# Formelsammlung
# Einführung in die theoretische Physik

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 21.10.2005 - Version: 1.0.0
Erhältlich unter http://privat.macrolab.de

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung "Einführung in die theoretische Physik" von Prof. Dr. Jochen Wambach an der Technischen Universität Darmstadt im Sommersemester 2005.



## Inhaltsverzeichnis

# 1 Grundlagen der Klassischen Mechanik

## 1.1 Der Newtonsche Raum-Zeit-Begriff

### 1.1.1 Allgemeines

- abgeschlossenes Gedankengebäude
- für $v \ll c$ gültig
- Beschreibung der Bewegung von materiellen Körpern
- Raum-Zeit-Begriff

### 1.1.2 Raumbegriff

- der Raum ist 3-Dimensional (z.B. Höhe, Breite, Tiefe)
- der Raum ist unbegrenzt
- materielle Körper füllen begrenzte Gebiete des Raumes aus
- der Raum ist Euklidisch (z.B. ist die Winkelsumme im Dreieck= 180°
- Körper bewegen sich im Raum. Körper sind also Relativ zum Raum in Bewegung oder in Ruhe

### 1.1.3 Zeitbegriff

- das Dahinströmen der Zeit ist unabhängig von physikalischen Vorgängen
- alle Bewegungsvorgänge durch "absolute Zeit" beschreibbar
- gleichzeitige Ereignisse werden von allen Beobachtern (Ruhe oder Bewegung) als gleichzeitig erfahren

## 1.2 Kinematik

### 1.2.1 Bahn

- Alle materiellen Körper sind als "Massenpunkte" oder als eine Ansammlung von $N$ Massenpunkten darstellbar
- Bahnen sind eine Schaar von Vektoren mit Bahnparameter: z.B. mit Bahnparameter Zeit: $\vec{x}\,(t)$

### 1.2.2 Ereigniss

- Ein Ereignis ist durch 4 Zahlen beschreibbar. 3 Koordinaten des Raumes, und eine der Zeit. $E\,(\vec{x},t)$

### 1.2.3 Bewegungsgesetz

- Im allgemeinen lässt sich (mit Hilfe der Taylor Entwicklung) eine Gleichung mit Hilfe ihrer Ableitungen vollständig beschreiben.

$$\vec{x}\,(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(t-t_0)^n \left.\frac{d^n\vec{x}\,(t)}{dt^n}\right|_{t=t_0}$$

- Diese unendliche Summe lässt sich verkürzen, falls ein *Bewegungsgesetz* existiert. In einem Bewegungsgesetz lässt sich die $n$-te Ableitung aus der Funktion, dem Parameter und den vorhergehenden Ableitungen rekonstruieren:

$$\frac{d^n\vec{x}\,(t)}{dt^n} = \vec{f}\left(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}\vec{x}}{dt^{n-1}}, t\right)$$

- In der Newton'schen Mechanik ist $n = 2$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} &= \vec{f}\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right) \\ m\ddot{\vec{x}} &= \vec{F}\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right) \end{aligned}$$

## 1.3 Newtonsche Gesetze

**Dynamik** Kräfte als Ursache der Bewegungsänderung
Physikalisch Realisiert mit $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$

### 1.3.1 Arten von Kräften

**fundamentale Kräfte** Siehe Tabelle 1 auf der nächsten Seite.

- Die Gravitation hat hier eine Sonderrolle. Im Gegensatz zu den anderen Kräften ist sie immer anziehend.

**abgeleitete Kräfte** Diese haben einen im allgemeinen einen komplizierten Ursprung in den Fundamentalkräften.

- elastische Kraft, Federkraft $\vec{F} = -k\vec{x}$
- Reibungskräfte, Stokesches Gesetz $\vec{F}_R = -v\vec{v}$
- chemische Bindung, Van der Waals Kraft
- Zwangskräfte, Aufgrund von eingeschränkten Bewegungen
- Scheinkräfte, nicht-Inertialsysteme

### 1.3.2 Inertialsysteme

**Definition**

- Raum und Zeit sind *isotrop*, d.h. keine Richtung ist ausgezeichnet.
- Raum ist Homogen. d.h in jedem Punkt im Raum sind die *Newtonschen Gesetze* gleich.

**Eigenschaften**

- In Inertialsystemen herscht kräftefreie Situation (abgesehen von inneren Kräften)
- Eine Klasse von Inertialsystemen umfasst genau diejenigen *freifallenden* Systeme von denen aus gesehen sich ein Probekörper geradlinig und gleichförmig bewegt.
- Inertialsysteme bewegen sich gegeneiander geradlinig und gleichförmig. Relativgeschwindigkeit ist also konstant und sie rotieren nicht gegeneinander.

### 1.3.3 Die Newtonschen Gesetze

**Rahmenbedingungen** Diese sind in Inertialsystemen Formuliert für ein System von $N$ Massenpunkten.

**Bahnen** $\vec{x}^{(1)}(t), \ldots, \vec{x}^{(N)}(t)$

**Massen** $m_1, \ldots, m_N$

**Kräfte** $\vec{F}^{(1)}(t), \ldots, \vec{F}^{(N)}(t)$

**Impulse** $\vec{p}^{(i)}(t) = m_i \dot{\vec{x}}^{(N)}(t)$ für alle $i$

**Gesetze**

1. Es existieren Inertialsysteme, d.h. ein kräftefreier Massenpunkt ist in Ruhe oder geradlinig & gleichförmig bewegt.
   $\Rightarrow$ lineare Impulserhaltung
2. $\frac{d\vec{p}^{(i)}}{dt} = \dot{\vec{p}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)}$
3. actio = reactio
   $\vec{F}^{(i,j)} = -\vec{F}^{(j,i)}$
4. *Superpositionsprinzip*
   Jede Kraft bewirkt an einem Probekörper dir ihr zukommende Bewegungsänderung, unabhängig davon, ob noch andere Kräfte wirken.

