Formelsammlung
Lineare Algebra I/II für Physiker

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 29.11.2005 - Version: 1.0.0
Erhältlich unter http://privat.macrolab.de

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung "Lineare Algebra I/II für Physiker" von Prof. Dr. Michael Joswig an der Technischen Universität Darmstadt im Wintersemester 2004/05 und Sommersemester 2005.

Inhaltsverzeichnis

1 Vektroräume

1.1 Gruppen, Ringe, Körper

1.1.1 Qunatoren & Aussagenlogik

Verknüpfungen

- Negation
  $\neg a$: nicht a
- Implikation
  $a \Rightarrow b$: aus a folgt b
- Äquivalenz
  $a \Longleftrightarrow b$: a und b sind äquivalent (gleichwertig)
- Konjunktion
  $a \wedge b$: a und b
- Disjunktion
  $a \vee b$: a oder b

Wahrheitstabelle:

a	b	$\neg a$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
f	f	w	f	f	w	w
f	w	w	w	f	w	f
w	f	f	w	f	f	f
w	w	f	w	w	w	w

Quantoren

- Allquantor $\forall x : \varphi(x)$
  für alle x gilt $\varphi(x)$.
  z.B. $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \in \mathbb{N} = \forall_{\mathbb{N}}^{x} : x^2 \in \mathbb{N}$
- Existenzquantor $\exists x : \varphi(x)$
  es gibt (mindestens) ein x für das $\varphi(x)$ gilt.
  z.B. $\exists x \in \mathbb{N} : \varphi(x) = \exists_{\mathbb{N}}^{x} : \varphi(x)$
- $\exists! x : \varphi(x)$ oder $\exists^1 x : \varphi(x)$
  es gibt genau ein x für das $\varphi(x)$ gilt.
- Negation $\forall x : H(x) \Leftrightarrow \neg\exists x : \neg H(x)$
  Es gilt für alle x, $H(x) \Leftrightarrow$ Es gibt nicht ein x, für das $H(x)$ nicht gilt.

Rechenregeln

- Kommutativgesetz
  $a \wedge b = b \wedge a$
  $a \vee b = b \vee a$
- Assoziativgesetz
  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
- Distributivgesetz
  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- De Morgan
  $\neg (a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
  $\neg (a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$
- doppelte Negation
  $\neg (\neg a) = a$
- Rechenregeln des logischen Schließens
  - direkter Schluss
    $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
  - indirekter Schluss
    $[(\neg B) \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow (\neg A)$
  - Kontraposition
    $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- Negation von Quantoren
  $\neg (\forall a : \varphi(a)) \Leftrightarrow (\exists a : \neg\varphi(a))$
  $\neg (\exists a : \varphi(a)) \Leftrightarrow (\forall a : \neg\varphi(a))$
- neutrales Element
  $a \vee \mathrm{f} = a$
  $a \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}$
  $a \vee \mathrm{w} = \mathrm{w}$
  $a \wedge \mathrm{w} = a$
- inverses Element
  $a \vee (\neg a) = \mathrm{w}$
  $a \wedge (\neg a) = \mathrm{f}$

Eigenschaften von Aussagen

Widerspruch (Symbol: Blitz) heißt eine zusammengesetzte Aussage, wenn sie *immer falsch* ist.
z.B. $A \wedge \neg A$

Tautologie heißt eine Aussage, wenn sie *immer wahr* ist.
z.B. $A \vee \neg A$

1.1.2 Sonstige Definitionen

Potenzmenge $\mathcal{P}(M) := \{M' | M' \subseteq M\}$

Differenzmenge für $M', M'' \subseteq M$ sei
$M' - M'' := \{m | m \in M' \wedge m \notin M''\}$

Menge aller Abbildungen Seien A, B beliebige Mengen. Dann bezeichnet $A^B := \{f | f : B \to A\}$ die Menge aller Abbildungen von B nach A.

Verkettung Sei M eine beliebige Menge. Die *Verkettung* von Abbildungen von M in sich ist definiert durch $\circ : M^M \times M^M \to M^M$ mit $g \circ f : M \to M : m \mapsto g(f(m))$ für $f, g \in M^M$ und $m \in M$.

- Verkettungen sind assoziativ.
- Die Verkettung von bijektiven Abbildungen ist wieder bijektiv

Sym $\mathrm{Sym}(M) := \{f | f : M \to M \text{ bijektiv}\}$

- für $M = \{1, \ldots, k\} \subseteq \mathbb{N}$ schreibe S_k (Menge von allen möglichen Permutationen von k Zahlen)

1.1.3 Verknüpfung

Eine (binäre) *Verknüpfung* $*$ auf einer Menge M ist eine Abbildung $* : M \times M \to M : (m, m') \mapsto m * m'$. Sie heißt

kommutativ falls $\forall_M^{m,m'} : m * m' = m' * m$

assoziativ falls $\forall_M^{m,m',m''} : m * (m' * m'') = (m * m') * m''$

- In diesem Fall ist es nicht nötig Klammern zu setzen.

- Es gibt *postfix*, *infix*und *suffix* Notationen für Verknüpfungen, jenachdem, ob das Zeichen vor, zwischen oder nach den Operanden kommt.
- Verknüpfungen sind eine Teilmenge der Abbildungen

1.1.4 Halbgruppe

Sei M eine beliebige Menge, und $*$ eine *assoziative* Verknüpfung. Das Paar $(M, *)$ wird nun als *Halbgruppe* bezeichnet.

- $\left(M^M, \circ\right)$ ist eine Halbgruppe
- Eine Halbgruppe mit neutralem Element nennt sich auch ein *Monoid*.

1.1.5 Gruppe

Eine Halbgruppe $(G, *, e)$ heißt *Gruppe*, falls folgene Elemente exisiteren

Neutralelement e

$$\exists_G^e : \forall_G^g : e * g = g$$

Inverses Element $g^{-1} := h$

$$\forall_G^g : \exists_G^h : h * g = e$$

Man sprich von einer *kommutativen Gruppe*, falls $*$ zusätzlich noch kommutativ ist.

- jede Gruppe besitzt *genau ein* neutrales Element
- in einer Gruppe existiert zu jedem Element *genau ein* inverses Element
- Eine Gruppe ohne Inverse Elemente nennt sich *Monoid*
- Falls G endlich, darf in der Verknüpfungstafel von $*$ in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element nur genau einmal vorkommen.
- Die Gruppe $(\{e\}, *, e)$ wird als *triviale Gruppe* bezeichnet
- $(\mathrm{Sym}(M), \circ, \mathrm{id}_M)$ ist eine Gruppe mit Neutralelement $\mathrm{id}_M : M \to M : m \mapsto m$
- $\forall x, y \in G : (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

1.1.6 Ring

Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+ : R \times R \to R$ und $* : R \times R \to R$. $+$ wird mit plus, und $*$ mit mal bezeichnet. Das Tripel $(R, +, *, e)$ heißt *Ring*, falls

1. $(R, +, e)$ eine kommutative Gruppe ist
2. $(R, *)$ eine Halbgruppe ist
3. Es gelten die Distributivgesetze für alle $a, b, c \in R$

$$\begin{aligned} (a+b) * c &= a * c + b * c \\ a * (b+c) &= a * b + a * c \end{aligned}$$

- $-(-x) = x$
- $x + y = x \Rightarrow y = 0$
- $(-x)\,y = -(xy) = x\,(-y)$

Einen Ring R nennt man *Ring mit* 1, wenn er ein neutrales Element bzgl. der Multiplikation hat, welches man mit 1 bezeichnet. Man nennt ein $x \in R$ *invertierbar*, wenn es ein $x^{-1} \in R$ gibt, mit $x*x^{-1} = 1 = x^{-1}*x$.

- In jedem Ring mit 1 bildet die Menge der invertierbaren Elemente eine Gruppe.
- Wenn für $a, b \in R\backslash\{0\}$ $a * b = 0$ gilt, heißt der Ring *nullteilerfrei*. In nullteilerfreien Ringen kann man eine *Division mit Rest* definieren.
- In einem Ring mit 1 ist jedes Element a entweder invertierbar oder Nullteiler (d.h. $\exists x : a * x = 0$)

1.1.7 Körper

Ein Ring $(K, +, *, 0)$ mit additivem $(+)$ Neutralelement $0 \in K$ heißt *Körper* $(K, +, *, 0, 1)$, falls zusätzlich $(K - \{0\}, *, 1)$eine kommutative Gruppe ist. Das additive $(+)$ Neutralelement 0 heißt *Nullelement*, und das multiplikative $(*)$ Neutralelement heißt *Einselement*.

- falls $(K - \{0\}, *, 1)$ eine *nicht* kommutative Gruppe ist, wird $(K, +, *, 0, 1)$ als *Schiefkörper* bezeichnet.
- $(\mathbb{F}_2, +, *)$ mit $\begin{array}{|c|c|c|}\hline + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$ und $\begin{array}{|c|c|c|}\hline * & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$ ist der kleinste mögliche Körper.
- $0 \neq 1$ muss gelten
- Körper sind per Nullteilerfrei, d.h. es gilt:
  $a * b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \vee b = 0$

1.1.8 K-Algebra

Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum und $(V, +, *)$ ein Ring mit 1. Dann wird $(V, +, \cdot, *)$ als K-*Algebra* bezeichnet, falls $(\lambda \cdot a) * b = \lambda \cdot (a * b)$ für belibige $\lambda \in K$ und $a, b \in V$ gilt.

1.1.9 Relation

Eine (zweistellige) Relation$\sim$ zwischen den Mengen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$.
$a \sim b$ falls $(a, b) \in A \times B$.

- Eigenschaften von Relationen

  reflexiv
  $\forall a : a \sim a$

  symmetrisch
  $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$

  antisymmetrisch
  $a \sim b \wedge b \sim a \Rightarrow a = b$

  transitiv
  $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

1.1.10 (An-)Ordnung

Wir nennen $<$ *Ordnung* oder *Anordnung* falls entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$ gilt (nur eines dieser 3). Zudem muss $<$ transitiv sein.

