = -P \dot\cup \{0\} \dot\cup P$$

und $X \cdot X \subseteq X$, $X + X \subseteq X$, $X + I \subseteq X$. Also auch $P \cdot P \subseteq P$ und $P + P \subseteq P$.

Wir definieren eine Ordnung "$<$" auf $\mathbb{R}$ durch: $x < y \Leftrightarrow y - x \in P$. Dann ist $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper und es gelten die Eigenschaften aus 1.4 auf Seite 6.

3.3.5 Supremumsnorm / Archimedisch

$\mathbb{R}$ ist archimedisch, d.h für jedes $r \in \mathbb{R}$ lässt sich ein $n \in \mathbb{N}$ finden, so dass $\vec{n} \geq r$ gilt.

$\mathbb{R}$ hat die Supremumseigenschaft, d.h. jede beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{R}$ hat auch eine kleinste obere Schranke. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ findet man eine obere Schranke $q_n \in \mathbb{Q}$ für A mit $|q_n - a| \leq \frac{1}{n}$ für ein $a \in A$. Dann bilden die q_n eine rationale Cauchy-Folge, und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} + I$ ist die kleinste obere Schranke für A, das gesuchte Supremum.

3.3.6 Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$

Ist R ein angeordneter Körper mit der Supremumseigenschaft, dann gibt es *genau einen* Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to R$. Dieser ist wie folgt definiert.

1. $\varphi(n \cdot 1) = n \cdot I_R$
2. $\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\varphi(1) = \frac{1}{n} I_R$
3. $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = p\varphi\left(\frac{1}{q}\right)$
4. Für $r \in \mathbb{R}$ sei $A_r = \{q \in Q | q \leq r\}$, dann ist $r = \sup(A_r)$. Setze $\varphi(r) = \sup(\varphi(A_r))$

In $\mathbb{R}$ gilt: $P = \{r^2 | r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, die Anordnung von $\mathbb{R}$ ist algebraisch bestimmt. Deshalb muss man φ so konstruieren, es gibt keinen anderen Isomorphismus.

4 Cauchy Folgen und Reihen

4.1 Cauchy Folgen

4.1.1 Definition

Sei R ein angeordneter Ring oder Körper (z.B. $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$). Eine Folge $(c_i)_{i\in I}$ in R heißt *Cauchy-Folge* oder *Fundamentalfolge* falls es zu jedem $\varepsilon \in R$ mit $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|c_l - c_m| \leq \varepsilon$ für alle $l, m \geq n$.

$$\forall 0 < \varepsilon \in R : \exists n \in \mathbb{N} : \forall l, m \geq n : |c_l - c_m| \leq \varepsilon$$

- Eine Folge in $\mathbb{R}$ (bzw. einem Körper mit der Supremumseigenschaft) ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.
- Cauchy Folgen sind immer beschränkt.

4.1.2 Vollständig

Der angeordnete Ring / Körper heißt (folgen-) vollständig, wenn *jede* Cauchy-Folge in R auch konvergent ist.

- Wenn R die Supremumseigenschaft hat, ist R auch vollständig.
- $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ sind vollständig
- $\mathbb{Q}$ ist *nicht* vollständig

4.2 Reihen

4.2.1 Definition

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Setze $s_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$. Diese neue Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *Partialsummenfolge* oder *unendliche Reihe*, schreibe $(s_k)_{k\in\mathbb{N}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Falls diese Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, spricht mann von einer *konvergenten Reihe*, ansonsten von einer *divergenten Reihe*. Für den Grenzwert $s = \lim_k s_k$ schreibe $\lim_k s_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

- Das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hat also mehrere Bedeutungen, den Grenzwert der Reihe und die Reihe selber.

4.2.2 Cauchy Konvergenzkriterium für Reihen

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen eine Cauchy-Folge ist. D.h. die Reihe konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|\sum_{k=l}^{m} a_k| \leq \varepsilon$ für alle $n \leq l \leq m$. Mit Quantoren: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall n \leq l \leq m : \left|\sum_{k=l}^{m} a_k\right| \leq \varepsilon$$

- Insbesondere muss $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein, wenn die Reihe konvergieren soll.

4.2.3 Leibnizkriterium

Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

4.2.4 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiert absolut*, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

4.2.5 Gleiches Konvergenzverhalten

Sind $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen, und gilt $a_k = b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, so haben die beiden Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$,$(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ das *gleiche Konvergenzverhalten*

- die Grenzwerte der Reihen können verschieden sein
- die Grenzwerte der Folgen sind gleich

4.2.6 Majorantenkriterium

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen mit $|a_k| \leq |b_k|$ für fast alle k, und wenn $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

- Analog *Minorantenkriterium* um zu zeigen, dass eine Reihe nicht konvergiert

4.2.7 Quotientenkriterium

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe, und gibt es $\Theta \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \Theta < 1$ so dass für fast alle k gilt $|a_{k+1}| \leq \Theta |a_k|$. Dann konvergiert die Reihe absolut. Ist jedoch $\left\{k \in \mathbb{N} \middle| \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1\right\}$ eine unendliche Menge divergiert die Reihe. Ansonsten lassen sich keine Aussagen machen.

- Das Θ muss fest gewählt werden für alle k
- oft auch so geschrieben:
  $\exists 0 \leq \Theta < 1, \Theta \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \Theta \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut
- Falls der folgende Grenzwert existiert, muss zusätzlich gelten:
  $\limsup_k \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$

4.2.8 Wurzelkriterium

Gibt es ein $\Theta \in \mathbb{R}$ mit $\Theta < 1$ so, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \Theta$ für fast alle n, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

$$\exists \Theta < 1, \Theta \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \leq \Theta$$

Falls für fast alle n $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ ist, divergiert die Reihe.

- Für sowohl unendlich viele kleinere, als auch größere Glieder lässt sich keine allgemeine Aussage machen.

4.2.9 Verdichtungssatz von Cauchy

Sei $(a_n)_n$ eine positive, monoton fallende Folge. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergent}$$

4.2.10 Addition von Reihen

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, so auch $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$, mit dem Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$.

4.2.11 Cauchy-Produkt

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen, definieren wir ihr *Cauchy-Produkt* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ durch $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, dann ist ihr Cauch-Produkt ebenfalls absolut konvergent und im Grenzwert gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$.

- Entspricht dem Ausmultiplizieren von zwei geklammerten Summentermen.

4.2.12 Funktionalgleichung der Exponentialfunktion / Logarithmus

$$\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$
- $\exp(0) = 1$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
- $\exp(x)$ ist stetig und streng monoton wachsend
- Umkehrfunktion: natürlicher Logarithmus
  - $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

- ist stetig und streng monoton steigend
- $\exp(\ln(x)) = \mathrm{id}|_{\mathbb{R}_{>0}}$
- $\ln(\exp(x)) = \mathrm{id}|_{\mathbb{R}}$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y)$

Die exp-Funktion und der natürliche Logarithmus sind *Gruppenisomorphismen*. Sie transformieren von einer kommutativen Gruppe in eine andere.

$$(\mathbb{R}, +, 0) \leftrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$$

4.2.13 Wichtige Reihen

geometrische Reihe $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

- Ist innerhalb ihres Konvergenzradius stetig.
- $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

alternierende harmonische Reihe
$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = \ln 2$

Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \exp(x) = e^x$

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$
- siehe 4.2.12 auf der vorherigen Seite

Sonstige

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

5 Reelle Funktionen

5.1 Stetigkeit

5.1.1 Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine Folge von Elementen $(a_n)_{n \in I}$ von Elementen aus A *konvergiert in* A, falls sie gegen ein Element $a \in A$ konvergiert.

Es sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir sagen f ist *stetig* im Punkt $a \in A$, falls folgendes gilt: Für jede Folge $(a_n)_{n \in I}$, die in A gegen a konvergiert, gilt $\lim_{n \in I} f(a_n) = f(a)$.

Äquivalent dazu ist

$$\forall a \in A : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : U_\delta(a) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$$

Falls f in jedem Punkt $a \in A$ stetig ist, heißt f *stetig*.

- Bei stetigen Funktionen gilt:
  $f(\lim_n a_n) = \lim_n f(a_n)$
- Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig genau dann, wenn man "ihr Schaubild ohne Abzusetzen zeichnen kann".

5.1.2 Reelle Algebren

Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sei $\mathbb{R}^A$ die Menge aller Abbildungen $A \to \mathbb{R}$. Für $f, g \in \mathbb{R}^A$ und $r \in \mathbb{R}$ schreibe

1. $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
2. $f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$
3. $r \cdot f : x \mapsto r \cdot f(x)$

Mit 1. und 3. ist $\mathbb{R}^A$ ein reeller Vektorraum, die Vektoren sind Funktionen. Mit 1. und 2. ist $\mathbb{R}^A$ ein kommutativer Ring (das Einselement ist die Funktion $x \mapsto 1$). Beides zusammen sagt, dass $\mathbb{R}^A$eine (kommutative und assoziative) *reelle Algebra* ist.

5.1.3 stetige Funktionen

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, und sei $C(A, \mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen auf A.

$$C(A, \mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathbb{R}^A | f \text{ ist stetig} \right\}$$

$C(A, \mathbb{R})$ ist eine reelle Algebra.

5.1.4 gleichmäßig stetig

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $u, v \in [a, b]$ mit $|u - v| \leq \delta$ gilt $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$. Mit Quantoren:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall u, v \in [a, b] : |u - v| \leq \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$$

- Alle gleichmäßig stetigen Funktionen sind auch stetig
- Alle stetigen Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen sind gleichmäßig stetig
- gleichmäßige Stetigkeit besagt anschaulich in etwa, dass die Steigung der Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich endlich ist.
- nicht mit gleichmäßiger Konvergenz verwechseln!

5.1.5 Beispiele für stetige Funktionen

- Eine *Polynomfunktion* ist eine Abbildung der Form $p : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Polynomfunktionen sind stetig.
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig
- Die *Wurzelfunktion* ist stetig. Für $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x = \sqrt[n]{x} = g(x)$ wobei $g(x)$ die Umkehrfunktion von x^n ist.
- Die e-Funktion ist stetig. Siehe 4.2.12 auf der vorherigen Seite.

5.1.6 Kompostion von Funktionen

Sind $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ stetig, und gilt $f(A) \subseteq B$, so ist die Hintereinanderausführung (Komposition)

$$A \to^f B \to^g \mathbb{R}$$

ebenfalls stetig. Schreibe für die Komposition $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$

5.1.7 Einschränkung

Ist $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, betrachte die *Einschränkungsabbildung*

$$\mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^B, f \mapsto f|_B$$

"f eingeschränkt auf B" mit

$$f|_B : B \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

Dies ist eine lineare Abbildung denn $(f+g)|_B = f|_B + g|_B$ und $(f \cdot g)|_B = f|_B \cdot g|_B$ gilt. Einschränkungen von stetigen Funktionen sind stetig.

5.1.8 Zwischenwertsatz

Sei $I = [a, b]$ ein (abgeschlossnes endliches) Intervall. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zu jeder Zahl y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $x \in I$ mit $f(x) = y$. Mit Quantoren:

$$\forall y \in [f(a), f(b)] : \exists x \in I : f(x) = y$$

- Mithilfe der Einschränkung kann dieser Satz auch Erweitert werden aus das Intervall $[\min(f(x)), \max(f(x))]$

5.1.9 Umkehrfunktion

Sei $I = [a, b]$ ein (abgeschlossenes endliches) Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend), d.h. $r < s \Rightarrow f(r) < f(s)$ (bzw. $r > s \Rightarrow f(r) > f(s)$). Dann hat f eine stetige *Umkehrfunktion* $g : [f(a), f(b)] \to I$. D.h. $g \circ f = id_I$ und $f \circ g = id_{[f(a), f(b)]}$.

5.1.10 Satz von Weierstrass

Sei $I = [a, b]$ ein (abgeschlossenes endliches) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I) = J$ ebenfalls ein endliches abgeschlossenes Intervall.

- Dieses f besitzt folglich im Intervall J ein Minimum und ein Maximum.

5.2 Funktionenfolgen

5.2.1 Definition

Für $A \subseteq \mathbb{R}$ betrachten wir Folgen von Funktionen in $\mathbb{R}^A$ bzw. in $C(A, \mathbb{R})$ d.h. Abbildungen $L \to \mathbb{R}^A$ $L \subseteq \mathbb{N}$ Indexmenge (unendlich) $(f_l)_{l \in L}$. Jedes f_l ist also eine Abbildung $f_l : A \to \mathbb{R}$.

5.2.2 Konvergenz

Eine Folge $(f_l)_{l \in L}$ von Funktionen *konvergiert punktweise* gegen eine Funktion f, falls gilt

$$\forall x \in A : \lim_{l \in L} f_l(x) = f(x)$$

Eine Folge $(f_l)_{l \in L}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen f , falls folgendes gilt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $x \in A$ und alle $l \in L$ mit $l \geq n$ gilt $|f_l(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Mit Quantoren:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall x \in A, l \in L, l \geq n : |f_l(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

- gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz
- Sei $A \subseteq \mathbb{R}, (f_l)_{l \in L}$ eine Folge stetiger Funktionen. Falls die Folge gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, ist dieses f auch stetig.
- nicht mit gleichmäßiger Stetigkeit verwechseln!