### 1.3.4 Kräfteaddition

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(i)} &= \vec{F}^{(i)}\left(\vec{x}^{(i)}(t), \ldots, \vec{x}^{(N)}(t), \dot{\vec{x}}^{(1)}(t), \ldots, \dot{\vec{x}}^{(N)}(t), t\right) \\ &= \vec{F}^{(i)}_{extern}\left(\vec{x}^{(i)}, \dot{\vec{x}}^{(i)}(t), t\right) \\ &\quad + \sum_{j \neq i}^{N} \vec{F}^{(i,j)}\left(\vec{x}^{(j)}(t), \vec{x}^{(i)}(t), \dot{\vec{x}}^{(j)}(t), \dot{\vec{x}}^{(i)}(t), t\right) \end{aligned}$$

- In der unteren Gleichung werden die Kräfte in äußere, und in eine Summe von inneren Kräften zerlegt.

## 1.4 Arbeit und potentielle Energie

**Arbeit** $W_c = \int_1^2 d\vec{x}\vec{F}(\vec{x})$

**Zirkulation** $\Gamma_c = \oint d\vec{x}\vec{F}(\vec{x})$

**Konservative Kraft** $\Gamma_c = 0$

- Integral ist wegunabhängig, es kommt also nur auf die Endpunkte der Integrationsstrecke an
- Es ist äquivalent zu zeigen, dass

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

**Potential** $V_R(\vec{x}) = \int_{\vec{x}}^{R} d\vec{x}'\vec{F}(\vec{x}')$

- Der Referenzpunkt $R$ wir oft auf Unendlich $\infty$ gesetzt

Tabelle 1: fundamentale Kräfte

| Kraft | Beispiel für Wirkung | relative Stärke |
|---|---|---|
| Gravitation | Planetenbewegung | $10^{-40}$ |
| Schwache Wechselwirkung | $\beta$-Zerfall von Kernen | $10^{-5}$ |
| elektromagnetische Kraft | Coulomb-Kraft | $10^{-2}$ |
| starke Wechselwirkung | Kernkraft | 1 |

- Der Referenzpunkt kann meistens Weggelassen werden, da er $V$ lediglich um eine additive Konstante ändert, die bei Differenzbildung von $V$ ohnehinn wieder herausfällt

**Kraft** $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) = -\mathrm{grad} V(\vec{x})$

**Gleichgewichtspunkt** $\vec{F}(\vec{x}_0) = 0$

- Diese Punkte bilden eine Äquipotentialfläche

## 1.5 Kinetische Energie

**Kinetische Energie** $T = \frac{1}{2} m\vec{v}^2$

## 1.6 Energieerhaltung

**Energieerhaltung** $E = T + V = konst$

- für Konservative $\vec{F}$
- für Konservative Kräfte ist die Gesamtenergie während des Bewegungsablaufs konstant (erhalten).

**Leistung** $\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{F}\vec{x}\right) \approx \vec{F} \cdot \vec{v}$

## 1.7 Mehrteilchensysteme

### 1.7.1 Allgemein

**abgeschlossen** Ein System von $N$ Teilchen heißt abgeschlossen falls $\vec{F}_{ex}^{(i)} = 0$ für alle $i$

- In einem solchen System kann man durch Kentniss von allen $\vec{x}^{(i)}(t_0), \dot{\vec{x}}^{(i)}(t_0)$ alle $\vec{x}^{(i)}(t)$ für jedes $i$ und jedes $t$ bestimmen. *Laplace'scher Dämon* $\Rightarrow$ aufgrund von Messfehlern werden die Bahnen in vielen Fällen unvorhersagbar! (Chaos)

**Bewegungsgesetz**

$$\frac{d\vec{p}^{(i)}}{dt} = \vec{F}\left(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(N)}, \dot{\vec{x}}^{(1)}, \ldots, \dot{\vec{x}}^{(N)}, t\right)$$

**Zentralkräfte**

$$\vec{F}^{(ij)} = \vec{F}\left(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right) = F^{(ij)}\left(|\vec{r}|\right) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

### 1.7.2 Translation

**Massenschwerpunkt**

$$\vec{R}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i^{(i)}(t)}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i^{(i)}(t)}{M}$$

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

**Gesamtimpuls**

$$\begin{aligned} \vec{P}(t) &= \sum_{i=1}^{N} \vec{p}^{(i)}(t) \\ &= \dot{\vec{R}}(t) M \end{aligned}$$

$$\vec{p}^{(i)}(t) = m_i \dot{\vec{x}}(t)$$

**Kraft**

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}}(t) = M\ddot{\vec{R}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

### 1.7.3 Rotation

**Drehimpuls**

$$\vec{l}^{(i)}(t) = \vec{x}^{(i)}(t) \times \vec{p}^{(i)}(t)$$

$$\vec{L}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}^{(i)}(t)$$

**Drehmoment**

$$\vec{N}(t) = \dot{\vec{L}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{N}^{(i)}(t)$$

$$\vec{N}^{(i)}(t) = \vec{x}^{(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}$$

**Schwerpunkt als Referenzpunkt**

$$\vec{x}^{(i)}(t) = \vec{R}(t) + \vec{x}'^{(i)}$$

$$\vec{L}(t) = \vec{R}(t) \times \vec{P}(t) + \vec{L}_{in}(t)$$

$$\vec{L}_{in}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}'^{(i)}(t) \times \vec{p}^{(i)}(t)$$