1.1.11 angeordneter Ring / Körper

Ein Ring oder ein Körper $(R, +, *, 0, 1)$ heißt *angeordneter Ring* bzw. *angeordneter Körper*, schreibe $(R, +, *, 0, 1, <)$, falls $<$ eine Ordnung auf R ist und folgendes für alle $x, y, z \in R$ gilt:

1. $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
2. $x < y \wedge 0 < z \Rightarrow x * z < y * z$

positiv falls $0 < x$

negativ falls $x < 0$

nicht positiv falls $x < 0 \vee x = 0$

nicht negativ falls $0 < x \vee x = 0$

- positiv $*$ positiv $=$ positiv $=$ negativ $*$ negativ
- negativ $*$ positiv $=$ negativ $=$ positiv $*$ negativ
- $x \neq 0 \Rightarrow 0 < x^2 = x * x$
- $0 < 1$
- ein angeordneter Ring / Körper hat unendlich viele Elemente
- es gelte die Punkt vor Strich-Rechnung, um Klammern zu sparen

1.2 Vektorräume

1.2.1 Definition Vektorraum

Sei K $(K, +.*, 1, 0)$ ein Körper. Ein K-*Vektorraum* (Vektorraum über K) ist ein Tripel $(V, +, *)$ bestehend aus einer Menge V, einer binären Verknüpfung $+ : V \times V \to V$ (Addition) und einer *Skalarmultiplikation*: $* : K \times V \to V$, so dass gilt:

1. $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe
2. für alle $\lambda, \mu \in K, v, w \in V$ gilt:
   (a) $(\lambda + \mu) * v = (\lambda * v) + (\mu * v)$

(b) $\lambda * (v + w) = (\lambda * v) + (\lambda * w)$
(c) $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v$
(d) $1 * v = v$

Es gelten folgende Rechenregeln in einem K-VR (Vektorraum) $(V, +, *)$, für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$:

1. $0 * v = 0$
2. $\lambda * 0 = 0$
3. $\lambda * v = 0 \Rightarrow (\lambda = 0 \vee v = 0)$
4. $(-1) * v = -v$

1.2.2 Standardvektorraum

Der *Standardvektorraum* K^n für $n \in \mathbb{N}$ ist wie folgt definiert:

- $K^n = \underbrace{K \times \ldots \times K}_{n-\text{mal}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_1, \ldots, x_n \in K \right\}$
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$
- $\lambda * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda * x_1 \\ \vdots \\ \lambda * x_n \end{pmatrix}$
- *Nullvektor* $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das Neutralelement in K^n
- Die *Standardbasisvektoren* des Standardvektorraumes K^n sind $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

1.2.3 Vektoraum von Abbildungen

Sei M eine beliebige Menge und K ein beliebiger Körper. Es ist $K^M = \{f | f : M \to K\}$. Mit *punktweise* definierter Addition

$$\forall f, g \in K^M : f + g : M \to K : m \mapsto f(m) + g(m)$$

und der Skalarmultiplikation

$$\lambda * f : M \to K : m \mapsto \lambda * f(m)$$

ist $\left(K^M, +, *\right)$ ein K-Vektorraum.

- ist Verallgemeinerung vom Standardvektorraum K^n. Hier kann eine beliebige Menge M als Index der "einzelnen Elemente des Vektors" dienen. Hierfür wäre $M = \{1, \ldots, k\} \subseteq \mathbb{N}$

1.2.4 Linearkombinationen

Es sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein geordnetes k-Tupel von Vektoren aus einem K-VR V. Ein Vektor $v \in V$ heißt:

Linearkombination von $(v_1, \ldots v_k)$, falls

$$\exists \lambda_1, \ldots \lambda_k \in K : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Affinkombination von $(v_1, \ldots v_k)$, falls

$$\exists \lambda_1, \ldots \lambda_k \in K : \left(v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \right) \wedge \left(1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right)$$

- Einschränkung von Linearkombination
- Erzeugen den kleinsten (geringste Anzahl möglicher Vektoren) affinen Teilraum, der $v_1, \ldots, v_k$ enthält

Konvexkombination von $(v_1, \ldots v_k)$, falls

$$\begin{gathered} \exists \lambda_1, \ldots \lambda_k \in K : \\ v = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \wedge 1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \wedge \\ \forall i \in \{1, \ldots, k\} : 0 \leq \lambda_i \leq 1 \end{gathered}$$

- Einschränkung von Affin- und Linearkombination
- K muss hierfür ein angeordneter Körper sein.

1.2.5 Lineare Unabhängigkeit

Das (endliche) k-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$ heißt *linear unabhängig*, falls

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \right) \Rightarrow (\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0)$$

andernfalls heißt $(v_1, \ldots, v_k)$ *linear abhängig*.

Eine unendliche Familie (Tupel) von Vektoren heißt linear unabhängig, falls jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist.

- Für $n \geq 2$ sind $(v_1, \ldots, v_n)$ genau dann linear abhängig, falls (mindestens) einer dieser Vektoren eine Linearkombination der übrigen ist.

- sei $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig, dann ist auch für jede Permutation $\pi \in S_k$ das Tupel $\left(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}\right)$ linear unabhängig
- sei $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig, dann ist auch jedes Teiltupel $(v_1, \ldots, v_i)$ für $i \leq k$ linear unabhängig
- Begiff der linearen Unabhängigkeit lässt sich auch für Mengen definieren.
- Die Einheitsvektoren $(e_1, \ldots, e_n)$ des Standardvektorraumes K^n sind linear unabhängig.
- V sei ein beliebiger k-Vektorraum und $0 \neq x \in V$
  - (x) ist linear unabhängig
  - $\left(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{k-mal}\right)$ mit $k \geq 2$ ist linear abhängig.

1.2.6 Teilraum oder Unterraum

Sei V ein VR. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Teilraum* (oder *Unterraum*) von V, falls gilt:

$$\forall u, v \in U \forall \lambda, \mu \in K : \lambda u + \mu v \in U$$

- $0 \in U$ für alle U die URV sind.
- Falls U Unterraum (oder Teilraum) von V, schreiben wir $U \leq V$
- $\{0\} \leq V$ und $V \leq V$ gilt für alle V
- Die Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems bilden einen Unterraum von K^n
- Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit punktweise definierter Addition, dann bilden
  - die stetigen Abbildungen $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ einen Teilraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
  - die differenzierbaren Abb. einen Teilraum von $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ usw.
- Seien U, W Teilräume des K-Vektorraums V. Dann sind $U \cap W$ und $U + W := \{u + w | u \in U, w \in W\}$ Teilräume von V.

1.2.7 affiner Unterraum

Sei V ein K-Vektorraum, $U \leq V$, $x \in V$. Dann heißt die Menge

$$x + U = \{x + u | u \in U\}$$

affiner Unterraum von V

- Die Lösungen eines inhomogenen LGS sind ein affiner Unterraum

1.2.8 lineare Hülle

Sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$. Die Menge

$$\operatorname{lin}(M) := \{\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_n m_n | \lambda_i \in K, m_i \in M\}$$

heißt *lineare Hülle* (oder *linearer Aufspann*) von M in V. Für $M = \emptyset$ setze $\operatorname{lin}(\emptyset) = \{0\}$.

- $\operatorname{lin}(M)$ ist der kleinste Unterraum von V, der M enthält.
  - $\operatorname{lin}(M) \leq V$
  - kleinster Unterraum, das bedeutet $\forall U \leq V : U \supseteq M \Rightarrow U \geq \operatorname{lin}(M)$
- Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S, S' \in V$
  - $\operatorname{lin}(S) \cap \operatorname{lin}(S') \supseteq \operatorname{lin}(S \cap S')$
  - $\operatorname{lin}(S) \cup \operatorname{lin}(S') \subseteq \operatorname{lin}(S \cup S')$

1.2.9 Erzeugendensystem / Basis

Sei v ein K-Vektorraum. Eine Menge $M \subseteq V$ heißt *Erzeugendensystem* von V, falls $\operatorname{lin}(M) = V$. Eine Familie in V heißt *Basis* falls sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bildet. Ein Vektorraum heißt *endlich erzeugt*, falls er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

- $(e_1, \ldots, e_n)$ aus K^n ist eine Basis (*Standardbasis*)

1.2.10 Sätze über Basen

Sei $V \neq \{0\}$ ein K-Vektorraum und sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $(v_i)_{i \in I}$ ist eine Basis von U
2. $(v_i)_{i \in I}$ ist ein *unverkürzbares* Erzeugendensystem von V, d.h. $\forall J \subsetneq I : \operatorname{lin}\{v_i | j \in J\} \subsetneq V$
3. $(v_i)_{i \in I}$ ist ein *unverlängerbare* linear unabhängige Familie. D.h. $\forall J \supsetneq I$ ist jede Familie von Vektoren $(v_j)_{j \in J}$ linear abhängig
4. Jeder Vektor aus V lässt sich *eindeutig* als Linearkombination von Vektoren aus $(v_i)_{i \in I}$ schreiben.

- In jedem endlichen Erzeugendensystem lässt sich eine Teilmenge finden, die genau eine Basis des Vektorraums ist.
- Jeder Vektorraum hat eine Basis. Bei unendlichen muss dies über das Auswahlaxiom gezeigt werden.

1.2.11 Basistausch

Austauschlemma: Sei V ein K-Vektorraum der endlich erzeugt ist. Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis von V und sei $w = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_r v_r \in V$ für $\lambda_i \in K$. Dann folgt aus $(k \in \{1, \ldots, r\} \wedge \lambda_k \neq 0) \Rightarrow (v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots v_r)$ ist eine Basis von V.

Austauschsatz: Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis der endlich erzeugten Vektroraumes V, und sei $(w_1, \ldots, w_n)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann gilt $n \leq r$, und es existieren Indizes $i_1, \ldots, i_{r-n} \in \{1, \ldots, r\}$, so dass $\left(w_1, \ldots, w_n, v_{i_1}, \ldots v_{i_{r-n}}\right)$ eine Basis von V sind.

- Jede Basis eines endlich erzeugten Vektorraumes ist endlich
- Jede Basis von V hat die selbe Länge (Anzahl in ihr enthaltener Vektoren)
- Jede linear unabhängige Familie in dem endlich erzeugten Vektorraum V lässt sich zu einer Basis von V fortsetzen.

1.2.12 Dimension

Ist V ein K Vektoraum, so heißt

$$\dim_K V = \begin{cases} r & \text{falls } V \text{ eine endliche Basis der Laenge } r \text{ besitzt} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

die *Dimension* von V über K.

- Sei V ein K-VR mit $\dim V < \infty$ und $U < V$ echter Unterraum von V. Dann gilt $\dim_k U < \dim_K V$.

1.3 Summen in Vektorräumen

Sei V ein Vektorraum über belibigen Körper K.

1.3.1 Minkowskisumme

Für belibige Teilmengen $A, B \subseteq V$ heißt

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

die *(Minkowski-) Summe* von A und B.