5.2.3 Potenzreihe

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Betrachte die stetige Funktion $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ auf $\mathbb{R}$. Die Funktionenfolge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *formale Potenzreihe*

und man schreibt kurz dafür $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Setze $L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ bzw. $L = \infty$ falls es keinen größten Häufungspunkt gibt. Setze weiter $R = \frac{1}{L}$ falls $L \neq 0, L \neq \infty$ sonst $R = \infty$ für $L = 0$ und $R = 0$ für $L = \infty$. R heißt *Konvergenzradius* der Potzenzreihe.

Für $|x| < R$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ absolut konvergent, und die Funktionsfolge $p_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ist gleichmäßig konvergent auf $\{x \in \mathbb{R} | -r < x < r\}$ für $r < R$. Somit ist $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ eine stetige Funktion für $|x| < R$.

Für $|x| > R$ divergiert die Potenzreihe.

- Für $|x| = R$ kann man keine allgemeinen Aussagen machen
- Falls folgender Grenzwert existiert, gilt: $R = \lim_k \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$
- Zu einer Funktion gibt es immer höchstens eine Potenzreihe.

5.3 Trigonometrische Funktionen

5.3.1 Sinus und Cosinus

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\end{aligned}$$

- sind konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\cos(0) = 1$
  $\sin(0) = 0$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
  $\sin(-x) = -\sin(x)$

5.3.2 Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
- $\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- $\cos(x)' = -\sin(x)$
  $\sin(x)' = \cos(x)$

5.3.3 PI π

Die kleinste positive Nullstelle des Cosinus heißt per Definition $\frac{\pi}{2}$. Auf diese Weise definieren wir die Zahl $\pi \approx 3,14519\dots$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
- $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$
  $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$
- $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
  $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$

5.3.4 Hyperbolische Trigonometrische Funktionen

Cosinus Hyperbolicus

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Sinus Hyperbolicus

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- Haben ihre Namen auf grund Ihrer Ähnlichkeit zu der Sinus und Cosinusreihe
- Tangens Hyperbolicus: $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
- Cotangens Hyperbolicus: $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$
- Umkehrfunktionen: Arearfunktion existieren für alle Trigonometrischen Funktionen, da diese alle streng monoton und stetig sind (zumindest auf einem Teilintervall)
- $\forall n \in \mathbb{N} : (\sinh(x) + \cosh(x))^n = \sinh(nx) + \cosh(nx)$
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
- $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
- $\forall x \in (-1,1) : \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
- $\sinh(x)' = \cosh(x)$
  $\cosh(x)' = \sinh(x)$
- $\cosh(\operatorname{arcsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$
  $\sinh(\operatorname{arccosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$

5.3.5 Hermite-Polynome

Die sogenannten *Hermite-Polynome* H_n sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},\ n \in \mathbb{N}$$

wobei $\frac{d^n}{dx^n} f$ die n-te Ableitung von f nach x bezeichnet.

- $H_0 = 1$
  $H_1 = 2x$
  $H_2 = 4x^2 - 2$
  $H_3 = 8x^3 - 12x$
  $H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12$
- $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$
- $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$
- $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$
- Für $f_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ gilt $x^2 f_n(x) - f_n''(x) = (2n+1)f_n(x)$
- Die e-Funktionen kürzen sich nach dem Ableiten herraus

6 Integration

6.1 beschränkte Funktionen

6.1.1 Definition beschränkte Funktion

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls $f(A) = \{f(a) | a \in A\}$ beschränkt ist. D.h. falls es eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|f(a)| \leq k$ für alle $a \in A$.

$$f \text{ beschränkt } \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \forall a \in A : |f(a)| \leq k$$

Sei $B(A, \mathbb{R}) = \left\{f \in \mathbb{R}^A | f \text{ ist beschränkt}\right\}$ die Menge aller beschränkten Funktionen.

$B(A, \mathbb{R})$ ist ein reeller Vektorraum und ein Ring, d.h. es gilt $\forall f, g \in B(A, \mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$:

1. $f + g \in B(A, \mathbb{R})$
2. $f \cdot g \in B(A, \mathbb{R})$
3. $c \cdot f \in B(A, \mathbb{R})$

- Ist der Definitionsbereich ein endliches abgeschlossenes Intervall, dann gilt $C([a, b], \mathbb{R}) \subsetneq B([a, b], \mathbb{R})$. D.h. dass die stetigen Funktionen eine (echte) Teilmenge der beschränkten Funktionen sind.

6.1.2 Supremumsnorm

Für $f \in B(A, \mathbb{R})$ setzte

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(a)| \, | a \in A\}$$

$\|f\|_\infty$ heißt *(Supremums-)Norm* der Funktion f.

- $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall a \in A : f(a) = 0$
- Dreiecksungleichung
  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$
- $\forall c \in \mathbb{R} : \|c \cdot f\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty$
- $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$
- $(B(A, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ ist ein *normierter Vektorraum* und sogar eine *normierte Algebra* dank der Produkteigenschaft der Norm.

6.1.3 gleichmäßige Konvergenz

Ist $(f_n)_{n \in L}$ eine Folge von Funktionen in $B(A, \mathbb{R})$, so konvergiert diese Folge gleichmäßig gegen $f \in B(A, \mathbb{R})$ genau dann, wenn gilt $\lim_n \|f - f_n\|_\infty = 0$.

6.1.4 Cauchy-Folge

Eine Folge $(f_n)_{n \in L}$in $B(A, \mathbb{R})$ heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_l - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $l, m \geq n$.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall l, m \geq n : \|f_l - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

- Eine Folge $(f_l)_{l \in L}$ in $B(A, \mathbb{R})$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn sie gegen eine Funktion $f \in B(A, \mathbb{R})$ gleichmäßig konvergiert.
- Im normierten Raum $(B(A, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ konvergiert jede Cauchyfolge. Man nennt den Raum daher *vollständig* oder *Banachraum.*

6.1.5 Zerlegung

Eine *Zerlegung* Z von $[a, b]$ ist eine enliche Folge $Z = \{a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b\}$. Eine andere Zerlegung Z' heißt *feiner* als Z falls $Z' \supseteq Z$.

- Falls Z_1 und Z_2Zerlegungen von $[a, b]$ sind, so auch $Z_1 \cup Z_2$, welche feiner ist als Z_1 und Z_2.

6.1.6 Stufenfunktion

Eine Funktion $f \in B([a, b], \mathbb{R})$ heißt *Stufenfunktion* (bzgl. Zerlegung Z) falls

$$f(x) = \begin{cases} y_k & \text{falls } a_k < x < a_{k+1} \\ w_k & \text{falls } x = a_k \end{cases}$$

Die Menge aller Stufenfunktionen wird mit $\operatorname{Step}([a, b], \mathbb{R}) \subsetneq B([a, b], \mathbb{R})$ bezeichnet.

- Falls f eine Stufenfunktion bzgl. Z ist, und falls Z' feiner als Z ist, dann ist f auch Stufenfunktion bzgl. Z'
- Eine Stufenfunktion muss *endlich viele* Stufen haben
- Ist f Stufenfunktion bzgl. Z_1 und g Stufenfunktion bzgl. Z_2, dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und $c \cdot f$ (für $c \in \mathbb{R}$) Stufenfunktionen bzgl. $Z_1 \cup Z_2$.
- $\operatorname{Step}([a, b], \mathbb{R}) < B([a, b], \mathbb{R})$ ist Untervektorraum der beschränkten Funktionen. Außerdem ist diese Menge ein Ring. Somit also eine Algebra.
- Die Einschränkung einer Stufenfunktion ist wieder eine Stufenfunktion.

6.1.7 Charakteristische Funktion

Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen, so heißt die Funktion

$$\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* der Menge X.

6.2 Integral

6.2.1 Integral für Stufenfunktionen

Für eine Stufenfunktion f

$$f(x) = \begin{cases} y_k & \text{falls } a_k < x < a_{k+1} \\ w_k & \text{falls } x = a_k \end{cases}$$

bzgl. einer Zerlegung Z

$$Z = \{a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b\}$$

definieren wir das *Integral* folgendermaßen:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{r-1} (a_{k+1} - a_k)\, y_k$$

- w_k spielen für das Integral keine Rolle
- Für $Z' \supseteq Z$ Verfeinerung, kommt für das Integral über f bzgl. Z' der *gleiche* Wert heraus.
- Das Integrieren ist eine lineare Abbildung. Es gilt also:
  - $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
  - $\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$
  - Achtung, für Produkte gilt dies *nicht*
- Sind f, g Stufenfunktionen und gilt $\forall x \in [a,b]; h_1(x) \leq h_2(x)$ dann folgt: $\int_a^b h_1(x)\, dx \leq \int_a^b h_2(x)\, dx$
- $\int_a^b (f-g)(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \leq \|f-g\|_\infty (b-a)$

6.2.2 Regelfunktionen

Eine beschränkte Funktion f heißt *Regelfunktion*, falls es eine Folge von Stufenfunktionen f_n gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir sagen dann, diese Stufenfunktion *approximiert* die Regelfunktion f. Es sei $R([a,b], \mathbb{R}) < B([a,b], \mathbb{R})$ die Menge aller Regelfunktionen.

- $R([a,b], \mathbb{R})$ ist ein (Folgen-)Vollständiger normierter Vektorraum (bzgl. $\|.\|_\infty$)
- falls $(f_n)_{n\in L}$und $(g_n)_{n\in L}$ Folgen in Step $([a,b], \mathbb{R})$, die die gleiche Regelfunktion approximieren, so gilt $\lim_n \|f_n - g_n\|_\infty = 0$
- Alle stetigen Funktionen auf endlich abgeschlossenen Intervallen sind Regelfunktionen:
  $C([a,b], \mathbb{R}) \subsetneq R([a,b], \mathbb{R})$
- Ist ein Ring bzg. Addition und Multiplikation.

6.2.3 Integral allgemein

Ist f eine Regelfunktion und $(f_n)_{n\in L}$ eine Folge von Stufenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)\, dx$$

- Dieser Grenzwert existiert
- Ist unabhängig von der konkreten Wahl der Stufenfunktion
- Dieser Ausdruck heißt *Riemann-Integral* von f, es gibt noch weitere Integraldefinitionen
- Sind f, g Regelfunktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

6.2.4 Stufenfunktionsfolge zu gegebener stetiger Funktion

Die Menge

$$Z_n = \left\{a_0 = a < a_1 = a + \frac{b-a}{n} < a_2 = a + 2\frac{b-a}{n} < \ldots < a_n = b\right\} \subseteq [a,b]$$

nennt sich eine *äquidistante Zerlegung* der Intervalls $[a,b]$. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktionsfolge

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\, \chi_{[a_k, a_{k+1})}(x)$$

von Stufenfunktionen konvergiert gleichmäßig gegen f, d.h. $\lim_n \|f - f_n\|_\infty = 0$.

Das Integral ist hiermit also:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_n \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

- Dies ist *keine* praktikabele Methode zum symbolischen errechnen des Integrals, aber es ist eine Basis für numerische Verfahren.
- für manche Funktionen können auch andere Zerlegungen von Vorteil sein

6.2.5 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Sei $f, g \in R([a,b], \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$
$$\leq \int_a^b \|f\|_\infty\, dx = \|f\|_\infty (b-a)$$

6.2.6 Mittelwertsatz (MWS) der Integralrechnung

Sei $p \in R([a,b],\mathbb{R})$ und $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und es gelte $p(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gibt es $t \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(t)\int_a^b p(x)\,dx$$

- $\int_a^b f(x)\,dx = f(t)(b-a)$ mit $t \in (a,b)$

6.2.7 Hierarchie von Funktionsräumen

$$\begin{tikzcd}
 & B([a,b],\mathbb{R}) & \\
 & R([a,b],\mathbb{R}) \arrow[u] & \\
C([a,b],\mathbb{R}) \arrow[ur] & & \mathrm{Step}([a,b],\mathbb{R}) \arrow[ul] \\
 & \{\text{konstante Funktionen}\} \cong \mathbb{R}^1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- Die Pfeile $A \to B$ deuten an, dass $A \leq B$ (A ein Untervektorraum von B ist)
- $\{\text{konstante Funktionen}\} = C([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathrm{Step}([a,b],\mathbb{R})$
- Bis auf den Raum der konstanten Funktionen sind dies alles unendlichdimensionale Vektorräume
- Zwischen $B([a,b],\mathbb{R})$ und $R([a,b],\mathbb{R})$ liegen noch weitere integrierbare Funktionen, allerdings mit anderen Integraldefinitionen.
- Alle Vektorräume bis auf $\mathrm{Step}([a,b],\mathbb{R})$ sind vollständig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$

7 Differentiation

7.1 Differentiation

7.1.1 Stetige Fortsetzung

Sei $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Für $f \in C(B,\mathbb{R})$ betrachte die *Einschränkung* $f|_A : A \to \mathbb{R} : a \mapsto f(a)$ mit $f|_A \in C(A,\mathbb{R})$. D.h. wir haben eine lineare Abbildung $C(B,\mathbb{R}) \to C(A,\mathbb{R}) : f \mapsto f|_A$.