- Für $\vec{R}(t)$ =konstant gilt $\vec{L} = \vec{L}_{in}$

### 1.7.4 Energie

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m\left(\ddot{\vec{x}}^{(i)}\right)^{2}}_{T}+\underbrace{\frac{d}{dt}\sum_{i<j}^{N}V^{ij}}_{V}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ex}^{(i)}\cdot\dot{\vec{x}}^{(i)}$$

- $T$ gesamte kinetische Energie
- $V$ gesamte potentielle Energie
- $E = T + V$ Gesamtenergie

$$\dot{E}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ex}^{(i)}\cdot\dot{\vec{x}}^{(i)}$$

### 1.7.5 Erhaltungssätze

**Bedingung** $\vec{F}_{ex}^{(i)} = 0$ Es wirken keine externen Kräfte

**Impulserhaltung** $\dot{\vec{P}} = 0 \Rightarrow \vec{P}$ =konstant

**Drehimpulserhaltung** $\dot{\vec{L}} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ =konstant

**Energieerhaltung** $\dot{\vec{E}} = 0 \Rightarrow \vec{E}$ =konstant

**Bewegungskonstanten** $\left|\left\{\vec{R}_0, \vec{P}, \vec{L}, E\right\}\right| = 10$

## 1.8 Kontinuierliche Systeme

**Dichte** $\varrho(\vec{x}) = \frac{dM}{dV}$ ist ein Skalares Feld

**Gebiet** $G$ hierüber ersteckt sich das System

**Masse** $M = \int_G dV\, \varrho(\vec{x})$

**Schwerpunkt** $\vec{R} = \frac{\int_G dV\, \varrho(\vec{x})\cdot\vec{x}}{\int_G dV\, \varrho(\vec{x})}$

## 1.9 Nicht Inertialsysteme

### 1.9.1 Transformation von Bezugssystemen

**Sachverhalt** Sei ein Punkt bezüglich dem System $K$ mit dem Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und bezüglich dem System $K'$ mit dem Vektor $\vec{x}' = (x_1', x_2', x_3')$ gegeben.

**Abstandserhaltend** ist eine Abbildung dann, wenn für zwei Punkte in beiden Systemen der gleiche Abstand gilt, also

$$d = \left|\vec{x} - \vec{\tilde{x}}\right| = \left|\vec{x}' - \vec{\tilde{x}}'\right|$$

- Eine Transformation zwischen Bezugssystemen muss Abstandserhalten geschehen

**Transformation des Ortsvektors**

$$\begin{aligned}\vec{x} &= A\vec{x}' + \vec{a}\\ \vec{x}' &= A'\vec{x} + \vec{a}'\end{aligned}$$

- $A$ und $A'$ sind reelle orthoginale $3\times 3-$Matrizen. Das heißt es gilt: $A^{-1} = A^T$
- $A' = A^T$
- $\vec{a}' = -A^T\vec{a}$
- $\vec{a}$ bzw. $\vec{a}'$ sind die Abstände der Koordinatenursprünge
- Es sind in der Summe 6 Parameter die die Transformation bestimmen. 3 Winkel und 3 stück für den Offset Vektor.

**Transformation der Zeitableitung**

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt'} + \vec{\omega}'\times$$

**Transformation der Geschwindigkeit**

$$\vec{v} = \vec{v}' + \dot{\vec{R}} + \vec{\omega}' \times \vec{x}'$$

- die Strichgrössen $(v', x')$ sind in den Koordinaten des urspünglichen Systems einzugeben

**Transformation der Beschleunigung / Kraft**

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}') + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}'$$

$$m\vec{a}' = \vec{F}' = \vec{F} + m(\vec{a}' - \vec{a}) = \vec{F} + \vec{F}_s$$

**Scheinkräfte**

$$\vec{F}_s = \vec{F}_{col} + \vec{F}_{zen} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{tr}$$

**Translative Kraft** $\vec{F}_{tr} = -m\ddot{\vec{R}} = m\ddot{\vec{R}}'$

**Zentrifugalkraft** $\vec{F}_{zen} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}')$

**Coreoliskraft** $\vec{F}_{col} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

**Namenslos** $\vec{F}_1 = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}'$

### 1.9.2 Drehungen

**Drehmatrix** $\mathcal{D}(\psi, \theta, \varphi) = \mathcal{D}_3(\varphi) \cdot \mathcal{D}_1(\theta) \cdot \mathcal{D}_3(\psi)$

- Gesamtmatix siehe Abbildung 1 auf der nächsten Seite.
- Drehung um die 1-Achse mit dem Winkel $\theta$ $\mathcal{D}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Abbildung 1: Komplette Drehmatrize

$$\mathcal{D}(\psi,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\psi\cdot\cos\varphi - \sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi & -\cos\psi\cdot\sin\varphi - \sin\psi\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi & \sin\psi\cdot\cos\theta \\ \cos\psi\cdot\sin\varphi\cos\theta + \sin\psi\cdot\cos\varphi & -\sin\psi\cdot\sin\varphi + \cos\psi\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta & -\cos\psi\cdot\sin\theta \\ \sin\varphi\cdot\sin\theta & \sin\theta\cdot\sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Drehung um die 3-Achse mit dem Winkel $\varphi$
  $\mathcal{D}_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Dies mit den 3 Parametern lassen sich alle möglichen Drehungen im $\mathbb{R}^3$ beschreiben.
- Dies sind die eulerschen Winkel
- Drehmatizen sind identisch mit *Orthogonalmatizen*. Charakteristika:
  - $A^{-1} = A^T$
  - $\det A = 1$
- $\mathcal{D}_i(x)\,\mathcal{D}_i(y) = \mathcal{D}_i(y)\,\mathcal{D}_i(x)$
- $\mathcal{D}_i(x)$ bilden eine kommutative Gruppe
- Diese Matrizen sind abstandserhaltend
  $\langle a, b\rangle = \langle Aa, Ab\rangle$