- *Zomotrope* sind Minkowskisummen von verschiedenen Geradenstücken
- Falls $A, B \leq V$ Teilräume, so ist auch $A + B \leq V$ ein Teilraum

1.3.2 Dimension

Seien $A, B \leq V$ endlichdimensionale Teilräume

$$\dim A + B = \dim A + \dim B - \dim (A \cap B)$$

1.3.3 Direkte Summe

Seien $A, B \leq V$ Teilräume mit $A \cap B = \{0\}$. Dann heißt

$$A \oplus B := A + B$$

die *(innere) direkte Summe* von A und B

- Für $v \in (A \oplus B)$ existeren eindeutige $a \in A$ und $b \in B$ mit $v = a + b$
- Falls $\dim V < \infty$ und $V = A \oplus B \Rightarrow \dim V = \dim A + \dim B$

1.4 Lineare Abbildungen

1.4.1 Lineare Abbildung, Bild, Kern

Seien V und W Vektorräume über demselben Körper K.

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *linear* (über K), falls gilt:

$$\forall \lambda, \mu \in K, u, v \in V : f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Sei $f : V \to W$ lineare Abbildung. Die Menge $\mathrm{im} f = \{f(v) | v \in V\} \subseteq W$ heißt *Bild* von f.

Die Menge $\ker f = \{v \in V | f(v) = 0\} \subseteq V$ heißt Kern von f.

- Es gilt immer $0 \in \ker f$
- Der Kern ist ein Untervektorraum von V: $\ker f \leq V$
- Das Bild ist ein Untervektorraum von W: $\mathrm{im} f \leq W$
- Das *Urbild* ist ein Untervektorraum: $\forall U \subseteq W : f^{-1}(U) := \{x \in V | f(x) \in U\}$
- Eine lineare Abbildung ist injektiv genau dann, wenn $\ker f = \{0\}$ ist $\forall u, v \in V : f(u) = f(v) \Leftrightarrow u - v \in \ker f$
- Die Basis des Bildes entspricht den nicht 0 Zeilen nach anwendung von Gauss-Jordan auf $[\varphi]^{Tr}$
- Eine lineare Abbildung wird auch als Vektorraum Homomorphismus (strukturerhaltende Abbildung) bezeichnet

1.4.2 Projektion

Eine Abbildung, für die gilt $f \circ f = f$, nennt man eine *Projektion*.

- Für eine lineare Abbildung $f : V \to V$, die eine Projektion ist, gilt $V = \mathrm{im} f \oplus \ker f$
- für $x \in \mathrm{im} f$ gilt: $x = f(x)$

- Ist B_1 eine Basis von $\operatorname{im}(f)$ und B_2 eine Basis von $\ker(f)$ so ist die Matrix von f bezüglich $B_1 \cup B_2$ eine Diagonalmatrix, auf deren Diagonalen nur Nullen und einsen stehen.
- $[f]$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix, es gibt also ein S, so dass $S^{-1}[f]S$ eine Diagonalmatix ist. S ist die Basismatirix von $B_1 \cup B_2$.

1.4.3 Dimensionsformel

Für das Folgende erweitern wir die Addition in $\mathbb{N}$ auf die Menge $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ wie folgt: $\forall n \in \mathbb{N} : n + \infty = \infty + n = \infty$.

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Es gilt

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

- Beachten dass alle Dimensionen bzgl. gleichem Körper messen.
- $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(W) \Leftrightarrow f$ surjektiv
- $\dim(\ker f) = 0 \Leftrightarrow f$ injektiv

1.4.4 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Sei $f : V \to V$ linear und $\dim V < \infty$. Dann sind Injektivität, Surjektivität und Bijektivität äquivalent.

- Bei unendlich dimensionalen Vektorräumen sind gilt die Äquivalenz von In-, Sur- und Bijektivität nicht.

1.4.5 Rang

Sei $f : V \to W$ linear.

$$\operatorname{rank}_K f = \dim_k f(V) = \dim_k \operatorname{im} f$$

heißt *Rang* von f.

1.4.6 Lineare Abbildungen und Basen

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V und $f : V \to W$ lineare Abbildung. Es gilt:

1. $\operatorname{lin}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \operatorname{im} f$
2. $\operatorname{rank} f =$ maximale Länge einer linear unabhängigen Teilfamilie von $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$
3. f surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rank} f = \dim W$
4. f injektiv $\Leftrightarrow (f(v_1), \ldots, f(v_n))$ linear unabhängig
5. f bijektiv $\Leftrightarrow (f(v_1), \ldots, f(v_n))$ Basis von W

1.4.7 Hauptsatz über lineare Abbildungen

Seien V, W K-Vektorräume, $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V und $w_1, \ldots, w_n \in W$. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $\forall i : f(v_i) = w_i$

1.4.8 Isomorphismus

Eine bijektive K-lineare Abbildung heißt *K-Vektorraum-Isomorphismus.*

Zwei K-Vektorräume V, W heißen *isomorph*, falls ein K-Vektorraum-Isomorphismus $f : V \to W$ existiert.

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit $n < \infty$. Dann ist V isomorph zu K^n.

1.4.9 Matrix

Sei X eine Menge und $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Eine $(m \times n)$-Matrix M mit *Koeffizienten* in X ist eine Abbildung $M : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to X$. Üblicherweise schreibt man so ein M als rechteckiges Schema.

$$\begin{pmatrix} M(1,1) & \ldots & M(1,n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M(m,1) & \ldots & M(m,n) \end{pmatrix}$$

- Merkregel für die Indizes:
  Zeilen Zuerst - Spalten Später $\Leftrightarrow$ 1.ter Index für Zeilennummer, 2.ter Index für Spaltennummer

1.4.10 Abbildungsmatrix

Sei V, W Vektorräume über K und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, W_n)$ Basen von V bzw. W. Für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ existiert eindeutig bestimmte $\mu_{i1}, \ldots, \mu_{in} \in K$ mit $f(v_i) = \mu_{i1} w_1 + \ldots + \mu_{in} w_n$. Die Matrix $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K : (i,j) \mapsto \mu_{ij}$ heißt *Matrix* von f bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

- In den Spalten einer Matirx stehen die Bilder der Basisvektoren bezüglich der zugehörigen linearen Abbildung.

1.4.11 Besondere Matrizen

Diagonalmatrix

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

- Sind invertierbar mit
  $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow A^{-1} = \operatorname{diag}\left(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}\right)$

Einheitsmatrix

$$I_n = (\delta_{ij}) = \operatorname{diag}\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-mal}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

- $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{fuer } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist das *Kronecker Symbol.*
- sind multiplikativ neutrales Element der Matrizen.

Elementarmatrizen

$$E_{kl} = (e_{ij}) \in K^{m \times n}$$

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{falls } (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

- $E_{kl}E_{nm} = \delta_{ln}E_{km} = \begin{cases} E_{km} & \text{falls } l = n \\ 0 & \text{falls } l \neq n \end{cases}$
- spannen den Vektorraum der Matrizen auf, sind also eine Basis

Permutationsmatrix

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \cdots & & & 0 \\ & 0 & & & & 1 & \\ & & 1 & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ & & 0 & & 1 & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ 0 & & & \cdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

- Entspicht einer Matrix die auf der Diagonalen nur 1en und sonst 0en hat, bis auf zwei stellen, bei der diese mit mit den 0en auf der Nebendiagonale vertauscht wurden.
- Multiplikation bewirkt Vertauschung zweier Spalten
- Ist inertierbar (ist selbst ihre eigene Inverse)

Stochastische Matrix

$$\forall i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

- Das Produkt von stochastischen Matrizen ist wieder eine stochastische Matrix

Transposition

$$\begin{aligned} A^{tr} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}^{tr} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $(AB)^{tr} = B^{tr}A^{tr}$
- Vertauschen von Zeilen und Spalten
- entspricht Multiplikation mit (Auf der Nebendiagolnalen 1 en, sonst 0)

  $$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

  dies ist eine invertierbare Matrize (bijektive Abbildung), mit sich selbst als Inverse
- A und A^{tr} haben gleiche Eigenwerte aber evtl. unterschiedliche Eigenvektoren

Nilpotent

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt nilpotent, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$A^k = 0$$

- Nilpotente Matrizen *nur* 0 als Eigenwert

1.5 Strukturen linearer Abbildungen

1.5.1 Vektorraum aller linearer Abbildungen

Seien V, W K-Vektorräume. Die *Menge aller linearer Abbildungen* $\operatorname{Hom}(V,W) = \left\{\varphi \in W^V | \varphi \text{ linear}\right\} \leq W^V$ ist ein Untervektorraum der Menge aller Abbildungen.

- d.h daß die Summer zweier linerarer Abbildungen, und das Produkt mit einem Skalar wieder eine lineare Abbildung ist
- Hom steht für *Homomorphismus*, das bedeutet, dass dies stukturerhaltene Abbildungen sind.
- Für zwei lineare Abbildungen $\varphi \in \operatorname{Hom}(U,V)$ und $\psi \in \operatorname{Hom}(V,W)$ gilt, das auch die *Komposition* $\psi \circ \varphi \in \operatorname{Hom}(U,W)$ wieder eine lineare Abbildung ist.
- Wenn $\varphi \in \operatorname{Hom}(V,W)$ bijektiv ist, ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} \in \operatorname{Hom}(W,V)$ ebenfalls linear und bijektiv.

1.5.2 Ring mit 1 von linearen Abbildungen / Algebra

Unter $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$ versteht man die Menge aller linearen Abbildungen von V in sich selbst. Diese Menge bildet zusammen mit der Addition und der Komposition $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ einen Ring mit 1 (siehe 1.1.6 auf Seite 6).

Es gelten sogar allgemeiner folgende Rechenregeln. Seien $\forall\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $\psi, \psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $\lambda \in K$

1. $\psi \circ (\varphi_1 + \varphi_2) = \psi \circ \varphi_1 + \psi \circ \varphi_2$
2. $(\psi_1 + \psi_2) \circ \varphi = \psi_1 \circ \varphi + \psi_2 \circ \varphi$
3. $(\lambda \cdot \psi) \circ \varphi = \psi \circ (\lambda \cdot \varphi) = \lambda \cdot (\psi \circ \varphi)$

Durch die letzte Rechenregel bildet $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ sogar eine K-Algebra.