Umgekehrte Fragestellung: gegeben $g \in C(A,\mathbb{R})$, gibt es $f \in C(B,\mathbb{R})$ mit $f|_A = g$? Dieses f wird als *stetige Fortsetzung* von g bezeichnet.

- $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist im Punkt 0 nicht stetig fortsetzbar.

7.1.2 Häufungspunkt von Mengen

Wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in L}$ in $A\setminus\{b\}$ gibt mit $\lim_n a_n = b$ dann heißt b Häufungspunkt der Menge A.

7.1.3 Stetige Fortsetzung in Punkt

Ist $b \in \mathbb{R}$ und $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B = A \cup \{b\}$, und gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in L}$ in A mit $\lim_n a_n = b$, dann hat jedes $f \in C(A,\mathbb{R})$ *höchstens eine* stetige Fortsetzung auf $B = A \cup \{b\}$ mit $f(b) = \lim_{n\in L} f(a_n)$.

- Besagt nur, dass *wenn* es möglich ist, auch eindeutig ist.
- Falls b Häufungspunkt der Menge A ist, dann ist $C(A\cup\{b\},\mathbb{R}) \to C(A,\mathbb{R})$ injektiv.
- Bei Funktionen auf endlichen Mengen ist f immer stetig. Die Fortsetzung in endlich vielen Punkten ist beliebig (also nicht eindeutig), und ebenfalls stetig.

7.1.4 differenzierbar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f \in C(U \to \mathbb{R})$ und $x_0 \in U$ Die Funktion f heißt *differenzierbar* in x_0, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für die Funktion

$$(-\varepsilon,\varepsilon)\setminus\{0\} \to \mathbb{R} : h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

eine stetige Fortsetzung

$$p : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$$

existiert. $p(0)$ nennt man die Ableitung von f im Punkt x_0. Man schreibt hierfür

$$p(0) = f'(x_0) = \dot{f}(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

- Die Ableitung ist *eindeutig*
- Es gibt stetige Funktionen, die in keinem Punkt differenzierbar sind!

7.1.5 differenzierbar Umformulierung

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig, und $x_0 \in U$. Dann ist f in x_0 differenzierbar genau dann, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt und eine stetige Funktion $\varphi : (-\varepsilon,\varepsilon)$ mit $\varphi(0) = 0$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + c\cdot h + \varphi(h)\cdot h$$

für $|h| < \varepsilon$. Dann gilt $f'(x_0) = c$

7.1.6 Ableitung / stetig differenzierbar

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, falls sie in jedem Punkt $x \in U$ *differenzierbar* ist. Dann heißt die Funktion

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

(erste) *Ableitung* von f.

Falls $f'(x)$ auch stetig ist, heißt f *stetig differenzierbar*.

7.1.7 Rechenregeln

Seien $f, g \in C(U, \mathbb{R})$ und in $x_0 \in U$ differenzierbar. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Funktionen ebenfalls in x_0 differenzierbar:

1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
3. Produktregel
   $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4. Leibnizregel
   $\frac{d^n}{dx^n}(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
6. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
7. Ableitung der Umkehrfunktion
   $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

- $\forall n \in \mathbb{Z} : (x^n)' = nx^{n-1}$
- $\cos(x)' = -\sin(x)$
  $\sin(x)' = \cos(x)$
  $\exp(x)' = \exp(x)$
- $\sinh(x)' = \cosh(x)$
  $\cosh(x)' = \sinh(x)$

7.1.8 Struktur der Ableitung

Es sei $C^1(U, \mathbb{R})$ die Menge aller (einmal) stetig differenzierbaren Funktionen auf U. $C^1(U, \mathbb{R})$ ist ein reeller Vektorraum und ein Ring (bzgl. Produkt), also eine reelle Algebra.

Die folgenden Abbildungen

$$\frac{d}{dx} : C^1(U, \mathbb{R}) \to C(U, \mathbb{R}) : f \mapsto f'$$

$$\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=x_0} : C^1(U, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto f'(x_0)$$

sind lineare Abbildungen.

- aber *keine* Ring Homomorphismen
- siehe auch 7.1.17 auf der nächsten Seite

7.1.9 Kettenregel

Sei $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ und U, V offen, f, g stetig mit $f(U) \subseteq V$. Falls f in x_0 differenzierbar und falls g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar ist, so ist die Verknüpfung $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, mit Ableitung

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

- $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0))$

7.1.10 Ableitung der Umkehrfunktion II.78

Die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei streng monoton und in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$ in $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bzw.

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Ist f stetig differenzierbar, dann ist auch f^{-1} stetig differenzierbar.

- Möglichst f in der Ableitung f' wieder vorkommen lassen, da dies sich anschließend mit Hilfe der Umkehrfunktion gegenseitig aufhebt. Z.B. $\tan(x)' = 1 + \tan^2(x)$.

7.1.11 Extrema

$f(x_0)$ heißt *Extremum* (*Minimum* / *Maximum*) von f, falls $f(x) \geq f(x_0)$ bzw. $f(x) \leq f(x_0)$ für alle x im Definitionsbereich gilt.

Wenn f (auf offener Menge definiert) in x_0 ein Extremum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung).

- Randpunkte bei abgeschlossenen Mengen müssen seperat betrachtet werden.
- Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $f'(x_0) = 0$ und ist $f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_0$ so hat f in x_0 ein Minimum und $f(x) > f(x_0)$ für $x \neq x_0$. (Es gibt genauso einen Satz für das Maximum)

7.1.12 striktes lokales Minimum / Maximum

Ist f zweimal stetig differenzierbar, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, und gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (< 0), so gibt es $r > 0$, so dass $f(x_0) < f(x)$ $(> f(x))$ für alle $x \neq x_0$ mit $|x - x_0| < r$ gilt. Man sagt, f hat in x_0 ein *striktes lokales Minimum* (*Maximum*).

7.1.13 Monotonie

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und ist $f'(x_0) = c > 0$ (< 0), dann gibt es $r > 0$, so dass f auf dem Teilintervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ streng monoton steigend (fallend) ist.

- Insbesondere ist f streng monoton steigend (fallend), falls $\forall x : f'(x) > 0$ (< 0)
- mit $\leq, \geq$ gleiche Aussage mit monotonie (ohne streng)
- falls $f' = 0 \Rightarrow f$ konstant

7.1.14 Satz von Rolle

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{(a,b)}$ sei differenzierbar. Weiter gelte $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es ein x_0 mit $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = 0$

7.1.15 Mittelwertsatz (MWS) der Differentialrechung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f|_{(a,b)}$ sei differenzierbar.

Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

- falls $f'(x) \geq 0$ für alle x, so ist f monoton steigend
- falls $f'(x) \leq 0$ für alle x, so ist f monoton fallend
- falls $f'(x) = 0$ für alle x, so ist f konstant.

7.1.16 gerade und ungerade Funktionen

- Die Ableitung einer geraden Funktion ist eine ungerade Funktion
- Die Ableitung einer ungeraden Funktion ist eine gerade Funktion

7.1.17 mehrfache Ableitung / glatte Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Ist $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ (d.h. f ist stetig differenzierbar), so kann man $f' \in C(U, \mathbb{R})$ auf differenzierbarkeit untersuchen. Falls f' stetig differenzierbar ist, schreibt man $(f')' = f''$ für die *zweite Ableitung*.

Induktiv definiert man so *k-mal stetig differenzierbare Funktionen*. $C^k(U, \mathbb{R})$ ist der Vektrorraum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Man setzt

$$C^\infty\infty(U, \mathbb{R}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U, \mathbb{R})$$

solche Funktionen heißen *glatte Funktionen*.

Setze $C(U, \mathbb{R}) = C^0(U, \mathbb{R})$. Hiermit gilt:

$$C^0(U, \mathbb{R}) \supsetneq C^1(U, \mathbb{R}) \supsetneq \ldots \supsetneq C^\infty(U, \mathbb{R})$$

Der *Ableitungsoperator*

$$\frac{d}{dx} : f \mapsto f'$$

$$\frac{d}{dx} : C^{k+1}(U, \mathbb{R}) \to C^k(U, \mathbb{R})$$

$$\frac{d}{dx} : C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$$

ist eine lineare Abbildung zwischen diesen Vektorräumen

- Polynome $\sin, \cos, \exp$ sind glatte Funktionen
- siehe auch 7.1.8 auf der vorherigen Seite

8 Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

8.1 Weitere Eigenschaften des Integrals

8.1.1 Integral über Einschränkung

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion und $a \leq u < v \leq b$. Dann ist die Einschränkung $f|_{[u,v]}$ eine Regelfunktion auf $[u, v]$. Wir setzen

$$\int_u^v f(x)\, dx = \int_a^b f|_{[u,v]}(x)\, dx$$

8.1.2 Vertauschung von Grenzen

Wir legen fest:

$$\int_u^u f(x)\, dx = 0$$

$$\int_v^u f(x)\, dx = -\int_u^v f(x)\, dx \text{ für } u < v$$

8.1.3 Zerteilung von Integralen

Für alle $a, b, c \in [a, c]$ und $f \in R([a, c], \mathbb{R})$ gilt stets

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

8.1.4 Integral über Funktionsfolge

Sei $(f_n)_{n\in L}$ eine Folge von Regelfunktionen, die gleichmäßig gegen eine Regelfunktion f konvergiert. Dann gilt

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

- eine solche Regel gilt bei der Differentiation im Allgemeinen nicht.

8.1.5 Differential von Funktionenfolgen

Sei $(f_n)_{n\in L}$ Folge in $C^1([a,b],\mathbb{R})$. Falls die Folge $(f_n')_{n\in L}$ gleichmäßig konvergiert und falls die Folge $(f_n)_{n\in L}$ punktweise konvergiert, dann ist der Grenzwert der Folge stetig differenzierbar und seine Ableitung ist der Grenzwert der Folge $(f_n')_{n\in L}$.

8.1.6 gerade und ungerade Funktionen

- Die Stammfunktion einer geraden Funktion ist eine ungerade Funktion
- Die Stammfunktion einer ungeraden Funktion ist eine gerade Funktion
- wenn $f(x) = -f(-x)$ ungerade ist, gilt $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

8.2 Zusammenhang von Differential- und Integeralrechung

8.2.1 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechung

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, sei $x_0\in[a,b]$. Setze

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

für $x\in[a,b]$.

F ist stetig und auf (a,b) stetig differenzierbar, mit $F' = f$.

8.2.2 Stammfunktion

F heißt *Stammfunktion* zu f, falls $F' = f$.

- Stammfunktionen sind bis auf Konstante eindeutig. Wenn F Stammfunktion von f ist, ist auch $F+c$ Stammfunktion für f mit $c\in\mathbb{R}$ konstant.

8.2.3 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechung

Ist $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $a<u<v<b$, gilt

$$\int_u^v F'(x)\,dx = F(x)\,|_u^v = F(v) - F(u)$$

8.2.4 Integral einer Potenzreihe

Ist $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ und hat diese Potenzreihe einen Konvergenzradius R. Für $[a,b]\subseteq(-R,R)$ gilt

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^\infty a_k x^k\right) dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\Bigg|_a^b$$

- Eine Stammfunktion für f ist also z.B. $F(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k+1}x^{k+1} + c$
- Potenzreihen darf man “naiv” integrieren

8.2.5 Ableitung einer Potenzreihe

Ist $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$, so ist f glatt, und

$$f'(x) = \sum_{k=0}^\infty (k+1)\,a_{k+1}x^k$$

mit dem gleichen Konvergenzradius R.

- Potenzreihen darf man “naiv” ableiten

8.2.6 Partielle Integration

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- Das ist das Integral über der Produktregel
- g und f auf jeden Fall incl. Ableitungen herausschreiben
  - auf jeden Fall Probe (Ableiten) machen, man vertut sich sehr schnell
  - $p(x)\,e^x$ bzw. $p(x)\sin(x)$, ... sind auf diese Weise behandelbar
- Auf jeden Fall Probe!!!

8.2.7 Integration durch Substitution

$$\int f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\ dt = \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=\phi(t)}$$

$$\int f(x)\ dx = \left(\int f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\ dt\right)_{t=\phi^{-1}(x)}$$

1. Gebrauchsanweisung
   (a) Eine passende Ersetzung suchen
      i. $t = g(x)$
      ii. diese Ableiten $\frac{dt}{dx} = g'(x) = \ldots$
      iii. umstellen $dx = \frac{dt}{g'(x)} = \ldots$
   (b) Im Integral Substituieren mit Hilfe von (a).i (bzw. $x = g^{-1}(t) = \ldots$) und (a).iii

(c) Versuchen Stammfunktion zu bilden

i. wenn es nicht klappt, evtl. andere Substitution versuchen

ii. evtl. passend klammern, um bekannte Integrale zu Nutzen

(d) Im Ergebnis (Stammfunktion) zurücksubstituieren mit (a).i

2. Gebrauchsanweisung

(a) Eine passende Ersetzung suchen

i. $x = \phi(t)$

ii. diese Ableiten $\frac{dx}{dt} = \phi'(t) = \ldots$

iii. umstellen $dx = \phi'(t)\,dt = \ldots$

(b) Umkehrfunktion bilden $t = \phi^{-1}(x)$

(c) Im Integral Subtituieren mit Hilfe von (a).i und (a).iii

(d) Versuchen Stammfunktion zu bilden

i. wenn es nicht klappt, evtl. andere Substitution versuchen

ii. evtl. passend klammern, um bekannte Integrale zu Nutzen

(e) Im Ergebnis (Stammfunktion) zurücksubstituieren mit (a).i

- Beide Methoden äquivalent durch Regel der Ableitung der Umkehrfunktion.
- In der Tabelle 1 auf der nächsten Seite hat man eine Übersicht von geeigneten Substitutionen.
- So Klammern und Substituieren, das es auf etwas bekanntes (z.B. Ableitungen von Trigonometrischen-, Hyperbolischen- oder Areafunktioen) zurückführen lässt.
- Auf jeden Fall Probe!!!