**Intifesimale Drehungen**

**Drehmatrix**

$$A(\Delta\psi,\Delta\theta,\Delta\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\varphi-\Delta\psi & 0 \\ \Delta\varphi+\Delta\psi & 1 & -\Delta\theta \\ 0 & \Delta\theta & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta A &= \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\varphi-\Delta\psi & 0 \\ \Delta\varphi+\Delta\psi & 0 & -\Delta\theta \\ 0 & \Delta\theta & 0 \end{pmatrix} \\ \Delta A &= -\Delta A^T \end{aligned}$$

**Drehvektor** Eine Drehung des Vektors $\Delta\vec{a}$ um den Winkel $\alpha$ um die Achse $\vec{\alpha}$ lässt sich durch das Kreuzprodukt $\Delta\vec{a}\times\vec{\alpha}$ beschreiben

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\alpha} &= \begin{pmatrix} \Delta\theta \\ 0 \\ \Delta\varphi+\Delta\psi \end{pmatrix} \\ \vec{\omega} &= \begin{pmatrix} \dot\theta \\ 0 \\ \dot\varphi+\dot\psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\vec{a} &= \Delta A\vec{a} \\ &= \begin{pmatrix} -a_2(\Delta\varphi+\Delta\psi) \\ a_1(\Delta\varphi+\Delta\psi) - a_3\Delta\theta \\ a_2\Delta\theta \end{pmatrix} \\ &= \Delta\vec{\alpha}\times\vec{a} \\ &= \Delta\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}_\perp \end{aligned}$$

- $\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_\perp$ bezogen auf $\Delta\vec{\alpha}$
- $\vec{a}_{||} = \frac{(\vec{a}\cdot\Delta\vec{\alpha})\Delta\vec{\alpha}}{|\Delta\vec{\alpha}|^2}$
- $\Delta\vec{\alpha}\vec{a}_{||} = 0$
- Drehvektor $\Delta\vec{\alpha} = \Delta\gamma\vec{e}_{\Delta\alpha}$
  - $\Delta\gamma = |\Delta\vec{\alpha}| = \sqrt{(\Delta\theta)^2 + (\Delta\psi+\Delta\varphi)^2}$

# 2 Spezielle Relativitätstheorie

**Geltungsbereich** In der speziellen Relativitätstheorie werden nur Inertialsysteme betrachtet. Das heißt, Systeme die gegeneinander nicht beschleunigt sind, und frei fallen.

**Eingenschaften** In der Newtonschen Mechanik werden Geschwindigkeiten einfach addiert und die Zeit verläuft in allen Systemen gleich. In der Speziellen Relativitätstheorie wird der Bedingung Rechnung getragen, dass die Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem konstant ist und also den gleichen Wert hat, nämlich

**Lichtgeschwindigkeit** $c = 2,99792458\cdot 10^8\,\frac{m}{s}$

## 2.1 Lorentz-Transformation

**Bedingung** in allen Inertialsystemen $K$ und $K'$ muss gelten

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$$

### 2.1.1 Spezielle Lorentztransformation

Sei das Inertialsystem $K'$ gegenüber dem Inertialsystem $K$ entlang der $x$-Achse mit der Geschwindigkeit

$v$ bewegt.

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma (x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left( t - \frac{\beta}{c} x \right) \end{aligned}$$

### 2.1.2 Lorentz-$\gamma$-Faktor

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \beta &= \frac{v}{c} \end{aligned}$$

- $\beta$ kann als eine art Geschwindigkeit aufgefasst werden. Wobei $c$ dabei 1 und damit das Maximum darstellt.

### 2.1.3 allgemeine Lorentztransformation

Sei das Inertialsystem $K'$ gegenüber dem Inertialsystem $K$ entlang der Geschwindigkeit $\vec{v}$ (gemessen im System $K$) bewegt.

Hierfür werden die Formeln aus der Speziellen Lorentztransformation genutzt, allerdings der Vektor $\vec{x} = (x, y, z)$ wird in zwei Komponenten zerlegt

$$\vec{x} = \vec{x}_{||} + \vec{x}_{\perp}$$

Dabei ist $\vec{x}_{||}$ die Komponente von $\vec{x}$ in Richtung $\vec{v}$, und $\vec{x}_{\perp}$ die senkrecht dazu. Nun könnte man einfach $\vec{x}_{||}$ wie in der speziellen Lorenztransformation verändern, und $\vec{x}_{\perp}$ gleich belassen unter der Transformation. Dies eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}\vec{x}}{v^2} \vec{v} - \gamma \vec{v} t \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{\vec{v}\vec{x}}{c^2} \right) \end{aligned}$$

### 2.1.4 Addition der Geschwindigkeiten

Sei $K'$ relativ zu $K$ entlang der $x$-Achse mit $\vec{v} = (v, 0, 0)$ bewegt. Eine Geschwindigkeit $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ im System $K$ sieht aus dem System $K'$ betrachtet wie folgt aus

$$\vec{w}' = \frac{1}{1 - \frac{w_x v}{c^2}} \left( w_x - v, w_y \sqrt{1 - \beta^2}, w_z \sqrt{1 - \beta^2} \right)$$

- $v_{ges} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$
- Grenzfall keiner Geschwindigkeiten $v \ll c$ gilt: $\vec{w}' = \vec{w} - \vec{v}$

## 2.2 Minkowski Raum

### 2.2.1 Weltraum

**Weltraum** wird die Menge $M$ aller Ereignisse genannt, die aus 4-Tupeln $(x, y, z, t)$ bestehen. D.h. $E(\vec{x}, t) \in M$.