- Das 1 Element ist hierbei die Identität: $\mathrm{id} : V \to V$ ist linear
- End steht für Endomorphismus

1.5.3 invertierbare lineare Abbildungen / Gruppe

Unter der *general linear group* $\mathrm{GL}(V) = \{\varphi \in \mathrm{End}(V) \,|\varphi \text{ invertierbar}\}$ versteht man die Menge der invertierbaren linearen Abbildungen. Diese bilden bezüglich der Komposition $\circ : \mathrm{GL}(V)^2 \to \mathrm{GL}(V)$ und der Identität als 1 Element eine Gruppe $(\mathrm{GL}(V), \circ, \mathrm{id}_V)$.

1.5.4 Verknüpfungen zwischen Matrizen und deren Strukturen

$K^{m\times n}$ ist die Menger aller $m \times n$ Matrizen über K. Die *quadratischen* $n \times n$ Matrizen erhalten das Symbol $M_n(K) = K^{n\times n}$.

Für zwei Matizen $A, B \in K^{m\times n}$ und einen Skalar $\lambda \in K$ sind folgende Verknüpfungen definiert.

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \\ \lambda A &= \lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \end{aligned}$$

$K^{m\times n}$ bildet zusammen mit der Addition und Skalarmultiplikation einen *Vektorraum*.

Seien $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times k}$. Die Matrixmultiplikation ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} C &= AB \in K^{m\times k} \\ &= (c_{ij}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right) \end{aligned}$$

Es gelten folgende Rechenregeln: für $A, A_1, A_2 \in K^{m\times n}$, $B, B_1, B_2 \in K^{n\times k}$und $\lambda \in K$

1. $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$
2. $(A_1 + A_2) B = A_1 B + A_2 B$
3. $(\lambda A) B = \lambda (AB) = A (\lambda B)$

$(M_n(K), +, \cdot)$ ist ein *Ring mit* 1, diese 1 ist hier I_n.

$\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in M_n(K) \,|A \text{ invertierbar}\}$ ist die Menge der invertierbaren quadratischen $n \times n$ Matrizen. Diese bildet bezüglich der Matrixmultiplikation eine *Gruppe*.

- Merkregel für Matrixprodukt: Zelle einer Ergebnisszelle ist ensprechende Zeile der ersten mal Spalte der zweiten Matrix.
- Die Matrixmultiplikation ist assoziativ, d.h. $A(BC) = (AB) C$
- Die Matrixmultiplikation ist im allgemeinen *nicht kommutativ*: $AB \neq BA$
- Spaltenvektoren können als $n \times 1$ Marix aufgefasst werden. Es gilt also $K^n = K^{n\times 1}$
- Das multiplizieren mit einer Matrix aus $\mathrm{GL}_n(K)$ ändert den Rang einer Matrix nicht
- der Vektorraum $K^{n\times m}$ wird von den Elementarmatrizen erzeugt.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

1.5.5 Lineare Abbildungen und Matrizen

Sei K ein Körper, $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n = K^{n\times 1}$. Wir definieren

$$\varphi_A(x) : K^n \to K^m : x \mapsto Ax$$

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als die zur Matrix A gehörende lineare Abbildung.

- Es gilt: $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \varphi_A(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$
  Das heißt, dass die Spalten einer Matrix die Bilder der Standardbasisvektoren enthält.
- Das Bild von $\mathrm{Im}\varphi_A = \mathrm{lin}(\varphi_A(e_1), \ldots, \varphi_A(e_n)) =$ Unterraum von K^m, der von den Spalten von A aufgespannt wird. Diesen Raum nennt man auch *Spaltenraum* von A.

1.5.6 Blockmatrizen

Die Elemente einer Matrix können wiederum Matrizen sein, sogenannte *Blockmatrizen*. Andererseit lässt kann man sich dies so Vorstellen, als ob Blöcke innerhalb der Matrix als Untermatrix aufgefasst werden. Hiermit ergeben sich (bei passenden Größen) folgende Rechenregeln.

- Im grunde Identisch, als ob die Elemente keine Matrizen wären, z.B.:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

1.5.7 Rang einer Matrix

Unter den Rank einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ versteht man

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}_K A &= \operatorname{rank}_K \varphi_A \\ &= \dim_K \operatorname{lin}\left(\varphi_A\left(e_1\right), \ldots, \varphi_A\left(e_n\right)\right) \end{aligned}$$

Dieser lässt sich am besten mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus berechnen. Hierzu das Gleichungssystem $Ax = 0$ betrachten, und den Rank (Anzahl von nicht Null Spalten in Zeilenstufenform) errechnen. Siehe 1.7.3 auf der nächsten Seite.

- Das multiplizieren mit einer Matrix aus $\mathrm{GL}_n(K)$ (bijektive Abbildung) ändert den Rang einer Matrix nicht
- $\operatorname{rank}\left(AA^T\right) = \operatorname{rank}(A)$
- $\operatorname{rank}\left(A^T\right) = \operatorname{rank}(A)$

1.5.8 K-Algebra Isomorphismus

Die Abbildung $\Phi : K^{m\times n} \to \operatorname{Hom}(K^n, K^m) : M \mapsto \varphi_M$ ist ein linearer Isomorphismus. Die Abbildung Φ ordnet einer Matrix $M \in K^{m\times n}$ eine lineare Abbildung $\varphi_M : K^n \to K^m$ zu. Die inverse Abbildung $\Phi^{-1} : \operatorname{Hom}(K^n, K^m) \to K^{m\times n} : \varphi \mapsto$ ordnet einer linearen Abbilung $\varphi : K^n \to K^m$ die Matrix $[\varphi]$ von φ bezüglich der Standardbasis von K^n bzw. K^m zu.

- $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{A\cdot B}$
$[\varphi \circ \psi] = [\varphi] \cdot [\psi]$
- $\varphi_{\lambda\cdot A} = \lambda\varphi_A$
$[\lambda\varphi] = \lambda[\varphi]$
- $\varphi_{A+B} = \varphi_A + \varphi_B$
$[\varphi + \psi] = [\varphi] + [\psi]$
- $\varphi_{I_n} = \mathrm{id}$
$[\mathrm{id}] = I_n$

1.6 Basistransformation

1.6.1 Vektor bezüglich Basis

Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V. Dann lässt sich $v \in V$ eindeutig beschreiben als $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ für $\lambda_i \in K$.

Setze

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$$

Die Abbildung

$$\kappa_{\mathcal{B}} : V \to K^n : v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

ist linear und bijektiv.

- $[b_i]_{\mathcal{B}} = e_i$

1.6.2 Matrix bezüglich Basen

Seien V, W K-Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Zu den Basen $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von V und $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ von W ist

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \left([f(b_1)]_{\mathcal{C}}, \ldots, [f(b_n)]_{\mathcal{C}}\right) \in K^{m\times n}$$

die Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} &= [f(v)]_{\mathcal{C}} \\ (\kappa_{\mathcal{C}} \circ f)(v) &= [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} (\kappa_{\mathcal{B}}(v)) \\ [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} &= \left[\kappa_{\mathcal{C}} \circ f \circ \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}\right] \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} : \operatorname{Hom}(V, W) \to K^{m\times n} : f \mapsto [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

ist ein linearer Isomorphismus.

1.6.3 Produkt von Matrizen bzgl Basen

Seien U, V, W K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$. Es gelte

$$\dim U = p,\ \dim V = n,\ \dim W = m$$

Für lineare Abbildungen $g : U \to V$ und $f : V \to W$ gilt

$$[f \circ g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$$

Als Diagramm siehe Abbildung 1 auf der nächsten Seite.

Abbildung 1: Verkettung von Abbildungen und Basiswechsel

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\kappa_U"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_V"] & W \arrow[d, "\kappa_W"] \\ K^p \arrow[r, "{[g]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}}"] & K^n \arrow[r, "{[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}}"] & K^m \end{tikzcd}$$

1.6.4 Basiswechsel bei Vektoren

Seien $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ und $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ Basen des K-Vektorraums V. Jedes $v \in V$ lässt sich bezüglich beider Basen darstellen:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$S = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = ([b'_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [b'_n]_{\mathcal{B}})$$

Dieses S ist die *Transformationsmatrix* des Basiswechsels von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$.

- S ist invertierbar und $S^{-1} = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$

1.6.5 Basiswechsel von Abbildungen

Sei $f : V \to W$. Ferner seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W. Setze $S = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ und $R = [\mathrm{id}_W]^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} [f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'} &= R^{-1} [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} S \\ [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} &= R [f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'} S^{-1} \end{aligned}$$

Falls $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ beide bezüglich der gleichen Basis z.B. K^n und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ beide bezüglich der gleichen Basis z.B. K^m, können diese als Matrix mit den Basisvektoren als Spalten interpretiert werden und es gilt:

$$\begin{aligned} [f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'} &= \mathcal{C}'^{-1}\mathcal{C} [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}^{-1}\mathcal{B}' \\ [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} &= \mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}' [f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'} \mathcal{B}'^{-1}\mathcal{B} \end{aligned}$$

- $[\varphi]^E_E = B [\varphi]^B_B B^{-1}$
- Um einen Vektor in eine Andere Basis zu bringen muss man ihn einfach von Links mit der Matrix $[\mathrm{id}]^{B_{alt}}_{B_{neu}}$ multiplizieren.
- $[\mathrm{id}]^B_B = I_n$

1.7 Lineare Gleichungssysteme

1.7.1 Definition

Ein System aus m Gleichungen und n unbekannten heißt *lineares Gleichungssystem* (kurz *LGS*) über dem Körper K. Es hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n} \quad x_n &= \beta_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn} \quad x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

mit $\alpha_{ij} \in K$ und $\beta_i \in K$. Die n-Tupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ die dieses Gleichungsystem erfüllen sind die Lösungen des LGS. Für $\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0$ heißt es *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

- Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist ein Unterraum von K^n. D.h. es besitzt mindesten die trivialle Lösung des Nullvektors / es ist immer lösbar.

1.7.2 Zeilenoperationen

Die Lösungsmenge des LGS ändert sich nicht unter folgenden elementaren Zeilenoperationen:

1. $(E1)$ Addiere zu einer Gleichung das λ-fache einer anderen Gleichung
2. $(E2)$ Tausche zwei Gleichungen
3. $(E3)$ Multipliziere eine Gleichung mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$

- $(E1)$ enstprich Matrixmultiplikation mit $L = I_m + \lambda E_{ji}$
- $(E2)$ enstprich Matrixmultiplikation mit Permutationsmatrix
- $(E3)$ enstprich Matrixmultiplikation mit $L = \mathrm{diag}\,(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1)$

1.7.3 Das Gauß - Jordan Eliminationsverfahren

1. Fallunterscheidung
   - Falls $\alpha_{11} \neq 0$:
     - subtrahiere das $\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$ fache der 1.Gleichung von der 2.ten.
     - subtrahiere das $\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}$ fache der 1.Gleichung von der 3.ten.
     - $\vdots$
     - subtrahiere das $\frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}}$ fache der 1.Gleichung von der m.ten.