8.2.8 Beispiele einiger Integrale

- für $n \neq -1$
  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$
- $\int \frac{h'(x)}{h(x)} dx = \ln(h(x))$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$
- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$
- $\int \exp(x)\,dx = \exp(x)$
- $\int \cos^2(x)\,dx = \frac{x+\sin(x)\cos(x)}{2}$
  $\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}$

9 Metrische und nomierte Räume

9.1 Metrische Räume

9.1.1 Metrik / Metrischer Raum

Sei X eine Menge, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir nennen d eine *Metrik* (mathematischer Term für "Abstandsbegriff") und (X, d) einen *metrischen Raum*, falls für alle $u, v, w \in X$ gilt:

1. $(M1)$ $d(u,v) = d(v,u) \geq 0$
   die Metrik ist positiv und symmetrisch
2. $(M2)$ $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
3. $(M3)$ $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$
   Dreiecksungleichung

- $X = \mathbb{R}$ $d(u,v) = |u - v|$ ist ein metrischer Raum
- X belibige Menge mit $X \neq \emptyset$ und $d(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } u = v \\ 1 & \text{falls } u \neq v \end{cases}$ ist ein metrischer Raum, mit der *diskreten Metrik*.
- $X = \mathbb{R}^2 = \{(u_1, u_2) \,|\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$, $d((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|$ ist ein metrischer Raum mit der *Manhattan-Taxi-Metrik*.
- *Unterraum*
  Ist (X, d) ein metrischer Raum, und ist $A \subseteq X$, dann ist der Unterraum (A, d) ebenfalls ein metrischer Raum.

9.1.2 offene Kugel

Sei (X, d) metrischer Raum, $r > 0$ und $x \in X$. Die Menge

$$B_r(X) = \{u \in X | d(u, x) < r\}$$

heißt *offene r-Kugel um x*.

9.1.3 Folgen und Konvergenz

Sei $J \subseteq \mathbb{N}$ unendliche Menge, (X, d) ein metrischer Raum. Eine *Folge*, $(x_j)_{j \in J}$ ist eine Abbildung $J \to X$, $j \mapsto x_j$. Schreibe kurz $(x_j)_{j \in J} \subseteq X$ dafür.

Die Folge $(x_j)_{j \in J}$ *konvergiert* gegen $x \in X$, falls gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k \geq N$ gilt $d(x_k, x) \leq \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : d(x_k, x) \leq \varepsilon$$

- Für $X = \mathbb{R}$, $d(u,v) = |u - v|$ ist dies genau die Definition aus 3.2.2 auf Seite 11.

Tabelle 1: Substitution zur unbestimmten Integration (R ist eine rationale Funktion in x, y)

Funktion	Methode	t	x
$R(x)$	Polynomdivision + Partialbruchzerlegung		
$R\left(x, \sqrt[k]{ax+b}\right)$	Substitution	$t = \sqrt[k]{ax+b}$	$x = \frac{t^k}{a} - \frac{b}{a}$
$R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$	Substitution	$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	$x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a}$
$R(\sin(ax), \cos(ax))$	Substitution	$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$x = 2\arctan(t)$
$R(e^{ax}, e^{-ax})$	Substitution	$t = e^{ax}$	$x = \frac{\ln(t)}{a}$
$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$	Substitution	$t = \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$ bzw. $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$	

- Lässt sich auch so schreiben:
  Die Folge konvergiert genau dann gegen x, falls es zu jedem $r > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_k \in B_r(x)$ für alle $k \geq N$.

$$\forall r > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : x_k \in B_r(x)$$

- Eine Folge hat genau eine Zahl:
  Sei (X, d) metrischer Raum, $(x_j)_{j \in J}$ Folge. Falls die Folge gegen $x \in X$ und gegen $y \in X$ konvergiert, so gilt $x = y$.
- Konvergente Folgen auf Räumen mit einer diskreten Metrik sind für fast alle Folgenglieder konstant.

9.1.4 Cauchy-Folge

(CF) Es sei $(x_j)_{j \in J}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d). Wir sagen, $(x_j)_{j \in J}$ ist eine *Cauchy-Folge* falls gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_l, x_m) \leq \varepsilon$ für alle $l, m \geq N$.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall l, m \geq N : d(x_l, x_m) \leq \varepsilon$$

- Jede konvergente Folge in (X, d) ist eine Cauchy-Folge. Umgekehrt nicht umbedingt.

9.1.5 Vollständigkeit

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig* falls jede Cauchy-Folge $(x_j)_{j \in J}$ einen Grenzwert $x \in X$ hat.

- Vollständigkeit vererbt sich nicht unbedingt auf Teilmengen.

9.1.6 abgeschlossen

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt *abgeschlossen*, wenn für jede Folge von Elementen $(a_j)_{j \in J} \subseteq A$ mit Grenzwert $x \in X$ gilt $x \in A$.

- $\emptyset$ und X sind immer abgeschlossen in (X, d)
- Abgeschlossenheit ist immer relativ zu einem metrischen Raum zu sehen
- Vereinigungen *endlich* vieler abgeschlossener Teilmengen in X sind abgeschlossen
- Durchschnitte beliebig vieler abgeschlossener Teilmengen in X sind abgeschlossen
- Eine vollständige Teilmenge ist immer auch abgeschlossen.
- Sei (X, d) ein *vollständiger* metrischer Raum. Dann gilt: $A \subseteq X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn (A, d) vollständig ist.

9.1.7 topologische Äquivalenz

Seien (X, d) und (X, h) metrische Räume. Wenn für alle Folgen $(a_j)_{j \in J}$ in X folgendes gilt, werden h und d *topologisch äquivalent* genannt: $(a_j)_{j \in J}$ konvergiert genau dann bezüglich (X, d), wenn $(a_j)_{j \in J}$ bezüglich (X, h) konvergiert.

- dies ist eine Äquivalenzrelation
- Siehe auch 10.3.5 auf Seite 29.

9.1.8 Segmente

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Das *Segment* in X zwischen $x, z \in X$ ist die Menge aller Punkte für die die Dreiecksungleichung scharf ist, also

$$[x, z] = \{y \in X | d(x, z = d(x, y) + d(y, z))\}$$

- Mit Betrag (Standardmetrik) als d und $\mathbb{R}$ als X ist dies genau das abgeschlossene Intervall zwischen x und z

9.1.9 Abschneiden einer Metrik

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Abbildung $d' : X \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \min\{1, d(x, y)\}$ ist wieder eine Metrik. d und d' sind topologisch äquivalent.

9.2 Normierte Räume

9.2.1 Norm und Metrik

Sei V ein reeller Vektorraum (über dem Körper $\mathbb{R}$) (beliebiger Dimension - auch unendlich). Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ mit folgenden Eigenschaften für alle $u, v \in V$ und alle $r \in \mathbb{R}$:

1. $(N1)$ $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $(N2)$ $\|r \cdot v\| = |r| \cdot \|v\|$
3. $(N3)$ $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Setze $d(u, v) = \|u - v\|$. Dann ist d eine Metrik auf V.

9.2.2 Besondere Normen

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V$.

p-Norm $\|v\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |v_i|^p}$

- für $p = \infty$ setze $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq \infty} \{|x_i|\}$

  1-Norm $\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|$

  2-Norm $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

  Supremumsnorm / ∞-Norm $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\} = \sup\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\}$

Im $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\|u\|_1 \geq \|u\|_2 \geq \|u\|_\infty \geq \frac{1}{n}\|u\|_1$$

- Diese drei Normen liefern also den gleichen Konvergenzbegriff auf dem $\mathbb{R}^n$. D.h. wenn eine Cauchy-Folge bezüglich einem der Begriffe konvergiert, dann auch bezüglich der anderen.

9.2.3 Banach-Raum

Ein *Banach-Raum* ist ein vollständiger normierter Raum.

- $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ sind Banachräume
- $\mathbb{R}^n$ ist bezüglich *jeder* Norm ein Banachraum
- Bezüglich $\|.\|_\infty$ bilden $B(A, \mathbb{R}), C(A, \mathbb{R}), R(A, \mathbb{R})$ Banachräume

9.2.4 (symmetrische) Bilinearform, inneres Produkt

Sei V ein reeller Vektorraum, $h : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Falls gilt:

1. $h(u + v, w) = h(u, w) + h(v, w)$
2. $h(u, v + w) = h(u, v) + h(u, w)$
3. $h(r \cdot u, w) = r \cdot h(u, w) = h(u, r \cdot w)$

so heißt h *Bilinearform*.

Falls zusätzlich gilt: $h(u, v) = h(v, u)$ für alle u, v, so heißt h *symmetrische Bilinearform*.

Wenn h symmetrisch ist, und wenn $h(u, u) > 0$ ist für alle $u \neq 0$, so heißt h *inneres Produkt*.

- Ein Inneres Produkt ist *positiv definit*.
- Eine symmetrisch positiv definite Bilinearform ist ein Inneres Produkt.
- Sei $V = \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine quadratische Matrix $(n \times n)$, setze

  $$h(u, v) = \sum_{i,j=1}^n u_i a_{ij} v_j = u^T A v$$

  Das ist eine Bilinearform. Sie ist symmetrisch genau dann, wenn A symmetrisch ist, d.h. $A = A^T (a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j)$.
- Sei $f(x) = \langle x, x \rangle = x^T A x$ mit A symmetrisch eine Abbildung. Dann gilt
  $df(x)(h) = 2x^T A h = 2h^T A x$
- *Standard Skalarprodukt*:
  Mit $A = 1$ (Einheitsmatrix, $a_{ij} = \delta_{ij}$) ist $h(u, v) = \sum_{j=1}^n u_i v_i = u^T v$ ein inneres Produkt.

9.2.5 Norm zu innerem Produkt

Sei V ein reeller Vektroraum, h ein inneres Produkt. Setze $\|v\| = \sqrt{h(v, v)}$, das ist eine Norm auf V.

9.2.6 Inneres Produkt zu Norm

Sei $\|.\|$ eine Norm auf V. Falls es hierzu ein inneres Produkt gibt, lässt es sich wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} h(u, v) &= \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right) \end{aligned}$$

- Falls der Ausdruck auf der rechten Seite kein inneres Produkt ist, gibt es zu dieser Norm keins.
- Als Kiterium auf Gültigkeit der Parallelogrammungleichung achten.
- zu der $\|.\|_1$ Norm gibt es kein inneres Produkt

9.2.7 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Ist h ein inneres Produkt auf V, so gilt

$$|h(u,v)| \leq \sqrt{h(u,u)}\sqrt{h(v,v)}$$

Die klassische Form lautet

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k v_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}$$

9.2.8 reeller Hilbert-Raum

Ist h ein inneres Produkt auf V, und ist V in der zugehörigen Metrik vollständig, dann heißt (V,h) *reeller Hilber-Raum*.

- jeder Hilbert-Raum ist ein Banach-Raum.
- z.B. $\left(\mathbb{R}^n, (x,y) \mapsto x^T y\right)$

9.2.9 Beispiel für einen unendlich dimensionalen Hilbert Raum

Sei $l^2(\mathbb{R})$ der Raum aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \text{ konvergiert}$$

Dies sind die quadratisch summierbaren Folgen. Das innere Produkt ist wie folgt definiert

$$h(a,b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$$

Dies ist ein unendlich dimensionaler Hilbert-Raum.