**Weltlinie** ist eine Kurve im 4 Dimeanionalen Raum und beschreib die Reise eines Teilchens durch Raum und Zeit.

### 2.2.2 Kontra- und Kovariante Vektoren

$$x^\mu = \left( x^0, x^1, x^2, x^3 \right) = (ct, x, y, z)$$

mit $\mu = 0, 1, 2, 3$ ist ein *Kontravarianter Vektor.*

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$$

mit $\mu = 0, 1, 2, 3$ ist ein *Kovarianter Vektor.*

Das Längenquadrat von $x^\mu$ ist mit

$$s_E^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

bezeichnet. Es gilt:

$$s^2 = x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$s^2$ ist also Invariant unter der Lorentztransvormation.

- $s^2$ kann auch negativ werden!

### 2.2.3 Lorentztransformation

Es gilt

$$x'^\mu = \sum_\nu L_{\nu\mu} x^\nu = L_{\mu\nu} x^\nu$$

mit $L$ als $4 \times 4$-Matrix.

Für den Fall einer Bewegung in $z$-Richtung mit $v$ gilt:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

- $\det L = 1$
- $L^T = L$
- $L$ beschreibt eine Drehung im Minkowski Raum
- $L$ ist *keine* Orthogonalmatrix, d.h. $L^{-1} \neq L^T$
- $L^{-1}(\beta) = L(-\beta)$

#### 2.2.4 Eigenschaften des Längenquadrats

$$s^2 = x^\mu x_\mu = \begin{cases} > 0 & \text{zeitartig} \\ = 0 & \text{lichtartig} \\ < 0 & \text{raumartig} \end{cases}$$

**Lichtkegel** In einem Raum / Zeitdiagramm (Räumliche Ausdehnung auf der Achse $x$ und $y$ Achse und $ct$ auf der $z$ Achse) bildet $s^2 = 0$ einen Kegeloberfläche die die $z$ und $x$ bzw. $y$ Achsen genau Winkelhalbiert. Innerhalb ist der *zeitartige* Berech, außerhalb der *raumartige*.

**Raumartig** Falls das Abstandsquadrat zwischen zwei Ereignissen $(E_1^\mu - E_2^\mu)^2 < 0$ ist bedeutet dies, das sie *nicht* Kausal voneinander abhängen können, da nichts schneller ist als das Licht und sie somit keine Informationen austauschen könnten. Desweiteren existert ein Inertialsystem, in dem die Ereignisse zum gleichen Zeitpunkt allerdings an unterschiedlichen Orten geschehen sind. Desweiteren lässt sich sogar durch passende Transfromation vertauschen.

**Zeitartig** Falls das Abstandsquadrat zwischen zwei Ereignissen $(E_1^\mu - E_2^\mu)^2 > 0$ ist bedeutet dies, das sie Kausal voneinander abhängen können, da z.B. das Licht genug zeit gehabt hätte um Informationen auszutauschen. Desweiteren existert ein Inertialsystem, in dem die Ereignisse am gleichen Ort allerdings zu unterschiedlichen zeiten geschehen sind.

**Lichtartig** Mit dem Abstandsquadrat zwischen zwei Ereignissen $(E_1^\mu - E_2^\mu)^2 = 0$. Dies ist der Grenzfall.

- Dies ist eine Lorentzinvariante. Die Eingenschaft, raum- licht- oder zeitartig zu sein bleibt also bei der Lorenztransformation erhalten.

### 2.3 Mechanik

Das Ziel ist es die Grundgesetze der klassischen Mechanik so umzuschreiben, das forminvariant sind gegenüber der Lorenztransformation (behalten Form bei).

#### 2.3.1 Kinematik

Alle hier aufgeführten Größen sind Lorentzinvariant

**Differential** $dx^\mu = (c \cdot dt, dx, dy, dz)$

**Bogenelement** $(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = c^2 (dt)^2 - (d\vec{x})^2$

**Eigenzeit** $(d\tau)^2 = \frac{1}{c^2}(ds)^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2}(d\vec{x})^2 = (dt')^2$

- $dt'$ ist im mitgeführten Inertialsystem mit Relativgeschwindigkeit $v$

**Zeit** $dt = \gamma d\tau > d\tau$

- Das heißt die Eigenzeit geht immer nach!

**Geschwindigkeit** $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma (c, \vec{v})$

- es gilt $u^\mu u_\mu = c^2$
- Im mitgeführten Inertialsystem $\left(c, \vec{0}\right)$

#### 2.3.2 Dynamik

**relativisitsche Masse** $m(v) = \gamma(v)\, m$

**Minkowski-Kraft** $K^\mu = m\frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma\left(\frac{\vec{F}\vec{v}}{c}, F_x, F_y, F_z\right)$

- $K^\mu u_\mu = 0$
- $\vec{F}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\gamma m c^2\right)$
- Im mitgeführten Inertialsystem $\left(0, \vec{F}\right)$

**Kinetische Energie** identisch mit relativistischer Energie

**Relativiteische Energie** $E = T = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4} = \gamma m c^2$

- Für $v \lll c$ gilt $T = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$
- ist Erhaltungsgröße und Lorenzinvariant
- Impulserhaltung $\Leftrightarrow$ Energieerhaltung

**Ruheenergie** $mc^2$

**Vierer-Impuls**

$$p^\mu = mu^\mu = \left(\frac{T}{c}, \gamma m v_x, \gamma m v_y, \gamma m v_z\right) = \left(\frac{T}{c}, \vec{p}\right)$$

- $p^2 = m^2c^2$
- $\vec{p} = m(v)\,\vec{v}$
- ist Erhaltungsgröße und Lorenzinvariant
- Impulserhaltung $\Leftrightarrow$ Energieerhaltung