- Falls $\alpha_{11} = 0$ finde ein $\alpha_{i1} \neq 0$
  - Falls ein $\alpha_{i1} \neq 0$ gefunden vertausche die 1.Gleichung mit der i.Gleichung. Fahre nun mit 1 fort
  - Falls nichts gefunden tue nichts.

Nun sieht das LGS so aus:

$$\begin{aligned} \alpha'_{11}x_1 + \alpha'_{12}x_2 + \ldots + \alpha'_{1n}x_n &= \beta'_1 \\ \alpha'_{22}x_2 + \ldots + \alpha'_{1n}x_n &= \beta'_2 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ \alpha'_{m2}x_2 + \ldots + \alpha'_{mn}x_n &= \beta'_m \end{aligned}$$

2. Die unteren $m-1$ Gleichungen des modifizierten LGS bilden ein LGS mit $n-1$ Unbekannten. Behandle diese wie in Schritt 1. mache dies $m-1$ mal.

3. Nun hat das System die folgende *Zeilenstufenform*:

$$\begin{aligned} \gamma_{1j_1}x_{j_1} + \ldots + \gamma_{1n}x_n &= \delta_1 \\ \gamma_{2j_2}x_{j_2} + \ldots + \gamma_{2n}x_n &= \delta_2 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ \gamma_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + \gamma_{rn}x_n &= \delta_r \\ 0 &= \delta_{r+1} \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ 0 &= \delta_m \end{aligned}$$

Dabei ist $0 \leq r \leq \min\{m,n\}$ und $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n$ sowie $\forall k \in \{1,\ldots,r\} : \gamma_{k,j_k} \in K\backslash\{0\}$ Die Zahl r heißt *Rang* von dem System in Zeilenstufenform. Es gilt für alle $i \in \{1,\ldots,r\}$ $\gamma_{ij_i} \neq 0$. Die Variablen $x_{j_1},\ldots x_{j_r}$ werden *Pivotvariablen* genannt.

4. Fallunterscheidung
   - falls $\exists i \in \{r+1,\ldots m\} : \delta_i \neq 0 \Rightarrow L = \emptyset$ (L = Lösungsmenge)
   - Spezialfall: falls homogener Fall entstanden ($\forall i : \delta_i = 0$) und falls $r < n$ d.h. es gibt nicht Pivot Variablen:
     (a) Wir definieren $n-r$ verschiedene Lösungen $b_1,\ldots,b_{n-r} \in K^n$ wie folgt:
        i. Für b_k wird die k-te nicht Pivot Variable mit $1 \in K$ gewählt, alle anderen mit $0 \in K$. Danach löse das System für b_k wie unter dem nächsten Unterpunkt vermerkt.
        ii. $(b_1,\ldots,b_{n-r})$ ist Basis des Lösungsraumes
   - falls $\forall i \in \{r+1,\ldots m\} : \delta_i = 0$:
     (a) Wähle beliebige Werte aus K für jede der $n-r$ nicht Pivot Variablen
     (b) Lösen der r-ten Gleichung des Systems in Zeilenstufenform nach $x_{j_r} = \frac{\delta_r - \gamma_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \ldots - \gamma_{rn}x_n}{\gamma_{rj_r}}$ auf. Danach Lösen von $r-1$ ter Gleichung, usw.
     (c) $(\#L = 1) \Leftrightarrow (r = n) \wedge (\forall i \in \{r+1,\ldots,m\} : \delta_r = 0)$ d.h. es existiert eine eindeutige Lösung.

1.8 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

1.8.1 Definition

Betrachte das LGS über dem Körper K aus Abschnitt 1.7.1 auf der vorherigen Seite. Wir fassen die Koeffizienten a_{ij} in der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

zusammen. Ähnlich $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$. Wenn wir die Unbestimmten zu einem Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ formal zusammenfassen, dann lässt sich das LGS aus 1.7.1 auf der vorherigen Seite schreiben als

$$Ax = b$$

Das zugehörige homogene LGS ist dann

$$Ax = 0$$

1.8.2 Lösungen eines homogenen Systems

Die Lösungen von $Ax = 0$ bilden einen Unterraum $U \leq K^n$. Dabei ist

$$\dim U = \dim(\ker A) = n - \operatorname{rank} A := k$$

Eine Basis $(u_1,\ldots,u_k)$ von U heißt System von *Fundamentallösungen* von $Ax = 0$. Jede Lösung von $Ax = 0$ ist Linearkombination von den Fundamentallösungen $u_1,\ldots,u_k$.

1.8.3 Existenz von Lösungen

- Das homogene System $Ax = 0$ hat stets die (triviale) Lösung $x = 0 \in K^n$.
- Das inhomogene System $Ax = b$ hat genau dann (mindestens) eine Lösung, wenn $b \in$ Spaltenraum von A, bzw. $\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank}(A)$.

Wobei

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in K^{m\times(n+1)}$$

1.8.4 Lösungen eines inhomogenen Systems

Angenommen das inhomogene System $Ax = b$ hat Lösung $x_0 \in K^n$. Dann ist

$$x_0 + U = \{x_0 + x | x \in U\}$$

die Menge aller Lösungen von $Ax = b$.

1.8.5 eindeutige Lösbarkeit

Siehe 2.2.5 auf der nächsten Seite.

2 Determinanten

2.0.6 Konvention

Sei K stets ein Körper. Im folgenden identifizieren wir oft

$$K^{n\times n} = \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n-mal}$$

D.h. wir sehen eine Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

an als geordnetes n-Tupel ihrer Spaltenvektoren

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right) \in \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n-mal}$$

2.1 Permutationen

2.1.1 Definition

Sei $A = \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Menge. Eine bijektive Abbildung $\sigma : A \to A$ wird als *Permutation* bezeichnet. Die Menge aller Permutation auf einer Menge mit n Elementen mird mit S_n abgekürzt.

Eine Permutation wird wie folgt notiert

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- $|S_n| = n!$

2.1.2 Zyklus

Gilt für eine Permutation $a_1 \mapsto a_2, a_2 \mapsto a_3, \ldots, a_k \mapsto a_1$ mit paarweise verschiedenen $a_i \in A, (i \geq 1)$, wobei die übrigen Elemente identisch abgebildet werden, so heißt sie eine zyklische Permutation bzw. *Zyklus*. Ein solches Zykel wird in der Form $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ notiert.

- Zwei *Zykeln* $\pi = (a_1, \ldots, a_k), \sigma = (b_1, \ldots, b_l)$ heißen *elementfremd*, wenn sie disjunhkte Elemente bewegen. d.h. wenn $a_i \neq b_j$ für alle j, j.
- Elementfremde Zykel sind bezüglich kommutativ bezüglich Verkettung.
- Jede Permutation lässt sich als eine verkettung von elementfremden Zykeln schreiben

2.1.3 Transposition

Eine *Transposition* ist eine Permutation, die nur zwei Elemente vertauscht.

- Jedes Zykel lässt sich mit Hilfe der Verkettung aus Transpositionen darstellen.

2.1.4 Inversion und Signum, gerade und ungerade

Sei $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Permutation. Eine *Inversion* der Permutation ist ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $\varphi(i) > \varphi(j)$. Sei $I(\varphi)$ die Anzahl der Inversionen von φ. Wir definieren das *Signum* $\mathrm{sign} : S_n \to \{-1, 1\}$ durch $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ und nennen eine Permutation (un)gerade, wenn wenn sie eine (un)gerade Anzahl von Inversionen hat.

- σ ist ungerade $\Leftrightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = -1$
- σ ist gerade $\Leftrightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = 1$
- Transpositionen sind ungerade
- Ein Zyklus σ mit k Elementen hat $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{k+1}$
- $\mathrm{sign}(\sigma \circ \pi) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\pi)$

2.2 Determinanten

2.2.1 Typen von Abbildungen

Eine Abbildung $F : \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n-mal} \to K$ (für $n \geq 1$) heißt:

Multilinearform auf K^n (oder n-Form) falls gilt: $\forall \lambda, \mu \in K\ \forall x, y \in K^n\ \forall v_k \in K^n\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

$$F(v_1,\ldots,v_{i-1},\lambda x+\mu y,v_{i+1},\ldots,v_n)$$
$$=\lambda F(v_1,\ldots,x,\ldots,v_n)+\mu F(v_1,\ldots,y,\ldots,v_n)$$

- F ist linear in *jedem* Argument
- Addition von Multilinearformen und Multiplikation mit einem Skalar behalten Multlinearität bei

alternierende Multilinearform auf K^n falls zusätzlich gilt: $\forall i \neq j\ \forall v_k \in K^n$

$$F(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

falls $v_i = v_j$ für $i \neq j$

- Hieraus folgt: für $i \neq j$

$$F(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = -F(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots)$$

- Falls F eine alternierende Multilinearform mit $F(e_1, \ldots, e_n) = 0$ ist, folgt dass $F = 0$ sein muss.
- Wenn F, G zwei alternierende Multilinearfomens sind, gilt $F(e_1, \ldots, e_n) = G(e_1, \ldots, e_n) \Rightarrow F = G$

Determinantenform auf K^n (auch normiert alternierende Multilinearform) fall zusätzlich gilt:

$$F(e_1, \ldots, e_n) = F(I_n) = 1$$

- auf $K^1 = K$ ist die einzige mögliche Determinantenform id_K
- Die Abbildung $f : K^2 \times K^2 \to K : \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto u_1v_2 - u_2v_1$ ist Determinantenform auf K^2
- Die Determinantenform ist so bereits eindeutig definiert

2.2.2 lineare Unabhängigkeit

Sei $f : \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n-mal} \to K$ eine Determinantenform und $v_1, \ldots, v_n \in K^n$. Falls $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig, gilt

$$F(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

2.2.3 Laplace Entwicklung

Konstruiere Determinantenform D_n auf K^n.

$$D_1 = id_K$$

$$\begin{aligned} D_2 : K^2 \times K^2 &\to K \\ \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) &\mapsto u_1v_2 - u_2v_1 \end{aligned}$$

Für $n \geq 2$ konstruiere induktiv Determinantenform für $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n\times n}$

$$D_n : K^{n\times n} \to K$$

$$D_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$$

für ein beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dabei ist

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1j} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \ldots & \alpha_{ij} & \ldots & \alpha_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nj} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}_{ij} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Matrix A bei der die i-te Zeile und die j-te Spalte gestrichen wurden.