9.2.10 Parallelogrammgleichung

Sei V ein Normierter Vektorraum. $\|.\|$ wird genau dann von einem Inneren Produkt induziert, wenn die *Parallelogrammgleichung* gilt

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

9.2.11 Weitere Ungleichungen

- Umgekehrte Dreiecksungleichung $\left|\|u\|^2 - \|v\|^2\right| \leq \|u-v\|^2$
- $\|u+v\| + \|u-v\| \geq \|u\| + \|v\|$

10 Stetige Funktionen

10.1 Stetige Funktionen

10.1.1 Stetigkeit

Seien (X,d_x) und (Y,d_y) metrische Räume, $f: X \to Y$ eine Abbildung. Wir sagen f *ist stetig in* $x \in X$, falls folgendes gilt:

Für jede Folge $(x_j)_{j\in J}$ in X mit Grenzwert $\lim_{j\in J} x_j = x$ soll gelten $\lim_{j\in J} f(x_j) = f(x)$:

$$\lim_{j\in J} f(x_j) = f\left(\lim_{j\in J} x_j\right)$$

Falls f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist, so heißt f *stetig*. Es sei $C(X,Y) = \{f: X \to Y | f \text{ ist stetig}\}$

- Für $Y = \mathbb{R}$ und $X \subseteq \mathbb{R}$ ist das genau der Stetigkeitsbegriff wie in 5.1.1 auf Seite 15.
- $X = V$ Vektorraum mit Norm $\|.\|$, $f(v) = \|v\|$, $f: V \to \mathbb{R}$ ist stetig. Normen sind also stetige Funktionen.
- (X,d) metrischer Raum, $u \in X$, $f(x) = d(x,u)$ ist stetig.
- (X,d) metrischer Raum, $\mathbb{Z} = X \times X$ mit Metrik $d_z((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = d(u_1,v_1) + d(u_2,v_2)$. Damit ist $X \times X = \mathbb{Z} \to \mathbb{R} : (x_1,x_2) \mapsto d_z(x_1,x_2)$ stetig.

10.1.2 L-Lipschitz-stetig

Eine Funktion $f: X \to Y$ zwischen Metrischen Räumen heißt *L-Lipschitz-stetig* für $L \in \mathbb{R}$, falls $d_y(f(u), f(v)) \leq L \cdot d_x(u,v)$ für alle $u,v \in X$.

- Falls f stetig differenzierbar ist, gilt

  $$L \leq \|Df(x)\| = \sup\{\|Df(x)(h)\| | x,h \in X, \|h\| \leq 1\}$$

- Jede Lipschitzstetige Funktion ist insbesondere eine C^1-Funktion
- Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig.
- entspricht Erweiterung der gleichmäßigen Stetigkeit aus 5.1.4 auf Seite 15.
- Skalarprodukt mit einem festen Vektor t ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L = \|t\|_\infty$
- Integraloperator ist lipschitzstetig
- Endlichdimensionale lineare Abbildungen sind Lipschitzstetig mit der Operatornorm

10.1.3 Eigenschaften von stetigen Funktionen

Sind (X, d_x), (Y, d_y), (Z, d_z) metrische Räume, $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$, f, g stetig. Dann ist auch $g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x))$ stetig.

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist $C(X, \mathbb{R})$ ein Vektorraum und ein Ring. Für $f, g \in C(X, \mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen wieder stetig:

1. $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
2. $f \cdot g : x :\mapsto f(x) \cdot g(x)$
3. $r \cdot f : x \mapsto r \cdot f(x)$
4. $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$

10.1.4 $\varepsilon - \delta$-Kriterum für Stetigkeit

Eine Abbilung $f: X \to Y$ zwischen den metrischen Räumen (X, d_x) und (Y, d_y) ist stetig in $x \in X$ genau dann, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein ein $\delta > 0$, so dass aus $d_x(x, u) < \delta$ folgt $d_y(f(x), f(u)) < \varepsilon$.

$$\forall x : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall u : d_x(x,u) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(u)) < \varepsilon$$

Dies ist äquivalten zu: f ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn es für jede offene ε-Kugel $B_\varepsilon(f(x))$ um $f(x)$ eine offene δ-Kugel $B_\delta(x)$ um x mit $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ gibt.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$$

10.1.5 Besondere Stetige Funktionen

Normen sind stetige Funktionen

Determinanten sind stetige Funktionen

10.2 Lineare Abbildungen

10.2.1 Lineare Abbildung und Stetigkeit

Seien $(V, \|.\|_V)$ und $(W, \|.\|_W)$ normierte Räume, sei $f: V \to W$ linear. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1. f ist stetig
2. Es existiert ein $v \in V$ so dass f in v stetig ist
3. f ist L-Lipschitzstetig für eine Zahl L
4. Es gibt eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ so, dass $\|f(v)\|_W \leq L$ für alle $v \in V$ mit $\|v\|_V \leq 1$.

10.2.2 Operatornorm, Vektorraum der linearen stetigen Abbildungen

Es sei $f: U \to V$ eine lineare stetige Abbildung zwischen normierten Räumen. Wir definieren die *Operatornorm* von f durch

$$\|f\| = \sup\{\|f(u)\|_V \mid \|u\|_U \leq 1\}$$

Die Menge

$$\mathcal{L}(U, V) = \{f : U \to V | f \text{ ist linear und stetig}\}$$

ist ein Vektorraum, und die Operratornorm$\|.\|$ ist eine Norm darauf.

- $\|f(u)\|_V \leq \|f\| \, \|u\|_U$ gilt für alle $u \in U$.
- Die kleinste Lipschitzkonstante ist die Operatornorm
- Wenn f symmetrisch und $V = W$ dann gilt

$$\|f\| = \max\{|\lambda| \, |\lambda \text{ ist Eigenwert von } f\}$$

10.2.3 Vollständigkeit

Sein $(U, \|.\|_U)$ und $(V, \|.\|_V)$ normierte Räume, und ist V vollständig (d.h. Banachraum), so ist $\mathcal{L}(U, V)$ auch vollständig.

- Für alle U ist $U* = \mathcal{L}(U, \mathbb{R})$ ein Banachraum. Diesen Raum nennt man auch *Dualraum* von U.

10.2.4 endlichdimensionale Vektorräume

Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum, $f: \mathbb{R}^n \to V$ sei linear. Dann ist f stetig bezgl. der $\|.\|_1$-Norm auf $\mathbb{R}^n$.

- siehe auch 10.3.4 auf der nächsten Seite

10.3 endlichdimensionale Räume

10.3.1 Verhältnis zwischen Normen

Sei $\|.\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Zahl $r > 0$ so, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_1 = 1$ gilt $\|v\| \geq r$.

10.3.2 Stetigkeit der Identiät zwischen Räumen mit verschiedenen Normen

Sei $\|.\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Identität $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^n, \|.\|) \to (\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$ stetig.

10.3.3 Fundamentalsatz über endlichdimensionale normierte Räume

Seien $(V, \|.\|_V)$und $(W, \|.\|_W)$ normierte Räume, sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Falls V endliche Dimension hat, ist f stetig.

10.3.4 Lipschitzstetigkeit einer endlichdimensionalen linearen Abbildung

Zu einer reellen $m \times n$-Matrix $A = (a_{jk})_{jk}$ betrachten wir die ineare Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$. Mit

$$L = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (a_{jk})^2}$$

gilt, das φ_A eine L-Lipschitz-stetige Abbildung bezüglich der 2-Normen auf $\mathbb{R}^n$und $\mathbb{R}^m$ ist.

- siehe auch 10.2.4 auf der vorherigen Seite

10.3.5 Äquivalenz von Normen

Sei V ein Vektorraum, $\|.\|$, $\|.\|'$ seien Normen auf V. Die Normen heißen *äquivalent*, falls es Zahlen $r, R \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\|v\| \leq r \|v\|' \text{ und } \|v\|' \leq R \|v\|$$

für alle $v \in V$. Äquivalente Normen leifern den gleichen Konvergenzbegriff.

- Auf jedem endlich-dimensionalen Vektorraum sind *alle* Normen äquivalent (z.B. $\mathbb{R}^n$)
- Die entsprechenden Metrischen Räume sind also topologisch äquivalent. Siehe auch 9.1.7 auf Seite 25.

10.3.6 Fixpunkt

Ist $f : X \to X$ eine Abbildung und gilt $f(x) = x$ für ein $x \in X$, so heißt x *Fixpunkt* von f.

- Ist f linear, so ist 0 ein Fixpunkt

10.3.7 Banachs Fixpunktsatz

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $f : X \to X$ sei L-Lipschitzstetig für ein $L < 1$. Dann hat f *genau einen Fixpunkt.*

Genauer gilt: ist $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt, $x_{j+1} = f(x_j)$ *rekursiv*, so gilt $\lim_{j \in \mathbb{N}} x_j = w$ ist der gesuchte Fixpunkt.

- Abschätzen des Fehlers bei Abbruch der Iteration an der l-ten Stelle
  $d(x_l, w) \leq \frac{L^l}{1-L} \cdot d(x_0, x_1)$
- $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ hat den Fixpunkt $\sqrt{2}$

11 Offene Mengen, Offene Abbildungen, Kurven, Skalarfelder

11.1 Mengen

11.1.1 Offen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *offen in* X, falls gilt: zu jedem $u \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(u) \subseteq U$.

- Endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen von Systemen offener Mengen sind wieder offen
- Offene Intervalle auf $\mathbb{R}$ sind offene Mengen
- $\emptyset \subseteq X$ ist stets offen in X
- X ist stets offen in X

11.1.2 offene Abbildung

Eine Abbildung $f : V \to W$ wird als *offen* bezeichnet, falls für eine $U \subseteq V$ offen gilt das auch $f(U) \subseteq W$ wieder offen ist.

11.1.3 Abgeschlossen

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt *abgeschlossen*, wenn für jede Folge von Elementen $(a_j)_{j \in J} \subseteq A$ mit Grenzwert $x \in X$ gilt $x \in A$.

- Siehe auch 9.1.5 auf Seite 25

11.1.4 Satz über offene und Abgeschlossen Mengen

Sei (X, d) metrischer Raum, $U \subseteq X$. Dann sind gleichwertig:

1. U ist offen in X
2. $X \backslash U = \{x \in X | x \notin U\} = A$ ist abgeschlossen in X

- Es gibt Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind in X, z.B. sind sowohl $\emptyset, X$ abgeschlossene als auch offene Mengen in X
- Es gibt Mengen, die weder offen, noch abgeschlossen sind, z.B. $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

11.1.5 Stetigkeit über offenen und abgeschlossenen Mengen

Seien (X, d_x)und (Y, d_y) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig
2. für alle offenen $U \subseteq Y$ ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen
3. für alle abgeschlossenen $A \subseteq Y$ ist $f^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen

11.1.6 Abschluss

Für $S \subseteq X$ setzte

$$\overline{S} = \bigcap \{A \subseteq X | A \text{ ist abgeschlossen und } S \subseteq A\}$$

$\overline{S}$ ist abgeschlossen und $\overline{S}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge in X, die S enthält. $\overline{S}$ besteht (abgesehen von $S = \emptyset$ mit $\overline{S} = \emptyset$) genau aus den Grenzwerten konvergenter Folgen in S. $\overline{S}$ heißt *Abschluss* von S.

- $\overline{A} = A \cup \partial A$
- $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$
- $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$

11.1.7 Inneres

Wir betrachten einen metrischen Raum X. Das *Innere* $A^\circ = \bigcup \{U \subseteq X | U \text{ offen und } U \subseteq S\}$ von A ist offen (das ist das *offene Innere von A). A° ist die größte offene Teilmenge von S.*

- A° ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von A
- Alternative Schreibweise:
  $\overset{\circ}{A} = A^\circ$

11.1.8 Rand

Wir betrachten einen metrischen Raum X. Der *Rand* ∂A einer Menge A ist die Menge aller Punkte $p \in X$ für die jede offene ε-Kugel $B_\varepsilon(p) = \{x \in X | d(p, x) < \varepsilon\}$ sowol Elemente aus A als auch Elemente aus $X \backslash A$ enthält.

$$\partial A = \{v \in X | \forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A, x \in X \backslash A : d(v, a) < \varepsilon \wedge d(v, x) < \varepsilon\}$$

- $\partial S = \overline{S} \backslash S^\circ$

11.1.9 kompakte Mengen

Ein Metrischer Raum (X, d) heißt *kompakt*, falls jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge hat.

- In $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge X genau dann kompakt wenn sie abgeschlossen und beschränkt bzgl. $\|.\|$ ist
- Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $A \subseteq X$ ist kompakt, dann ist A abgeschlossen und beschränkt
- Es sei A eine abgeschlossene Teilmenge von einem kompakten Raum X, dann ist A kompakt
- Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, dann ist das Bild $f(K)$ einer kompakten Menge $K \subseteq X$ wieder kompakt
- Jede stetig differenzierbare reellwertige Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$auf einer kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig
- Das Kreuzprodukt von abgeschlossenen Intervallen ist kompakt:
  $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt

11.1.10 Satz von Baire

Sei (X, d) metrischer Raum und vollständig, sei $\{S_n | n \in \mathbb{N}\}$ eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen in X. Falls $X = \bigcup \{S_n | n \in \mathbb{N}\}$, so gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(x) \subseteq S_l$ (d.h. ${S_l}^\circ \neq \emptyset$).

11.1.11 Satz von der offenen Abbildung

Seien $(V, \|.\|_V)$ und $(W, \|.\|_W)$ Banachräume, $f : V \to W$ sei linear, stetig und surjektiv. Dann ist f offen.

11.1.12 Umkehrabbildung

Ist $f : V \to W$ stetig, linear und bijektiv, dann ist f offen.