## 3 Thermodynamik

### 3.1 Einleitung

#### 3.1.1 Begriffe

**thermodynamisches System** System mit $\sim 10^{23}$ Teilchen

**Wände** die Abgrenzung des Systems zur Umgebung geschieht durch Wände

**abgeschlossenes System** kein Austausch mit Umgebung (isoliert)

**geschlossenes System** Kontakt mit Umgebung

- **Wärmeaustausch** die Umgebung ist ein Wärmebad mit "unendlicher" Kapazität
- **Arbeitsaustausch** System verrichtet in der Umgebung Arbeit

**offenes System** auch Austausch von Teilchen

**Zustandsgrößen** Aus den gemeinsamen Eigenschaften der Körper im Vielteilchensystem lassen sich gemeinsamkeiten "extrahieren".
Gas: $V, p, T, N, S, U, \ldots$

**Zustandsfunktionen** setzt zustandsgrößen in Beziehung

- **extensive Zustandsgrößen** sind (Stoff-) Mengenabhängig, d.h. sie verändern sich beim Zusammenführen sonst gleicher Systeme
- **intensive Zustandsgrößen** sind nicht (Stoff-) Mengenabhängig

**Zustandsraum** gebildet aus allen möglichen Zustandsgrößen

**Zustand** Punkt im Zustandsraum

**Gleichgewicht** Werte der Zustandsgrößen sind zeitlich konstant

**thermodynamischer Prozess** Folge von Gleichgewichtszuständen

### 3.1.2 Hauptsätze

**0. Hauptsatz** Existenz einer Temperatur

**1. Hauptsatz** "Wärme": es gilt Energieerhaltung

**2. Hauptsatz** "Wärme" lässt sich nicht vollständig in andere Energieformen umsätzen

**3. Hauptsatz** Temperaturnullpunkt nie erreichbar

- Mikroskopische Begründung in der statistischen Physik

## 3.2 Themperaturegriff

### 3.2.1 Eigenschaften

1. Jedes makroskopische System besitzt eine Temperatur
   intensive Zustandsgröße → überall gleich im isolierten System
2. skalare Meßgröße
3. $A$ und $B$ Systeme mit Temperaturen es gilt:
   Anordnungsaxiom:
   $T_A > T_B$ bzw. $T_A < T_B$ bzw. $T_A = T_B$
4. $A, B$ und $C$ Systeme mit Temperaturen es gilt:
   $T_A > T_B \wedge T_B > T_C \Rightarrow T_A > T_C$
5. $A$ und $B$ Systeme mit Temperaturen es gilt:
   $T_A = T_B = T_{A+B}$
6. $A$ und $B$ Systeme mit Temperaturen es gilt:
   $T_A^{(1)} < T_B^{(1)} \rightarrow T_A^{(1)} < T_{A+B}^{(2)} < T_B^{(1)}$
7. 0.te Hauptsatz:
   jedem thermodynamischen System kann eine Temperatur zugeordnet werden
8. Meßvorschrift
   Thermometer: jede Physikalische Eigenschaft die streng monoton von $T$ abhängt kann zur konstruktion eines Thermometers verwendet werden.

## 3.3 Ideales Gas

### 3.3.1 Eigenschaften

- Punktteilchen: kein Eigenvolumen
- keine Wechselwirkung
- entsprechen Realen Gasen unter extremer Verdünnung $\varrho = \frac{N}{V} \rightarrow 0$

### 3.3.2 Zustandsgleichung

Nach *Boyle-Mariott* gilt

$$\frac{pV}{N} = k$$

gemäß der Erfahrung gilt:

$$k(\theta) = k_0 (1 + \alpha\theta)$$

- $p$ Druck, Kraft pro Fläche
- $V$ Volumen
- $N$ Anzahl Teilchen im Volumen

### 3.3.3 Celsius Skala

$\theta(0°)$ : Gefrierpunkt von Wasser bei $p = 1atm$

$\theta(100°)$: Siedepunkt von Wasser bei $p = 1atm$

$$\alpha = \frac{k(100°) - k(0°)}{100°K(0°)} = \frac{1}{273,2}$$

#### 3.3.4 Kelvin Skala

Dies ist eine Absolute Temperaturskala. D.h. es gibt keine negativen Temperaturen.

$$T = \frac{1}{\alpha} + \theta = 273,2 + \theta$$

$$k(t) = k_0 \alpha T = k_B T$$

mit der *Bolzmann Konstante*

$$k_B = 1,3805 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

Somit gilt für das ideale Gaß

$$pV = N k_B T$$

mit der *Avogrado-Konstante*

$$N_a = 6,02252 \cdot 10^{-23} \frac{1}{mol}$$

und der *Idealen Gaskonstante*

$$R = k_B N_A = 8,3146 \frac{J}{K\, mol}$$

und der *Molanzahl* $n$

$$n = \frac{N}{N_A}$$

lässt sich die ideale Gasgleichung auch so schreiben

$$pV = nRT$$

- Diese Gleichung kann keine Phasenübergänge beschreiben

## 3.4 Reale Gase

#### 3.4.1 Van der Waalsgleichung

$$p_{\text{eff}} V_{\text{eff}} = nRT$$

Hierbei werden die Eigenvolumina in $V_{\text{eff}}$ und die Wechselwirkungskräfte der Teilchen $p_{\text{eff}}$.