- Notation: Statt $D_n(A)$ schreibe $\left|(\alpha_{ij})_{ij}\right|$
- Diese Formel wird auch die *Entwicklung nach einer Spalte* genannt
- Alternativ lässt sich auch nach einer Zeile entwickeln

2.2.4 Determinante

Die Abbildung

$$\det = D_n : K^{n\times n} \to K$$

heißt die *Determinante* auf K^n.

- $\det\left(A^{Tr}\right) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- Falls A invertierbar, gilt $\det(A) \neq 0$ und $\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

2.2.5 Eigenschaften invertierbarer Matrizen

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Äquivalent sind:

1. $A \in GL_n(K)$, d.h. A ist invertierbar
2. $\det(A) \neq 0$
3. $\dim(\ker(\varphi_A)) = 0$
4. Das LGS $Ax = b$ ist für alle $b \in K^n$ eindeutig lösbar
5. Die Spalten von A sind linear unabhängig
6. Die Zeilen von A sind linear unabhängig
7. $\mathrm{rank} A = n$
8. $\lambda = 0$ ist *kein* Eigenwert von A

2.2.6 Ähnlichkeit von Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, falls es ein $S \in GL_n(K)$ gibt mit

$$B = S^{-1}AS$$

- ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante, gleiche Spur und gleiches charakterisitsches Polynom
- siehe Basiswechsel 1.6.5 auf Seite 14.

2.2.7 Determinante von linearen Abbildungen

Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von K^n und $\varphi : K^n \to K^n$ linear. Dann existiert ein $S \in GL_n(K)$ mit

$$[\varphi]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = S^{-1}[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} S$$

Dies bedeutet, das die die Determinante zu einer linearen Abbildung unabhängig von der konkreten Wahl der Basis ist.

$$\det(\varphi) = \det[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

- Siehe auch 1.6.2 auf Seite 13.

2.2.8 Leibnizformel

Sei $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n\times n}$. Es gilt

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}\{1,\ldots,n\}} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i),i}$$

2.2.9 Dreiecksmatrix

Sei $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine *obere Dreiecksmatrix*, d.h. $\alpha_{ij} = 0$ für $i > j$. Dann gilt

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$$

- gleiches gilt für *untere Dreiecksmatrizen*, d.h. $\alpha_{ij} = 0$ für $i < j$
- Entspricht dem Produkt der Diagonalelementen

2.2.10 Determinantenberechnung mit dem Gauß-Jordan-Eliminationsalgorithmus

Sei $A \in K^{n\times n}$ belibig. Der Gauß-Jordan-Eliminationsalgorithmus (siehe 1.7.3 auf Seite 14) formt A um durch endlich viele elementare Zeilenoperationen (siehe 1.7.2 auf Seite 14) zu einer Matrix B in Zeilenstufenform (insbesondere obere Dreiecksmatrix).

Die elementaren Zeilenumformungen entsprechen einer Multiplikation mit einer Matrix von Links. Die Determinanten dieser Matrizen müssen berücksichtigt werden:

1. $(E1)$ $\det(L') = 1$ (Addition eines vielfachen einer Zeile zu einer anderen)
2. $(E2)$ $\det(L') = -1$ (Vertauschung zweier Zeilen)
3. $(E3)$ $\det(L') = \lambda$ (Multiplikation einer Zeilen mit λ)

Falls man sich also bei jeder Umformung diese Konstanten merkt und aufmultipliziert, kann man sie hinterher wieder heraussteilen, und erhält somit die Determinante von A als Produkt der Diagonalen von B geteilt durch diese Konstanten.

2.2.11 Determinante von Blockmatrizen

Für eine Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{pmatrix}$$

mit $A \in K^{n\times n}$, $A_i \in K^{n_i\times n_i}$, $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ gilt

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{r} \det(A_i)$$

.

2.2.12 Adjungierte Matrix

Sei $A = (\alpha_{i,j}) \in K^{n\times n}$. Mit

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i-1,1} & \cdots & \alpha_{i-1,j-1} & \alpha_{i-1,j+1} & \cdots & \alpha_{i-1,n} \\ \alpha_{i+1,1} & \cdots & \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{i-1,j+1} & \cdots & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\alpha'_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

heißt die Matrix

$$\mathrm{adj}A = \left(\alpha'_{i,j}\right)_{ij}$$

die *Adjungierte* oder *Adjunkte* von A.

- $\det A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} \cdot \alpha'_{i,j}$
- $(\mathrm{adj}A)^{tr} A = (\det A) I_n$
- Falls A invertierbar gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{adj}A)^{tr}$

3 Euklidische und unitäre Vektorräume

3.1 Bilinearform

Sei K ein beliebiger Körper und V ein $K-VR$.

3.1.1 Definition

Eine Abbildung $f : V \times V \to K$ heißt K-Bilinearform, falls gilt (B)

1. $f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u, v) + \beta f(u', v)$
2. $f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u, v) + \beta f(u, v')$

3.1.2 ausgeartet

Die K-Biliniearform heißt *ausgeartet*, falls $\exists u \neq 0$ mit $f(u, v) = 0$ für alle $v \in V$.

3.1.3 symmetrisch

Sei $f : V \times V \to K$ eine Abbildung. Falls $f(u, v) = f(v, u)$ für $\forall u, v \in V$ gilt, wird f als *symmetrisch* bezeichnet. (S)

3.1.4 Standardbilinearform

Sei $V = K^d$ und $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$ mit $u, v \in V$ und $d \geq 1$. Setze $f(u, v) = u^T v = \sum_{i=1}^d u_i v_i$. $f(u, v)$ ist die *Standardbilinearform* auf K^d.

- f ist *nicht* ausgeartet
- f ist symmetrisch
- $\langle u, Av \rangle = \left\langle A^T u, v \right\rangle$
- $\langle u, vA \rangle = \left\langle uA^T, v \right\rangle$
- Die quadratischen $\mathbb{R}^{n \times n}$ Matrizen werden mit

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(M) &= \sum_{i=1}^{n} m_{ii} \\ \langle A, B \rangle &= \operatorname{tr}\left(B^T A\right) \end{aligned}$$

  zu einem euklidischen Vektorraum. $\operatorname{tr}(M)$ wird als die *Spur* (*trace*) bezeichnet

3.2 Euklidisches Skalarprodukt

3.2.1 Definition

Im Fall $K = \mathbb{R}$ heißt die Standardbilinearform auch *euklidisches Skalarprodukt*. Notation:

$$\langle u, v \rangle := u^T v = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$$

- Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$ ist $\mathbb{R}$-bilinear, symmetrisch und positiv definit.
- Siehe 7.2.2 auf Seite 32 mit I_n als Matrix.

3.2.2 Positiv definit

Sei $f : V \times V \to K$ eine Abbildung. Falls folgendes gilt, wird f als *positiv definit* bezeichnet (P). Für alle $v \in K^d$

1. $f(v, v) \geq 0$
2. $f(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

3.2.3 euklidische Norm

Die *euklidische Norm* eines Vektors $v \in \mathbb{R}^d$ ist

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} v_i^2}$$

- für $d = 1$ ist euklidische Norm = Absolutbetrag

3.3 Hermitesche Skalarprodukt

3.3.1 komplex Konjungierte

Auf den komplexen Zahlen ist die Konjugationsabbildung $\overline{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \mapsto x - iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ein *Körperautomorphismus*. Ein Automorphismus ist eine Isomorphismus einer Struktur in sich selbst. Es gilt $\overline{\overline{z}} = z$. Dies wir *involutorisch* genannt. Das doppelte Anwenden einer involutorischen Abbildung ist die Identität.

3.3.2 Betrag einer komplexen Zahl

Die Komplexen Zahlen lassen sich als Paare reeller Zahlen auffassen $\left[\mathbb{C} = \mathbb{R}^2\right]$ und besitzen somit bereits eine euklidische Länge.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

3.3.3 semibilinear, sequibilinear

Eine Abbildung $f : V \times V \to K$ heißt *K-Semibilinearform* bzw. *sequibilinearform*, falls gilt (B')

1. $f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u, v) + \beta f(u', v)$
2. $f(u, \alpha v + \beta v') = \overline{\alpha} f(u, v) + \overline{\beta} f(u, v')$

3.3.4 hermitesch

Eine Abbildung $f : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ heißt *hermitesch* falls $\langle z, w \rangle = \overline{\langle w, z \rangle}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}^d$ (H).

3.3.5 Hermitesche Skalarprodukt

Das *hermitesche Skalarprodukt* auf $\mathbb{C}^d$ ist definiert durch

$$\langle z, w \rangle = z^T \overline{w} = \sum_{i=1}^{d} z_i \overline{w_i}$$

für $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ mit $z, w \in \mathbb{C}^d$.

- Das hermitesche Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^d$ ist semibilinear, hermitesch und positiv definit.
- $\langle u, Av \rangle = \langle A^* u, v \rangle$

3.4 euklidische und unitäre Räume

3.4.1 Konventionen

- $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
- Für $\alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ setze $\overline{\alpha} := \alpha$
- Hiermit gilt, das Symmetrie ein Spezialfall ist von Hermitsch und Bilinear ein Spezialfall ist von Semibilinear

3.4.2 euklidischer Raum

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit einer symmetrischen und positiv definiten Bilinearform $\langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Dann heißt $(V, \langle ., . \rangle)$ *euklidischer Raum.*

3.4.3 unitärer Raum

Sei V ein $\mathbb{C} - VR$ mit einer hermiteschen und positiv definiten Semibilinearform $\langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$. Dann heißt $(V \langle ., . \rangle)$ *unitärer Raum.*

3.4.4 Teilräume

Sei $V = \mathbb{R}^d$ oder $V = \mathbb{C}^d$. Außer $(V, \langle ., . \rangle)$ist auch jeder Teilraum mit entsprechend eingeschränkten Skalarprodukt ein euklidischer bzw. unitärer Raum.

3.4.5 einschränken des unitären Raumes auf $\mathbb{R}$

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein unitärere Raum. Insbesondere ist V ein $\mathbb{C}$-VR mit Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V : (\lambda, v) \mapsto \lambda v$. Diese lässt sich einschränkend zur Abbildung $\mathbb{R} \times V \to V : (\lambda, v) \mapsto \lambda v$ und man erhält einen reellen Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$. Weiter ist dann

$$(v, w) = \Re \langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle)$$

eine $\mathbb{R}$-Bilinearform auf $V_{\mathbb{R}}$, die symmetrisch und wiederum positiv definit ist, d.h. $(V_{\mathbb{R}}, (., .))$ ist ein euklidischer Raum.