Sei g die *Umkehrabbildung* von f, dann ist g linear und *stetig.*

11.1.13 Verschiedene Aspekte der Stetigkeit

Es sei X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist stetig
2. Das Urbild $f^{-1}(O)$ jeder offenen Menge $O \subseteq Y$ ist wieder offen
3. Das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq Y$ ist wieder abgeschlossen
4. $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ für alle Teilmengen $A \subseteq X$
5. $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ für alle Teilmengen $B \subseteq Y$

11.2 Kurven

11.2.1 Definition

Sei V ein normierter Raum (z.B. $\mathbb{R}^n$) mit euklidischer Norm. Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (offen, abgeschlossen, halboffen oder $J = \mathbb{R}$). Ein *Weg* in V ist eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} c : J &\rightarrow V \\ t &\mapsto c(t) \end{aligned}$$

- *Kurve* ist ein äquivalenter Begriff zu Weg

11.2.2 Peano-Kurve

Eine *Peano-Kurve* ist eine Raumfüllende Kurve $\gamma : [0,1] \rightarrow [0,1]^2$. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ eine stetige 2-periodische Funktion mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ 3\left(t - \frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ f(t) &= f(t+2) \end{aligned}$$

Da f auf $(1,2)$ nicht benötigt wird spielt die Definiton dort keine Rolle. Seien weiter $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei (Koordinaten)-Funktionen mit

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f\left(3^{2n-1}t\right) \\ y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f\left(3^{2n}t\right) \end{aligned}$$

Dann ist $\gamma(t) = (x(t), y(t))$eine stetige und surjektive Abbildung.

- γ ist nicht injektiv. Jeder Punkt bis auf $(0,0)$ und $(1,1)$ wird genau 2mal getroffen.

11.2.3 Wegzusammenhang

Ein (metrischer) Raum X heißt *wegzusammenhängend*, falls sich je zwei Punkte $x, y \in X$ durch einen Weg in X verbinden lassen.

- stetige Bilder wegzusammenhängender Räume sind wieder wegzusammenhängend

11.2.4 Geschwindigkeit, differenzierbar

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $c : J \rightarrow V$ eine Kurve, $t_0 \in J$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subseteq J$.

Falls es eine stetige Abbildung $p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ gibt, so dass $\frac{c(t)-c(t_0)}{t-t_0} = p(t - t_0)$ gilt für $t \neq t_0$, so heißt $\dot{c}(t_0) = p(0)$ *Geschwindigkeit* oder *Tangentialvektor* der Kurve zur Zeit t_0. c ist somit in t_0 *differenzierbar.*

Falls c in *jedem* $t \in J$ differenzierbar ist, heißt c *differenzierbar*, falls zusätzlich $t \mapsto \dot{c}(t)$ stetig ist, so heißt *c stetig differenzierbar* oder *C^1-Kurve*.

- Die Funktion p ist (wenn sie existiert) eindeutig bestimmt, denn für $t \neq t_0$ gilt $p(t - t_0) = \frac{c(t)-c(t_0)}{t-t_0}$ und $p(0) = \lim_n p\left(\frac{1}{n}\right)$

11.2.5 Satz über Differenzierbarkeit

Ist $V = \mathbb{R}^n, c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))$, so ist c genau dann (stetig) differenzierbar, wenn jedes einzelne c_j (stetig) differenzierbar ist, und $\dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t))$.

11.2.6 Beschleunigung

Falls c C^1-Kurve ist, und falls $\dot{c}$ (stetig) differenzierbar ist, schreibe $\ddot{c}$ für die zweite Ableitung. $\ddot{c}(t)$ heißt *Beschleunigung* zur Zeit t.

11.2.7 Rechenregeln für Kurven

$J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall.

1. $c, d : J \rightarrow V$ C^1-Kurven
$c + d = e : t \mapsto c(t) + d(t)$
$\dot{e} = \dot{c} + \dot{d}$
2. $c : J \rightarrow V$ C^1-Kurve
$f : J \rightarrow \mathbb{R}$ C^1-Funktion
$e = c \cdot f : t \mapsto c(t) \cdot f(t)$
$\dot{e}(t) = \dot{c}(t) \cdot f(t) + c(t) \cdot f'(t)$
3. *Umparameterisierung* von c
$c : J \rightarrow V$ C^1-Kurve
$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ C^1-Funktion mit $f(I) \subseteq J$
$e = c \circ f : t \mapsto c(f(t))$
$\dot{e}(t) = \dot{c}(f(t)) \cdot f'(t)$
4. $c : J \rightarrow V$ C^1-Kurve
$f : V \rightarrow W$ stetig und linear
$e = f \circ c$ ist C^1-Kurve
$\dot{e}(t) = f(\dot{c}(t))$

11.2.8 differenzieren auf abgeschlossenen Intervall

Ist $c : [a,b] \rightarrow V$ Kurve. Falls es ein $r > 0$ gibt, eine (stetig) differenzierbare Kurve $\tilde{c} : (a - r, b + r) \rightarrow V$ mit $c(t) = \tilde{c}(t)$ für alle $t \in [a,b]$, so heißt c (stetig) differenzierbar auf $[a,b]$, setze $\dot{c}(t) = \dot{\tilde{c}}(t)$ für $t \in [a,b]$.

- Bislang waren ableitungen nur auf offenen Intervallen definiert. Hier wird das ganze auf abgeschlossene erweitert.

11.2.9 Bogenlänge

Sei $c : [a, b] \to V$ stetig differenzierbar. Die *Bogenlänge* von c ist $L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$.

11.2.10 Umparameterisierung und Bogenlänge

Ist $c : J \to V$ C^1-Kurve, $J = [a, b]$, ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ C^1-Funktion streng monoton wachsend (d.h. $\varphi'(t) > 0$ für alle t), $I = [u, v]$ mit $\varphi(u) = a$, $\varphi(v) = b$. Dann gilt

$$L(c) = L(c \circ \varphi)$$

- Die Kurvenlänge ändert sich nicht bei streng monotonen Umparameterisierungen.

11.3 Skalarfelder

11.3.1 Differential

Sei V ein normierter Raum, $U \subseteq V$ offen, sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $x_o \in U$. Wir sagen f ist *differenzierbar* im Punkt x_0, falls es $r > 0$ gibt, eine stetige Funktion $\lambda : B_r(0) \to \mathbb{R}$, und eine stetige lineare Abbildung $g : V \to \mathbb{R}$, so dass gilt: $\lambda(0) = 0$ und

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \lambda(h) \|h\| + g(h)$$

für alle h mit $\|h\| < r$.

Dann heißt $df(x_0) = g$ *Ableitung* oder *Differential* von f in x_o.

Falls f in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar, so heißt f *differenzierbar*, falls die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} U & \to & V* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) \\ x & \mapsto & df(x) \end{array}$$

stetig ist, heißt f *stetig differenzierbar* oder G^1-Funktion.

- Falls f in x_0 die Bedingungen der Definition erfüllt, so ist $df(x_0)$ *eindeutig* durch f bestimmt.
- Das Differential $df(x_0)$ ist eine Lineare Abbildung $V \to \mathbb{R}$, d.h. $df(x_0)$liegt im Dualraum $V* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. Das ist ebenfalls ein normierter Raum, sogar ein Banachraum.
- $V*$ trägt die Operatornorm $\|df(x)\| = \sup\{\|df(x)(h)\| \mid \|h\| \le 1\}$
- $(x, h) \mapsto df(x)(h)$ ist stetig

11.3.2 Kettenregel 1

Sei $U \subseteq V$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ C^1-Funktion, $J \subseteq \mathbb{R}$ offen, $c : J \to V$ stetig differenzierbare Kurve mit $c(J) \subseteq U$. Dann ist $g = f \circ c$ mit

$$\begin{array}{rcl} g : J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(c(t)) \end{array}$$

ebenfalls stetig differenzierbar, mit Ableitung

$$g'(t) = df(c(t))(\dot{c}(t))$$

11.3.3 Kettenregel 2

Sei $U \subseteq V$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ C^1-Funktion, $J \subseteq \mathbb{R}$ offen, $c : J \to \mathbb{R}$ reelle Funktion mit $f(U) \subseteq J$. Dann ist $g = c \circ f$ mit

$$\begin{array}{rcl} g : U & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & c(f(t)) \end{array}$$

ebenfalls stetig differenzierbar, mit Ableitung

$$dg(u)(h) = c'(f(u)) \cdot df(u)(h)$$

11.3.4 Richtungsableitung

Ist $v \in V$, so heißt

$$D_V f(x) = df(x)(v)$$

Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung v.

11.3.5 Partielle Ableitung

Sei $V = \mathbb{R}^n$, $v = e_i$. Dann ist

$$df(x)(e_i) = D_{e_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

die i-te partielle Ableitung von f an der Stelle x_i.

- Man kann schreiben
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot e_i) - f(x)}{t}$$
- Die i-te Partielle Ableitung erhält man, indem man $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ als konstanten behandelt und formal nach v_i ableitet.

11.3.6 Rechenregeln des Differentials

Sei $U \subseteq V$ offen, $C^1(U)$ die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen auf U. Das ist ein reeller Vektorraum und ein Ring, also eine reelle Algebra. Es gilt:

1. $d(f + g) = df + dg$
2. $d(r \cdot f) = r \cdot df$
3. Leipnitzregel
   $d(f \cdot g) = df \cdot g + dg \cdot f$

11.3.7 Affine Abbildung

Ist $f : V \to \mathbb{R}$ linear und stetig, $t \in V$, so ist die Abbildung $g : v \mapsto t + f(v)$ stetig differenzierbar, und $dg(u)(v) = f(v)$.

11.3.8 Gradient

Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ C^1-Funktion betrachte den *Gradienten*

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f)(u) &= \nabla f(u) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) \right) \end{aligned}$$

Das innere Produkt auf $\mathbb{R}^n$ mit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Dann gilt:

$$\langle \nabla f(u), h \rangle = df(u)(h)$$

- Wenn h ein inneres Produkt auf V ist, so definiert man den Gradienten über die Gleichung

$$df(u)(v) = h(\nabla f(u), v)$$

11.3.9 Kriterium für stetige Differenzierbarkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f stetig differenzierbar genau dann, wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ existieren und stetig in u sind.

Für das Differential gilt dann

$$df(u)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) h_i = \langle \nabla f(u), h \rangle$$

12 Differentialrechnung in Vektorräumen

12.1 Ableitung

12.1.1 Definition

Seien V, W normierte Räume, $U \subseteq V$ offen, $f : U \to W$ stetig, sei $u \in U$.

Wir sagen f ist *diferenzierbar* in u, falls es eine lineare Abbildung $g : V \to W$ gibt, und eine stetige Abbildung $\lambda : B_r^V(0) \to W$ mit $\lambda(0) = 0$, so dass gilt

$$f(u+h) - f(u) = g(h) + \lambda(h) \cdot \|h\|$$

für alle $h \in B_r^V(o)$, dabei sei $r > 0$ so gewählt, dass $B_r^V(0) \subseteq U$. Die Funktion g heißt *Ableitung* von f in u, schreibe

$$g = Df(u) \in \mathcal{L}(V, W)$$

Falls f in jedem Punkt $u \in U$ eine Ableitung hat, heißt f *differenzierbar*. Falls zusätzlich die Abbildung

$$\begin{aligned} U &\to \mathcal{L}(U, V) \\ u &\mapsto Df(u) \end{aligned}$$

stetig ist, heißt f stetig differenzierbar oder C^1-Funktion.

- g ist durch f und u eindeutig bestimmt.
- $Df(u)(h) = g(h)$
- $\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t \cdot h) - f(x)}{t} = Df(x)(h)$

12.1.2 Überblick über verschiedene Ableitungsbegriffe

Sei V ein reeller normierter Vektorraum und seien $J \subseteq \mathbb{R}$ und $U \subseteq V$ offen.

Analysis 1 $f : J \to \mathbb{R}$

- $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \hat{=} \mathbb{R}$
- $Df(x) : v \mapsto v \cdot f'(x)$
- $Df(x)(1) = f'(x)$

Kurven $c : J \to V$

- $Dc(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, V) \hat{=} V$
- $Dc(t) : x \mapsto x \cdot \dot{c}(t)$
- $Dc(t)(1) = \dot{c}(t)$

reelle Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$

- $Df(u) = df(u) \in \mathcal{L}(U, \mathbb{R})$
- in manchen Büchern wird zwischen Df und df nicht unterschieden

12.1.3 affine Abbildung

Ist $g : V \to W$ linear und stetig, $t \in V$ und $f(v) = t + g(v)$. Damit ist f C^1-Funktion mit Ableitung $Df(u) = g$.

- für $g = t + Ax$ mit Matrix A gilt: $Df(u)(v) = Av$

12.1.4 Struktur der Ableitungen

Sei $U \subseteq V$ offen, V, W normierte Räume, $C^1(U, W)$ die Menge aller C^1 Abbildungen von U nach W.