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= V - nb \\ p_{\text{eff}} &= p + a\frac{n^2}{V^2} \end{aligned}$$

mit $a, b$ Materialkonstanten

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT = N k_B T$$

#### 3.4.2 Kritische Punkte

Die Van der Waalsgleichung lässt sich auch wie folgt umformen:

$$V^3 - V^2\left(nb + \frac{nRT}{p}\right) + V\frac{an^2}{p} - ab\frac{n^3}{p} = 0$$

Diese gleichung hat für $V > V_c$ nur eine reelle Lösung. Das Tripel $(p_c, V_c, T_c)$ nennt sich Kritischer Punkt. Es gilt:

$$(V - V)^3 = V^3 - 3V^2 V_c + 3V V_c^2 = 0$$

durch Koeffizientenvegleich erhält man:

$$\begin{aligned} V_c &= 3bn \\ p_c &= \frac{a}{27b^2} \\ RT_c &= \frac{8a}{27b} \\ Z_c &= \frac{p_c V_c}{nRT_c} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

für reale Gase ist $Z_c < \frac{3}{8}$. Beim idealen Gas ist $Z_c = 1$.

#### 3.4.3 Reduzierte Größen

Mit Hilfe reduzierter Größen lässt sich die Vanderwaals Gleichung wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{p}{p_c} \\ v &= \frac{V}{V_c} \\ t &= \frac{T}{T_c} \end{aligned}$$

$$\left(\pi + \frac{3}{V^2}\right)\left(3V^2 - 1\right) = 8t$$

#### 3.4.4 Maxwell Konstruktion

Im Bereich unterhalb von $p_c$ wird die Kurve ein Stückweit durch eine Gerade parallel zu $V$ Achse ersetzt, und zwar so, das die Fläche zwischen den beiden Kurven im Bereich zwischen den Schnittpunkten gleich 0 ist.

#### 3.4.5 Viralentwicklung

Die Van der Waalsgleichung lässt sich auch schreiben als

$$p = \frac{nRT}{V}\left(1 + B_1\left(\frac{N}{V}\right) + B_2\left(\frac{N}{V}\right)^2 + \dots\right)$$

mit den Viralkoeffizienten $B_i$ diese sind für die Van der Waalsgleichung

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{b}{N_a} - \frac{a}{N_a^2 k_b T} \\ B_i &= \left(\frac{b}{N_a}\right)^i \text{ für } i \geq 2 \end{aligned}$$

## 3.5 Thermodynamische Arbeit

### 3.5.1 Begriffe

- $\Delta W$ Energieform - Zustandsänderungen sind mit Energieänderungen verknüpft
- $\Delta Q$ Änderung des Wärmeinhalts: Wärmemenge
- $\Delta W > 0$ wenn *am* System Arbeit geleistet wird
- $\Delta W < 0$ wenn *vom* System Arbeit geleistet wird
- $\Delta Q > 0$ wenn *in das* System Wärme gepumpt wird
- $\Delta Q < 0$ wenn *aus dem* System Wärme gepumpt wird

### 3.5.2 Arbeit

$$\delta W = -p\, dV$$

Ist die mechaniche Arbeit die durch eine Veränderung des Volumens geleistet wird. Dies ist zwar infinitesimal, aber kein totales Differential, also nicht $dW$.

- $\int_c \delta W$ ist im allgemeinen Wegabhängig
- $\Delta W = \int \delta W = -\int_{V_1}^{V_2} p\,(V)\ dV$
- Die Arbeit kann keine Zustandsgröße sein weil $\oint \delta W \neq 0$

### 3.5.3 Differentialform

Eine *Differentialform*

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} a_i\,(x_1, \ldots, x_m)\, dx_i$$

ist nur dann ein totales Differential $dA$, falls

$$\oint \delta A = 0 = \oint dA$$

### 3.5.4 Zustandsfunktion

Eine *Zustandsgröße* (*Zustandsfunktion*) muss eindeutig sein. Durchläuft ein System im Zustandsraum einen geschlossenen Weg, so müssen alle abhängigen wie unabhängigen Zustandsgrößen wieder ihre Ausgangsgrößen annehmen. Von einer Zustandsgröße $\eta$ fordert man daher

$$\oint d\eta = 0$$

- $d\eta$ ist totales Differential
- Beim zweifachen partiellen ableiten kann die Reihenfolge bei totalen Differentialen vertauscht werden

### 3.5.5 Hinzufügen von Teilchen

Das hinzufügen von Teilchen in ein System erfordert auch Arbeit.

$$\begin{aligned} N &\rightarrow N + dN \\ \delta W &= \mu dN \end{aligned}$$

$\mu$ ist hierbei das chemische Potential.

Falls das System aus $k$ verschiedenen Teilchen besteht mit unterschiedlichen $\mu_i$ gilt

$$\delta W = \sum_{i=1}^{k} \mu_i dN_i$$

## 3.6 Erster Hauptsatz - Energieerhaltung

### 3.6.1 Einleitung

Um die Energieerhaltung auch auf Thermodynamische Systeme auszudehnen, muss man ihnen eine Energie zuordnen. Dies ist die Wärme. Sie besteht aus den mikroskopischen kinetischen Energien der einzelnen Teilchen im System.

$$\delta Q = C \cdot dT$$

- $Q$ ist extensive Größe $T$ aber nicht. Also ist auch $C$ eine extensive Größe.
- $C$ bezeichnet die Wärmekapazität eines Systems
- Man kann ein $C = n \cdot c = \frac{N}{N_a} c$ definieren

### 3.6.2 innere Energie

Für die innere Energie $U$ gilt

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Mit Austasch von Teilchen gilt allgemeiner

$$dU = \delta W + \delta Q + \sum_{i=1}^{k} \mu_i dN_i$$

- $U$ ist eine Zustandsgröße, es gilt also $\oint dU = 0$
- In einem isolierten System (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung) ist $U$ daher eine Erhaltungsgröße und es gilt

$$dU = 0$$

### 3.6.3 kalorische Zustandsgleichung

Bei einem idealen Gas gilt

$$\begin{aligned} U &= U(T,N) \\ &= \frac{f}{2} N k_b T \end{aligned}$$

mit $f$ der Anzahl der Freiheitsgerade des Gases.