- $\Re \hat{=}$ Realteil

3.4.6 Norm, orthogonal, rechtwinklig, Einheitsvektoren

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Raum. Dann definiert

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die *Norm* (*Länge*) von $v \in V$. Ferner heißen $v, w \in V$ *orthogonal* (rechtwinklig), falls $\langle v, w \rangle = 0$. Schreibe hierfür $v \perp w$. Vektoren der Norm 1 heißen *Einheitsvektoren.*

- für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt:
  $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$

3.5 Geometrische Eigenschaften euklidischer und unitärer Räume

3.5.1 Es gelten die Polarisierungsidentitäten

euklidisch

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$

unitär

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i \left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 \right) \right)$$

- d.h. sowohl im euklidischen als auch im unitären Fall ist das Skalarprodukt durch die Norm bestimmt.
- in euklidischen Räumen gilt:

$$\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow \langle u + v, u - v \rangle = 0$$

3.5.2 Satz des Pythagoras

$$x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

3.5.3 Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

3.5.4 Winkel

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ euklidischer bzw. unitärer Raum. Zu $x, y \in V \setminus \{0\}$ sei der *Winkel* $\gamma \in [0, \pi]$ definiert durch:

$$\cos \gamma = \frac{\Re \langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

- $\Re \hat{=}$ Realteil

3.6 Metrische Räume

3.6.1 Metrik

Seine Menge M mit einer Abbildung $d: M \times M \to \mathbb{R}_{>0}$, der *Metrik*, heißt *metrischer Raum*, falls $\forall x, y, z \in M$

1. $(M1)$ $d(x,y) = d(y,x)$
2. $(M2)$ $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $(M3)$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
   Dreiecksungleichung

- z. B. *diskrete Metrik*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

3.6.2 Metrik im euklidischen und unitären Raum

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Raum. Dann definiert $d(x,y) := \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ eine Metrik auf V.

3.6.3 Eigenschaften von Metriken

1. $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}_{>0} : y = \alpha x$
2. $|\langle x, y \rangle| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x$ und y *linear abhängig* über $\mathbb{K}$
3. Existenz genau eines *Mittelpunktes* auf der Verbindungsstrecke.
   Sei$(V, \langle .,. \rangle)$euklidischer Raum. Dann gilt:
   $$\forall x, y \in V \exists! m_{x,y} \in V : \\ d(x, m_{x,y}) = d(y, m_{x,y}) = \tfrac{1}{2} d(x,y)$$
4. Sei $\varphi : V \to V$ eine Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ und $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x,y)$ für alle $x, y \in V$. φ ist linear.
   - φ nennt sich *abstandserhaltend* oder *isometrie*
   - siehe 3.10 auf Seite 23

3.7 Orthonormalbasen

3.7.1 Definition

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein eudlidischer oder unitärer Raum. Eine Familie $(v_1, \ldots, v_m)$ in $V \setminus \{0\}$ heißt *Orthogonalsystem*, falls $v_i \perp v_k$ für $i \neq k$.

Gilt zusätzlich, dass $\|v_i\| = 1$ für alle i, dann heißt $(v_1, \ldots, v_m)$ *Orthonormalsystem*.

Ein Orthonormalsystem, dass eine $\mathbb{K}$-Basis von V ist, heißt *Orthonormalbasis* (ONB) von V.

- Jedes Orthonormalsystem $(v_1, \ldots, v_m)$ ist linear unabhängig.
- Jeder endlich dimensionale Teilraum von V besitzt eine Orthonormalbasis.
- Die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ ist eine Orthonormalbasis.
- Für beliebige $\gamma \in \mathbb{R}$ ist
  $$\left(\begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \right)$$
  eine Othonormalbasis des $\mathbb{R}^2$.

3.7.2 Koordinaten bezüglich ONB

Sei $(v_1, \ldots, v_m)$ eine ONB von V. Dann lässt sich ein belibiges $v \in V$ eindeutig darstellen mit

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \ldots + \langle v, v_m \rangle v_m$$

- Die $\langle v, v_i \rangle$ sind also die Koordinaten von v bezüglich der ONB

3.7.3 Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt

Sei $(b_1, \ldots, b_m)$ eine linear unabhängige Familie in V. Es gilt $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_m) = m$. Im folgenden Konstruieren wir eine Orthonormalbasis von $U = \operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_m)$. Dazu setze

$$\begin{aligned}
u_1 &:= b_1 \\
v_1 &:= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\
u_2 &:= b_2 - \langle b_2, v_1 \rangle v_1 \\
v_2 &:= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\
u_3 &:= b_3 - \langle b_3, v_1 \rangle v_1 - \langle b_3, v_2 \rangle v_2 \\
v_3 &:= \frac{u_3}{\|u_3\|} \\
&\vdots \\
u_m &:= b_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle b_m, v_i \rangle v_i \\
v_m &:= \frac{u_m}{\|u_m\|}
\end{aligned}$$

$(v_1, \ldots, v_m)$ ist eine Orthonormalbasis von U.

- Hierbei werden von einem Vektor alle Komponenten abgezogen, die in Richtung schon vorher abgearbeiteter Vektoren zeigen. Anschließend wird der Rest auf 1 Normiert.
- Mit diesem Verfahren lassen sich auch lineare Abhängigkeiten in $(b_1, \ldots, b_m)$ entdecken. Ist b_i linear abhängig von $(b_1, \ldots, b_{i-1})$ dann ist $u_i = 0$.

3.8 Orthogonale Teilräume

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ euklidischer oder unitärer Raum.

3.8.1 Definition

Zu $M \subseteq V$ heißt

$$M^\perp = \{v \in V | \forall m \in M : v \perp m\}$$

das *orthogonale Komplement* von M.

- $M^\perp \leq V$ ist linearer Teilraum von V

3.8.2 Eigenschaften

Seien $A, B \subseteq V$. Dann gilt:

1. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$
2. $A \subseteq B^\perp \Leftrightarrow B \subseteq A^\perp$
3. $A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$
4. $A^\perp = \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp$
5. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$
6. $A \cap A^\perp = \{0\}$

3.8.3 Interpretation als Gleichungsystem

Sei $V = \mathbb{R}^n$ euklidischer Raum und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist für $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$a^\perp := \{a\}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n | \langle a, v \rangle = 0\}$$

die Lösungemenge der linearen Gleichung $\langle a, x \rangle = \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$.

Weiterhin gilt für $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}^n$, dass $\{a, b, c, \ldots\}^\perp = a^\perp \cap b^\perp \cap c^\perp \cap \ldots$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungsystems $\langle a, x \rangle = \langle b, x \rangle = \langle c, x \rangle = \ldots = 0$

- für $a \neq 0$ ist $a^\perp$ eine *lineare Hyperebene*
- $a, b, c, \ldots$ sind sozusagen die Zeilen der Matrix des zugehörigen linearen Gleichungsystems

3.8.4 Orthogonaler Teilraum und Basis

Sei $a_1, \ldots, a_m \in V$ und

$$U = \mathrm{lin}\,(a_1, \ldots, a_m)$$

dann gilt $U^\perp = \{a_1, \ldots, a_m\}^\perp$.

3.8.5 Endlichdimensionale Teilräume

Sei $U \leq V$ endlich dimensionaler Teilraum. Dann gelten

1. $V = U \oplus U^\perp$
2. $\left(U^\perp\right)^\perp = U$

3.8.6 Projektion

Sei $U \leq V$ ein endlichdimensionaler Teilraum mit Orthonormalbasis $(u_1, \ldots, u_m)$. Die Abbildung

$$\pi : V \to V, v \mapsto \sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle u_i$$

besitzt folgende Eigenschaften:

1. π ist linear
2. $\pi(v) \in U$ für alle $v \in V$
3. $\pi(u) = u$ für alle $u \in U$
4. $\pi \circ \pi = \pi$
   d.h. π ist eine Projektion auf U
5. $\mathrm{Im}\,(\pi) = U$ und $\ker(\pi) = U^\perp$
6. $v - \pi(v) \in U^\perp$ für alle $v \in V$
7. $\|v - \pi(v)\| \leq \|v - u\|$ für alle $v \in V, u \in U$
   Gleichheit gilt nur für $\pi(v) = u$.

- $\pi(v)$ ist also die beste Approximation für v in U.
- π ist unabhängig (in allen Fällen identisch) von der konkreten Wahl der Orthonormalbasis für U solange das U gleich bleibt.
- Diese Projektion kommt auch so im Gram Schmidt Orthonormalisierungsverfahren vor, siehe 3.7.3 auf der vorherigen Seite.
- Diese Abbildung ist durch die folgende Angaben bereits eindeutig bestimmt:
  - lineare Projektion
  - $U = \mathrm{im}\pi = (\ker\pi)^\perp$
- Ist π die Orthogonalprojektion auf U, so ist $\mathrm{id} - \pi$ die Orthogonalprojektion auf $U^\perp$

3.9 Fourierreihe

Die Menge $\mathcal{C}[0,1]$ der Stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ bilden zusammen mit $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$ einen euklidischen Vektorraum.

Die Funktionen $v_0, v_1, v_2, \ldots, w_1, w_2, \ldots$ doe für $x \in [0,1]$ definiert sind durch $v_k(x) = \cos(2\pi kx)$, $w_k(x) = \sin(2\pi kx)$ für $k \in \mathbb{N}$ bilden ein Orthonormalsystem in $\mathcal{C}[0,1]$. Die $\tilde{v_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_k$ und $\tilde{w_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}w_k$ bilden also ein Orthonormalsystem.

Der lineare Teilraum

$$\mathcal{T}_n = \mathrm{lin}(v_0, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n) \le \mathcal{C}[0,1]$$

heißt Raum der *trigonometrischen Polynome* vom Grad $\le n$. Die Elemente von $\mathcal{T}_n$ bestehen aus Linearkombinationen

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha_0}{2}v_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k v_k + \beta_k w_k) \\ T(x) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos(2\pi kx) + \beta_k \sin(2\pi kx)) \end{aligned}$$

Es sei $\pi_n : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{T}_n$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{T}_n$. Diese ist die Beste Approximation durch ein trogonometrisches Polynom vom Grad $\le n$. Sei f die zu Approximierende Funktion. Es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 2\langle f, v_k\rangle \\ \alpha_k &= 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi kx)\,dx \\ \beta_k &= 2\langle f, w_k\rangle \\ \beta_k &= 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi kx)\,dx \end{aligned}$$

Die Koeffizienten α_k und β_k heißen *Fourierkoeffizenten* von f. Die unendliche Reihe

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos(2\pi kx) + \beta_k \sin(2\pi kx))$$

heißt *Fourierreihe* von f. Falls f zweimal stetig differenzierbar und $f(0) = f(1)$, so konvergiert die Fourrierreihe gleichmäßig gegen f.