Dann ist $C^1(U, W)$ein reeller Vektorraum. Es gilt für alle $f, g \in C^1(U, W)$ und $r \in R$

1. $D(g + f)(u) = Dg(u) + Df(u)$
2. $D(r \cdot f)(u) = r \cdot Df(u)$

12.1.5 Jakobimatrix

Für $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$, $U \subseteq V$ offen und $f : U \to V$ mit $f(u) = (f_1(u), \dots, f_m(u)) \in \mathbb{R}^m$. Wenn f C^1-Funktion ist, so auch $f_1, \dots, f_m$ mit $f(u) = \sum_{k=1}^m e_k f_k(u)$. Für die Ableitung gilt dann mit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} Df(u) : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ Df(u) : v &\mapsto \left(\textstyle\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(u) \cdot v_k, \dots, \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(u) \cdot v_k\right) \\ &= (\langle \nabla f_1(u), v\rangle, \dots, \langle \nabla f_n(u), v\rangle) \\ &= [Df(u)] \cdot v \end{aligned}$$

mit

$$[Df(u)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$[Df(u)]$ wird als *Jakobimatrix* von $Df(u)$ bezeichnet.

12.1.6 Kettenregel

Sind X, Y, Z normierte Räume, $U \subseteq X$ offen, $V \subseteq Y$ offen, $f : U \to Y$ und $g : V \to Z$ C^1-Funktionen mit $f(U) \subseteq V$. Dann ist $g \circ f : U \to Z : u \mapsto g(f(u))$ ebenfalls C^1-Funktion und

$$D(g \circ f)(u) = Dg(f(u)) \circ Df(u)$$

12.1.7 Höhere Ableitungen

Ist $U \subseteq V$ offen, $f : U \to W$ C^1-Funktion. Dann ist $Df : U \to \mathcal{L}(V, W)$ stetig. Falls Df ebenfalls C^1-Funktion ist, heißt f *zweimal stetig differenzierbar* oder C^2-Funktion. Schreibe $D(Df) = D^2 f$ für die zweite Ableitung.

Entsprechend definiert man k-mal stetig differenzierbare Funktionen, $D^k f = k$-te Ableitung. Man erhält Vektorräume $C^k(U, W) = \{f : U \to W | f \text{ } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$.

12.1.8 Bilinearität der zweiten Ableitung

$f(u) \in W$ sei ein Vektor und $Df(u) \in \mathcal{L}(V, W)$ lineare Abbildung. Betrachte die zweite Ableitung $D^2 f \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, W))$.

Es gilt

$$\begin{aligned} D^2 f(u) : V \times V &\to W \\ (x, y) &\mapsto D^2(u)(x)(y) = D^2 f(u)(x, y) \\ D^2 f : U \times V \times V &\to W \end{aligned}$$

$D^2 f(u)(x, y)$ ist linear in x uns y und somit eine bilineare Abbildung.

Für $J \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : J \to \mathbb{R}$ gilt $D^2 f(u) = ((x, y) \mapsto x \cdot y \cdot f''(u))$.

- Potentiale sind die verallgemeinerung von Stammfunktionen

12.1.9 Hesse-Matrix

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$. Für die zweite Ableitung gilt

$$\begin{aligned} D^2 f(u)(x, y) &= (x_1, \dots, x_n) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(u)\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x^T H f(u) y \end{aligned}$$

Die Matrix

$$\begin{aligned} Hf(u) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(u)\right)_{k,l=1}^n \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n}(u) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_n}(u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

heißt Hessematrix von f in u.

- Für $f \in C^2$ gilt $Hf(u) = Hf(u)^T$

12.1.10 Vertauschbarkeit von Ableitungen

Ist $U \subseteq V$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $u \in U$, so gilt

$$D^2 f(u)(x, y) = D^2 f(u)(y, x)$$

für alle $x, y \in V$. Das heißt $D^2 f(u)$ ist eine symmetrische Bilinearform.

- Die partiellen Ableitungen einer C^2-Funktion im $\mathbb{R}^n$ gilt
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(u)$$
- Die Hessematrix $Hf(u)$ ist symmetrisch
$$Hf(u) = Hf(u)^T$$

12.1.11 Potentiale

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ sei eine C^1-Funktion. Frage: gibt es $F : U \to \mathbb{R}$ mit $\nabla F = f$? Wenn ja, so heißt F *Potential* zum Feld f).

Falls es ein Potential F passend zu f gibt, gilt ist F eine C^2-Funktion. Es muss also für f gelten

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(u) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(u)$$

Im $\mathbb{R}^3$ ist diese notwendige Bedingung äquivalent mit *Rotation* von $f = 0$

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 0$$

Falls U *sternförmig* ist, sind diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend.

Sternförmig bedeutet, das es einen ausgezeichneten Punkt im Raum gibt, von dem aus man alle anderen Punkte mit in der Menge liegenden Verbindungsgraden erreichen kann.

12.1.12 Besondere Ableitungen

Affine Abbildung siehe 12.1.3 auf Seite 33

Bilineare Abbildung $f(x,y)$ sei bilinear
$Df(x,y)(v,w) = f(x,w) + f(v,y)$

Inneres Produkt $f(x) = \langle x,x\rangle = x^T Ax$ mit $A = A^T$
$Df(x)(v) = 2x^T Av$

12.2 Lokale Extrema reeller Funktionen

12.2.1 Extrema

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Wir sagen f hat in $x \in X$ ein *Maximum* / *Minimum*, falls für alle $z \in X$ gilt $f(x) \geq f(z)$ (bzw. $f(x) \leq f(z)$). Falls zusätzlich für $z \neq x$ stets gilt $f(x) > f(z)$ (bzw. $f(x) < f(z)$), so spricht man von einem *strikten Maximum* (oder Minmum).

Falls es eine Kugel $B_r(x)$ gibt, so dass f auf $B_r(x)$ ein (striktes) Maximum oder Minimum hat, so spricht man von einem *lokalen (strikten) Maximum / Minimum.*

(strikte) (lokale) Maxima und Minima werden allgemein als (*strikte*) (lokale) *Extrema* bezeichnet.

12.2.2 Kriterium für Extrema / kritische Punkte

Sei $U \subseteq V$ offen, V normierter Raum, $f : U \to \mathbb{R}$ sei eine C^1-Funktion. Falls f in $u \in U$ ein (lokales) Extremum hat, so gilt $df(u) = 0$ (Nullabbildung). Falls $V = \mathbb{R}^n$, ist das gleichbedeutend mit $\nabla f(n) = 0$ (Nullvektor).

Die Punkte $u \in U$ mit $df(u) = 0$ heißen *kritische Punkte* von f.

12.2.3 notwendig für lokale Maxima und Minima

Falls f in u ein *lokales Maximum* hat, gilt

$$D^2 f(u)(v,v) \leq 0$$

falls f in u ein *lokales Minimum* hat, gilt

$$D^2 f(u)(v,v) \geq 0$$

für alle $v \in V$.

- Dies entspricht positiver bzw. negativer semidefinitheit von $D^2 f(u)$.
- Dies ist nur Notwendig, hinreichend ist erst die Definitheit ohne das “Semi”.

12.2.4 definit

Eine symmetrische Bilinearform $h : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt

positiv definit falls $h(v,v) > 0$ für alle $v \neq 0$ gilt

positiv semidefinit falls $h(v,v) \geq 0$ für alle $v \in V$ gilt

negativ definit falls $h(v,v) < 0$ für alle $v \neq 0$ gilt

negativ semidefinit falls $h(v,v) \leq 0$ für alle $v \in V$

Falls keine dieser Eigenschaften zutrifft, heißt h *indefinit*.

12.2.5 Entwickeln einer Funktion mit ihren Ableitungen

Ist $\varphi : (-r,r) \to \mathbb{R}$ C^2-Funktion, so gilt

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot t + \int_0^t \varphi''(s)(t-s)\,ds$$

12.2.6 Zweite Ableitung als Norm

Falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $D^2 f(u)(v,v) \geq \delta$ für alle v mit $\|v\| = 1$, so gibt es $r > 0$ so, dass $D^2 f(\tilde{u})(v,v) \geq \frac{\delta}{2}$ für alle $\tilde{u} \in B_r(u)$.

- Die Bedingung $D^2 f(u)(v,v) \geq \delta$ besagt folgendes: die Norm $\|v\|_U = \sqrt{D^2 f(u)(v,v)}$ ist äquivalent zur Norm, mit der wir auf V angefangen haben. Weil auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind, folgt dort (im $\mathbb{R}^n$) die Existenz von δ schon, falls $D^2 f(u)$ positiv definit ist.

12.2.7 Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

Sei $U \subseteq V$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, sei u ein kritischer Punkt von f.

Falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $D^2 f(u)(v,v) \geq \delta$ für alle $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ gilt, so hat f in u ein striktes lokales Minimum.

Falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $D^2 f(u)(v,v) \leq -\delta$ für alle $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ gilt, so hat f in u ein striktes lokales Maximum.

12.2.8 Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema in endlicher Dimension

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ C^2-Funktion, $u \in U$ mit $\nabla f(u) = 0$. Falls die Hessematrix $Hf(u)$ *positiv definit* ist, so hat f in u ein striktes lokales Minimum, falls $Hf(u)$ negativ definit ist, so hat f in u ein striktes lokales Maximum.

12.2.9 Trägheitssatz von Silvester

Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (d.h. $UU^T = I_n$ bzw. $\sum_{k=1}^n u_{ik}u_{jk} = \delta_{ij}$ bzw. die Spalten von U bilden eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^n$) so dass

$$D = U^T SU = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix mit $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$. Die Zahlen $d_1, \ldots, d_n$ heißen Eigenwerte von S.

Die Matrix S ist positiv/negativ (semi)-definit genau dann, wenn D es ist. Also:

1. S ist positiv definit $\Leftrightarrow d_1, \ldots, d_n > 0$
2. S ist positiv semi definit $\Leftrightarrow d_1, \ldots, d_n \geq 0$
3. S ist negativ definit $\Leftrightarrow d_1, \ldots, d_n < 0$
4. S ist negativ semi definit $\Leftrightarrow d_1, \ldots, d_n \leq 0$

- $\operatorname{Spur}(D) = \operatorname{Spur}(S)$
  $\det(D) = \det(S)$
- Für $n = 2$ gilt:
  1. S ist positiv definit $\Leftrightarrow \det(S) > 0$ und $\operatorname{Spur}(S) > 0$
  2. S ist negativ definit $\Leftrightarrow \det(S) > 0$ und $\operatorname{Spur}(S) < 0$

12.2.10 Hurwitz-Kriterium

Eine Symmetrische Matrix A ist positiv definit genau dann, wenn für alle $k = 1, \ldots, n$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

ist. Also die Determinanten aller quadratischen Ausschnitte aus der Matrize A die die obere Linke Ecke enthalten.

12.3 Extrema mit Nebenbedingungen

12.3.1 Niveaumenge

$U \subseteq V$ offen, V Banachraum, $q : U \to \mathbb{R}$ C^1-Funktion. Für $r \in \mathbb{R}$ ist $M_r = \{v \in U | q(v) = r\} = q^{-1}(r)$ die *Niveaumenge* zum Wert r.

Sei H ein weiterer Banachraum, $u \in M_r$, $\varphi : B_\varepsilon^H(0) \to V$ sei C^1-Funktion. Wir sagen, φ parameterisiert M_r nahe u, falls es $\delta > 0$ gibt, so dass $M_r \cap B_\delta^V(u) = \varphi\left(B_\varepsilon^H(0)\right) \cap B_\delta^V(u)$ und falls $D\varphi(x)$ injektiv ist für alle $x \in B_\varepsilon^H(0)$.

Falls M_r in jedem Punkt $u \in M_r$ solch eine Parameterisierung hat, heißt $M_r \subseteq U$ *Hyperfläche* in U.

- Für $V = \mathbb{R}^2$ sind Niveaumengen *Höhenlinien* auf dem Graphen der Funktion q.
- Ich kann sozusagen eine Umgebung um den Nullpunkt eines Vektorraums auf eine Niveaumenge abbilden.

12.3.2 Existenz einer Parameterisierung

Vorraussetzungen und Notation siehe 12.3.1. Falls $dq(u) \neq 0$, so hat $M_r = q^{-1}(q(u))$ eine Parameterisierung nahe u.

12.3.3 Tangentialraum

Voraussetzungen und Notation siehe 12.3.1. Man nennt $H = \ker(dq(u)) = T_u(M_r)$ Tangentialraum von M_r in u.

12.3.4 Extrema mit Nebenbedingung, Lagrange-Multiplikator

Sei $U \subseteq V$ offen, V Banachraum, $q : U \to \mathbb{R}$ $f : U \to \mathbb{R}$ C^1-Funktion, $M_r = q^{-1}(r)$.

Falls $u \in M_r$ ein Extremum von $f|_{M_r}$ ist (d.h. u ist Extremum von f mit Nebenbedingung $q(u) = r$) und falls $dq(u) \neq 0$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $df(u) = \lambda \cdot dg(u)$. λ heißt *Lagrange-Multiplikator*. Für $V = \mathbb{R}^n$ bedeutet das $\nabla f(u) = \lambda \nabla q(u)$.

- Dies *ersetzt* die Bedingung $Df(x) = 0$

12.3.5 Extrema auf kompakten Mengen

Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt (also Kompakt), ist $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so hat f auf K ein Maximum und ein Minimum.