## 3.7 Wärmekapazitäten

### 3.7.1 Einleitung

Wie erwähnt gibt es einen Zusammenhang

$$\delta Q = C_x dT$$

allerdings erweitert um $x$, das beschreibt in welcher Weise $\delta Q$ geändert wird.

$$C_x = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_x$$

Dies lässt sich unter Kenntniss von $U$ bestimmen.

### 3.7.2 Innere Energie allgemein

Im Folgenden setzten wir ein geschlossenes System vorraus, also ohne Teilchenaustausch. Das heißt das die innere Energie im Allgemeinen von der Temperatur $T$ und einigen (nicht genauer Spezifizierten) Zustandsvariablen $q_1, \ldots, q_n$ abhängt, also

$$U = U(T, q_1, \ldots, q_n)$$

Somit können wir die Arbeit verallgemeinert schreiben mit Hilfe passender $F_i$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} F_i dq_i$$

somit ist die innere Energie

$$\begin{aligned} \delta Q &= dU - \delta W \\ &= dU - \sum_{i=1}^{n} F_i dq_i \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_q dT + \sum_{i=1}^{n} \left( \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_{T, q_j \neq q_i} - F_i \right) dq_i \end{aligned}$$

### 3.7.3 Konstante $q_i$

Seien nun außer $T$ alle Zustandsvariablen von denen $U$ abhängt, also $q_1, \ldots, q_n$ konstant. Somit ist $dq_i = 0$ für jedes $i$. Dann gilt:

$$C_q = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_q$$

### 3.7.4 Konstante $F_i$

Seien nun alle $F_i$ konstant, also $dF = 0$. Da $F_j = F_j(q_1, \ldots, q_m, T)$ ist für alle $j$. Somit ist das Totale differential für $q_i$ gleich

$$\begin{aligned} dq_i &= \sum_{j=1}^{n} \left( \left(\frac{\partial q_i}{\partial F_j}\right)_{T, q_i \neq q_j} dF_i \right) + \left(\frac{\partial q_i}{\partial T}\right)_F dT \\ &= \left(\frac{\partial q_i}{\partial T}\right)_F dT \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} C_F &= \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_F \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_q + \sum_{i=1}^{n} \left( \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_{T, q_j \neq q_i} - F_i \right) \left(\frac{\partial q_i}{\partial T}\right)_F \end{aligned}$$

### 3.7.5 Wärmekapazitäten bei Gas

Für ein Gas mit $q = V$ und $F = -p$ gilt dann für

- $V$ konstant

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

- $p$ konstant

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left( \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \right) \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Daraus folgt:

$$C_p - C_V = \left( \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \right) \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

### 3.7.6 Ideales Gas

Hier ist $U = U(T)$ also unabhängig von $V$, also $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$. Mit folgenden

$$\begin{aligned} U &= \frac{f}{2} N k_b T = U(T, N) \\ V &= \frac{N k_b T}{p} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p &= \frac{N k_b}{p} \\ C_p - C_v &= N k_b \end{aligned}$$

## 3.8 Abiabaten und Isothermen

### 3.8.1 Abiabatische Zustandsänderung

Für eine abiabatische Zustandsänderung (Weg im Zustandsraum) gilt

$$\delta Q = 0$$

- Erhalten bleibt die Entropie $S$

### 3.8.2 Abiabaten beim idealen Gas

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

- $TV^{\gamma-1} = const.$
- $pV^{\gamma} = const.$
- $T^{\gamma}p^{1-\gamma} = const.$

### 3.8.3 Isotherme Zustandsänderung

Für eine isotherme Zustandsänderung (Weg im Zustandsraum) gilt

$$dT = 0$$

- für ein ideales Gas gilt

$$(\delta Q)_T = (pdV)_T$$

## 3.9 Zweiter Hauptsatz

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

- Es gibt kein perpetuum mobile zweiter Art
- Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die lediglich einem kälteren Wärmebad Wärme entziehen und diese einem wärmeren Wärmebad zuführt.

## 3.10 Carnot Kreisprozess

**Bestandteile** zwei Abiabaten und zwei Isothermen

**Wirktungsgrad** $\eta = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

- Der Carnot Prozess hat den höchsten Wirkungsgrad von allen zwischen zwei Wärmebädern arbeitenden Maschinen
- Dieser Wirkungsgrad wird von allen reversibel arbeitenden Maschinen erreicht
- Über diesen Wirkungsgrad lässt sich eine absolute Temperaturskala definieren, die nicht mehr von der Existenz eines idealen Gases ausgeht.

## 3.11 Entropie

### 3.11.1 Clausiussche Ungleichung

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

### 3.11.2 Entropie für reversible prozesse

Bei reversiblen Prozessen gilt

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

also ist die *Entropie*

$$S(A) = \int_{A_0}^{A} \frac{\delta Q}{T}$$

wegunabhängig und bis auf eine additive Konstante festgelegt.

- $dS = \frac{\delta Q}{T}$ ist also ein totales Differential
- im idealen Gas gilt

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

### 3.11.3 Entropie in beliebigen Prozessen

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

$$dS \geq dU - \delta W - \delta E_c$$

$$\delta E_c = \sum_{i=1}^{n} \mu_i dN_i$$

- Im isolierten System gilt

$$dS \geq 0$$

- Entropie ist immer auf reversiblen Ersatzprozessen zu berechnen

## 3.12 Folgerungen

- Im System ohne Teilchenaustausch $TdS = dU - \delta W$

# Index