13 Mittelwertsatz und Satz von lokalen Inversen

13.1 Integrale

13.1.1 Raum der beschränkten Funktionen

Sei V ein Banachraum (= vollständiger normierter Raum), $J = [a,b]$. Eine Funktion $f : J \to V$ heißt *beschränkt*, falls die Menge $\{\|f(t)\| \,|t \in J\}$ beschränkt ist. Sei $B(J,V)$ die *Menge aller beschränkter Funktionen* $f : J \to V$. $B(J,V)$ ist ein reeller Vektorraum. Setze $\|f(t)\|_\infty = \sup\{\{\|f(t)\| \,|t \in J\}\}$ (*Supremum* von f). Damit wird $B(J,V)$ ein normierter Vektorraum.

- $B(J,V)$ ist ein Banachraum

13.1.2 Stufenfunktion

Eine Funktion $f \in B(J,V)$ heißt *Stufenfunktion*, falls es Zahlen

$$a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b$$

gibt, so dass $f|_{(s_i,s_{i+1})} = const.$ gilt. Die Menge $\mathrm{Step}(J,V) = \{f : J \to V | f \text{ ist Stufenfunktion}\}$ ist ein Untervektorraum von $B(J,V)$.

Der Abschluss von $\mathrm{Step}(J,V)$ in $B(J,V)$ besteht aus allen beschränkten Funktionen, die Grenzwerte (bzgl. $\|.\|_\infty$) von Stufenfunktionen sind. Solche Funktionen heißen *Regelfunktionen*, sie bilden einen Untervektorraum $R(J,V) \subseteq B(J,V)$. Weil $B(J,V)$ vollständig ist, ist $R(J,V)$ ebenfalls vollständig.

Ist $f \in \mathrm{Step}(J,V)$ bzgl. Zerlegung $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b$, setze

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{s_{i+1}+s_i}{2}\right)(s_{i+1}-s_i) \in V$$

Für eine Regelfunktion $f; J \to V$, die Grenzwert einer Folge $(f_i)_{i\in I}$ von Stufenfunktionen ist, setze

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{i\in I}\int_a^b f_i(t)\,dt$$

- $J = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, V vollständiger Vektorraum
  $\mathrm{Step}(J,V) \subseteq R(J,V) \subseteq B(J,V)$
- Integrieren ist eine Lineare Abbildung:
  $\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b (f(t))\,dt + \int_a^b (g(t))\,dt$
  $\int_a^b (\lambda \cdot g(t))\,dt = \lambda \cdot \int_a^b (g(t))\,dt$
- $\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty\,dt = (b-a)\cdot\|f\|_\infty$
- Stetige Funktionen sind Regelfunktionen
  $C(J,V) \subseteq R(J,V)$

13.1.3 Lineare Abbildung und Integral

Ist $\varphi : V \to \mathbb{R}$ linear und stetig, so gilt

$$\varphi\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \varphi(f(t))\,dt$$

Im $\mathbb{R}^n$ mit $f : J \to \mathbb{R}^n$ und

$$f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))\,so$$

gilt

$$\int_a^b (t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\,dt\right)$$

Sind V, W Banachräume, dann gilt für $\varphi : V \to W$ linear und stetig

$$\varphi\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \varphi(f(t))\,dt$$

Insbesondere: Sind X, Y Banachräume, $f : J \to \underbrace{\mathcal{L}(X,Y)}_{Banachraum}$ Regelfunktion, so gilt für jedes $x \in X$

$$\left(\int_a^b f(s)\,ds\right)(x) = \int_a^b f(s)(x)\,ds$$

denn die Abbildung $f(s) \mapsto f(s(x))$ ist linear.

13.1.4 Ableitung eines Integrals

Ist $f : J \to V$ stetig, $t_0 \in (a,b) = J$, so ist

$$c(t) = \int_{t_0}^t f(s)\,ds$$

eine C^1-Kurve, mit Ableitung $\dot{c}(t) = f(t)$. Für $t < t_0$ ist $\int_{t_0}^t f(s)\,ds = -\int_t^{t_0} f(s)\,ds$.

- Für eine C^1-Kurve gilt insbesondere
  $c(t_1) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{c}(s)\,ds$

13.1.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung in Vektorräumen

Seien V, W Banachräume, $U \subseteq V$ offen, $f : U \to W$ C^1-Abbildung. Sei $u \in U$ und $v \in V$ so, dass $u + v \cdot s \in U$ für alle $s \in [0,1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(u+v) - f(u) &= \int_0^1 Df(u+v\cdot s)(v)\,ds \\ &= \left(\int_0^1 Df(u+v\cdot s)\,ds\right)(v) \end{aligned}$$

- Sind V, W Banachräume, $u \in U \subseteq V$, U offen, $u + h \in B_r(u) \subseteq U$, so gilt

  $$\|f(u+h)-f(u)\| \leq \|h\| \cdot \sup\{Df(u+h\cdot t)|0\leq t\leq 1\}$$

  falls $\{u + v \cdot s | s \in [0,1]\} \subseteq U$

13.2 Invertieren von Funktionen

13.2.1 von Neumannsche Reihe - Inverses

Sei V ein Banachraum, $f \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $\|f\| < 1$. Dann hat die lineare Abbildung $(\mathrm{id}_v - f) : v \mapsto v - f(v)$ ein stetiges Inverses nämlich

$$(\mathrm{id}_V - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} f^k$$

mit $f^0 := \mathrm{id}_V$ und $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k-\mathrm{mal}}$.

13.2.2 Gruppe von invertierbaren linearen Abbildungen

Sei V ein Banachraum,

$$Gl(V) = \{f \in \mathcal{L}(V,V) \,|\, f \text{ hat stetiges Inverses}\}$$

Dann ist $Gl(V)$ eine Gruppe (bzgl Komposition von Abbildungen und *offen* in $\mathcal{L}(V,V)$.

- Die Abbildungen $(g,h) \mapsto g \circ h$ und $g \mapsto g^{-1}$ sind stetig in $Gl(V)$

13.2.3 Satz vom lokalen Inversen

Sei V, W Banachräume, $U \subseteq V$ offen $f : U \to W$ C^1-Funktion, $u \in U$. Falls $Df(u) : V \to W$ bijektiv ist, dann gibt es $r > 0$ eine C^1-Funktion $g : B_r^W(f(u)) \to V$, so dass

$$\begin{aligned} (g \circ f)(v) &= v \\ (f \circ g)(w) &= w \end{aligned}$$

an Stellen wo dieses Sinn macht gilt (Definitionsbereiche!).

- Nahe bei u lässt sich die Gleichung $f(v) = w$ eindeutig und stetig differenzierbar nach v auflösen.

13.2.4 Notation für implizite Funktionen

Sind X, Y, Z Banachräume, $U \subset X, V \subset Y$ offen.

$$\begin{aligned} f : U \times V &\to Z \\ f(x,y) &= z \end{aligned}$$

sei C^1-Funktion, so ist $Df(x,y) : X \times Y \to Z$ linear. Schreibe für $a \in X, b \in Y$

$$\begin{aligned} Df(x,y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= (D_1 f(x,y), D_2 f(x,y))\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= D_1 f(x,y)(a) + D_2 f(x,y)(b) \end{aligned}$$

- Diese Schreibeise geht auf die Verwendung von Blockmatrizen zurück

13.2.5 Satz über implizite Funktionen

Seien X, Y, Z Banachräume, $U \subseteq X, V \subseteq Y$ offen, $f : U \times V \to Z$ sei C^1-Funktion, sei $(u,v) \in U \times V$.

Falls $D_2 f(u,v) : Y \to Z$ ein Isomorphismus ist, so gibt es $\hat{U} \subseteq U$ offen, $g : \hat{U} \to V$ C^1-Funktion mit $g(u) = v$, so dass $f(x, g(x)) = f(u,v)$ gilt für alle $x \in \hat{U}$.

- Man kann die Gleichung $f(x,y) = const$ nahe u nach y auflösen
- Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $\det([D_2 f(x,v)]) \neq 0$
- Wenn ich die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n) = k$ nach x_i auflösen will, muss ich testen, ob $\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$ ist. Falls f vektorwertig ist, muss dieses für jedes f_i aus $f = (f_1, \ldots, f_m)$ gelten.

13.2.6 Diagonalisierbarkeit von symmetrischen Matizen

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch (d.h. $A = A^T$), so gibt es eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A. Bzgl. dieser Basis hat A also Diagonalgestalt mit den Eigenwerten auf der Diagonalen.

- Dies ist *nur* über $\mathbb{R}$ richtig, nicht z.B. über $\mathbb{Q}$

13.2.7 Ableitung einer Impliziten Funktion

Sei $F : V \times W \to Z$ differenzierbare Funktion, $g : V \to W$ ebenfalls differenzierbar und es gelte $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in V$. An allen anderen Punkten $x_0 \in V$ an denen $D_2 f(x_0, g(x_0))$ invertierbar ist gilt

$$Dg(x_0) = -D_2 f(x_0, g(x_0))^{-1} D_1 f(x_0, g(x_0))$$

- Geht auch, wenn $f(x, g(x)) = c$ für festes $c \in Z$ ist.

14 Funktionenreihen

14.1 Taylorreihe

14.1.1 Definition

Ist f eine unendlich oft differenzierbare Funktion (glatt), betrachte ihre *Taylorreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

im Entwicklungspunkt 0.

Falls f Potenzreihe ist, stimmt sie mit ihrer Taylorreihe überein.

- Die Taylorreihe liefert nicht immer die richtige Funktionsreihe zurück

14.1.2 Entwicklung mit endlicher Summe

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $x_0 \in U$. Dann gilt auf einem Intervall $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq U$

$$f(x_0 + t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)\, t^i + R_{n+1}(t)$$

mit

$$R_{n+1}(t) = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n f^{(n+1)}(x_0 + s)\, ds$$

falls $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$.

14.1.3 Fehlerabschätzung

Ist $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$ wie in 14.1.2, so gibt es $\eta : (-r, r) \to \mathbb{R}$ stetig mit $\eta(0) = 0$ und

$$f(x_0 + t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0)\, t^i + \eta(t)\, t^n$$

14.1.4 Vektorwertige Funktionen

$U \subseteq V$ offen, $f : U \to W$ C^{n+1}-Funktion.

$$\begin{aligned} f(u+h) &= f(u) + Df(u)(h) + \frac{1}{2} D^2 f(u)(h,h) \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{n!} D^n f(u) \left(\underbrace{h, \ldots, h}_{n-\mathrm{mal}} \right) \\ &\quad + R_{n+1}(h) \end{aligned}$$

mit

$$R_{n+1}(h) = \tfrac{1}{n!} \int_0^1 D^{n+1} f(u + h \cdot s) \left(\underbrace{h, \ldots, h}_{n+1-\mathrm{mal}} \right) (1-s)^n ds$$

14.2 Fourierreihe

14.2.1 Orthonormalsystem

Sei (V, h) Hilbertraum (d.h. V ist Vollständig, bzgl Norm $\|v\| = \sqrt{h(v,v)}$). Eine Teilmenge $B \subseteq V$, $B = \{b_i | i \in I\}$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS), falls

$$h(b_i, b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein ONS heißt *vollständig*, fallss der von B erzeugte Unterraum $W = \mathrm{span}(B)$ *dicht* ist, d.h. falls $\overline{W} = V$.

- Jeder Hilbertraum hat ein vollständiges ONS

14.2.2 Fourrierkoeffizienten

ISt $v \in V$ und ist B vollständiges ONS, so heißen die Zahlen $v_i = h(v, b_i)$ *Fourierkoeffizienten* von V. Für $I = \mathbb{N}$ konvergiert dann

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} b_k v_k$$

gegen v.

14.2.3 Fourierentwicklung mit Trigonometrischen Funktionen

Sei $V = C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ und $h(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, g(s)\, ds$ ist inneres Produkt auf V. Leider ist V *kein* Hilbertraum, aber er lässt sich zu einem Hilbertraum $(\hat{V}, \hat{h})$ vervollständigen (Dafür würde man einen anderen Integralbegriff benötigen).

Betrachte

$$\begin{aligned} b_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ b_{2k}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt) \\ b_{2k+1}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt) \end{aligned}$$

Die Menge $\{b_k | k \in \mathbb{N}\}$ist ein vollständiges ONS.

Für $f \in \hat{V}$ (insbesondere für $f \in V$) betrachte die Fourierkoeffizienten

$$h(f, b_n) = f_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, b_n(s)\, ds$$

die zugehörige Fourierreihe ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(t)\, f_k$$

sie konvergiert in $\hat{v}$ gegen f bzgl. der durch $\hat{h}$ gegebenen Norm.

- Das bedeutet i.a. keine punktweise Konvergenz der Fourierreihe gegen die Funktion.
- Sägezahn, konvergiert punktweise

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1) \cdot t)}{(2k+1)^2}$$

- Rechteck, konvergiert gleichmässig

$$f(t) = \mathrm{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ -1 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1) \cdot t)}{2k+1}$$

14.2.4 Konvergenzkriterium

Ist $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ Lipschitzstetig (insbesondere C^1-Funktion), so konvergiert die Fourierreihe *punktweise* gegen f.

Ist f sogar C^2-Funktion, dann konvergiert die Fourrierreihe *gleichmässig* gegen f.

Index