3.10 Orthogonale und unitäre Abbildungen

Sei $(V, \langle .,.\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Raum.

3.10.1 orthogonal / unitär / Isometrie

Eine invertierbare Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt *orthogonal* (bzw. *unitär*), falls gilt

$$\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle \; \forall x, y \in V$$

nennt sich φ eine *Isometrie.*

- Orthogonale (und unitäre) Abbildungen respektieren Längen und Winkel
- Für dim$V < \infty$ folgt die Invertierbarkeit aus der Isometrieeigenschaft.

3.10.2 äquivalente aussagen zur Isometrie

Es seien V und W zwei euklidische oder unitäre Vektorräume und es sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. φ ist eine Isometrie
2. $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$
3. $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$

3.10.3 orthogonale und unitäre Gruppe

Für $(V, \langle .,.\rangle)$ euklidisch heißt $O(V) = \{\varphi \in GL(V) | \varphi \text{ orthogonal}\}$ *orthogonale Gruppe* auf V. Für $(V, \langle .,.\rangle)$ unitär heißt $U(V) = \{\varphi \in GL(V) | \varphi \text{ unitär}\}$ *unitäre Gruppe* auf V.

3.10.4 Isometriekriterium

Sei $(v_1, \ldots v_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Es gilt $\varphi \in GL(V)$ orthogonal bzw. unitär $\Leftrightarrow$ $(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ ist Orthonormalbasis.

- D.h. das die Spalten/Zeilen von $[\varphi]_{I_n}^{I_n}$ bilden ein Orthonormalsystem

3.10.5 orthogonale Matrizen

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, falls gilt

$$Q \cdot Q^T = I_n$$

- $GL_n\mathbb{R} = \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} | M \text{ ist invertierbar}\}$
- $O_n\mathbb{R} = \left\{Q \in GL_n\mathbb{R} | Q^{-1} = Q^T\right\}$ heißt *orthogonale Gruppe* auf $\mathbb{R}^n$.
- $Q^T = Q^{-1}$
- det$Q = \pm 1$

3.10.6 adjungierte / unitäre Matrizen

Für $M = (m_{ij})_{i,j} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt $M^* = \overline{M}^T = (\overline{m_{ji}})_{i,j}$ die zu M *adjungierte* Matrix.

Eine Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *unitär*, falls $Q \cdot Q^* = I_n$.

- $GL_n\mathbb{C} = \{M \in \mathbb{C}^{n\times n} | M \text{ ist invertierbar}\}$
- $U_n\mathbb{C} = \left\{Q \in GL_n\mathbb{Q} | Q^{-1} = Q^*\right\}$ heißt *unitäre Gruppe* auf $\mathbb{C}^n$.

3.10.7 spezielle Matrizengruppen

generelle lineare Gruppe

$$GL_n\mathbb{K} = \left\{M \in \mathbb{K}^{n\times n} | M \text{ ist invertierbar}\right\}$$

- Menge der invertierbaren Matritzen

unitäre Gruppe

$$U_n\mathbb{C} = \left\{Q \in GL_n\mathbb{C} | Q^{-1} = Q^*\right\}$$

- So etwas wie Drehungen und Spiegelungen in komplexen Vektorräumen

orthogonale Gruppe

$$O_n\mathbb{R} = \left\{Q \in GL_n\mathbb{R} | Q^{-1} = Q^T\right\}$$

- Drehungen und Spiegelungen in reellen Vektorräumen

spezielle lineare Gruppe

$$SL_n\mathbb{K} = \{M \in GL_n\mathbb{K} | \det(M) = 1\}$$

spezielle orthogonale Gruppe

$$SO_n\mathbb{R} = O_n\mathbb{R} \cap SL_n\mathbb{R}$$

- beschreiben Drehungen in reellen Vektorräumen

spezielle unitäre Gruppe

$$SU_n\mathbb{R} = U_n\mathbb{C} \cap SL_n\mathbb{C}$$

- Alle hier aufgelisteten Gruppen sind Untergruppen von $GL_n\mathbb{K}$. D.h. die Elemente sind eine Teilmenge ($\subseteq$), und sie sind unter der Verknüpfung abgeschlossen. Hierzu nutze wie beim Untervektorraum das Symbol $\leq$.
- Verkettung von Drehungen ist Drehung
- Verkettung von Drehung und Spiegelung ist Spiegelung
- Verkettung von Spiegelungen ist Drehung

3.10.8 Charakteristika für orthogonale und unitäre Matrizen / Abbildungen

Es sei $Q \in K^{n\times n}$. Äquivalent sind:

1. Die lineare Abbildung $\varphi_Q : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x \mapsto Qx$ ist orthogonal (bzw. unitär) bzgl. des euklidischen Skalarprodukts (bzw. bzgl. des hermitschen Skalarprodukts), d.h. $\forall v, w \in K^n$:
$$\begin{aligned} & \langle \varphi_Q(v), \varphi_Q(w)\rangle \\ = & \langle Qv, Qw\rangle \\ = & \langle v, w\rangle \end{aligned}$$
2. Die Spalten $(s_1, \ldots, s_n)$ der Matrix Q bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$: d.h.
$$\langle s_i, s_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
3. Q ist eine orthogonale Matrix, d.h. $Q \cdot Q^T = I_n$ (bzw. unitär $Q \cdot Q* = I_n$)
4. Q ist invertierbar und $Q^{-1} = Q^T$ (bzw. $Q^{-1} = Q*$)
5. Die Zeilen von Q bilden eine Orthonormalbasis)
6. Q^T ist eine orthogonale Matrix (bzw. unitär)

3.10.9 Spiegelung an Hyperebene

Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Ist $v \in V$ ein Einheitsvektor (d.h. $\|v\| = 1$) so wird durch

$$s_v : V \to V : w \mapsto w - 2\langle w, v\rangle v$$

eine Abbildung definiert, die *orthogonale Spiegelung* an der zu v *orthogonalen Hyperebene* heißt.

- $s_v \circ s_v = \mathrm{id}$
- s_v ist linear und orthogonal

4 Eigenwerte und Eigenvektoren

4.1 Einleitung

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein k-linearer Endomorphismus.

4.1.1 Definitionen

Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert* von φ falls es ein $v \in V \setminus \{0\}$ gibt, so dass $\varphi(v) = \lambda v$.

Jeder von 0 verschiedene Vektor w mit $\varphi(w) = \lambda w$ heißt *Eigenvektor* zum Eigenwert λ (bzüglich φ).

Der Unterraum

$$\begin{aligned} V_\lambda &= V_\lambda(\varphi) \\ &= \ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \\ &= \{v \in V | \varphi(v) = \lambda v\} \end{aligned}$$

heißt *Eigenraum* zum Eigenwert λ (bezüglich φ).

Die Dimension $d_\lambda = \dim_K V_\lambda$ heißt *geometrische Vielfachheit* von λ.

Die lineare Abbildung φ heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Basis von V gibt, die nur aus Eigenvektoren von φ besteht (zu möglicherweise verschiedenen Eigenwerten). Das heißt die zugehörige Matrix von φ ist eine Diagonalmatrix.

- λ Eigenwert von $\varphi \Leftrightarrow \exists v \neq 0 : (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v) = 0$ $\Leftrightarrow \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$
- v Eigenwert von φ bezüglich dem Eigenwert $\lambda \Leftrightarrow$ $v \neq 0 \wedge (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id}) \setminus \{0\}$

4.1.2 charakteristische Gleichung

Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und $\dim_K V < \infty$. Es gilt: λ Eigenwert von $\varphi \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda \mathrm{id}) = 0$.
$\det(\varphi - \lambda \mathrm{id})$ ist die *charakteristische Gleichung*.

4.1.3 Eigenwerte von Matrizen

Sei $M \in K^{n \times n}$. Dann heißt $\lambda \in K$ *Eigenwert* von M, falls $\lambda \in K$ *Eigenwert* von M, falls λ Eigenwert von $\varphi_M : K^n \times K^n$. Analog: *Eigenvektoren*.

4.1.4 Eigenwerte in $\mathbb{C}$

Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit *reellen* Einträgen. Falls v Eigenvektor zum Eigenwert λ ist auch $\overline{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

4.2 Diagonalisierbarkeit

4.2.1 lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschiedene Eigenwerte von φ und $v_1, \ldots, v_r$ zugehörige Eigenvektoren. Dann ist $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabhängig.

- Falls φ sogar $n = \dim_K V$ verschiedene Eigenwerte hat, so ist φ diagonalisierbar.

4.2.2 Diagonalisierung von Abbildung

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_v$ verschiedene Eigenwerte von φ mit den geometrischen Vielfachheiten $d_1, \ldots, d_r$. Sei $(b_{i,1}, \ldots, b_{i,d_i})$ Basis für V_{λ_i}. Dann ist

$$B = (b_{1,1}, \ldots b_{1,d_1}, b_{2,1}, \ldots, b_{2,d_2}, \ldots, b_{r,1}, \ldots, b_{r,d_r})$$

Basis von

$$V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$$

Falls gilt $d_1 + d_2 + \ldots + d_r = n$, dann gilt

$$V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r} = V$$

und φ ist diagonalisierbar.

$$[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \quad \ddots \quad \lambda_1}^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\lambda_r \quad \ddots \quad \lambda_r}_{d_r} \end{pmatrix}$$

- $[\varphi]_{I_n}^{I_n} = B\,[\varphi]_B^B\,B^{-1}$

4.3 Polynome

Sei K ein Körper.

4.3.1 Polynom

Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to K : n \mapsto a_n$ mit der Eigenschaft, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\forall n > N : a_n = 0$ gilt heißt *Polynom* mit Koeffizienten in K.

Wir schreiben solch eine Funktion $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, \ldots)$ als $a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^N$, wobei das Symbol t eine *Unbestimmte* (insbesondere kein Element aus K) ist.

$K[t] = \left\{a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N | a_i \in K, N \in \mathbb{N}\right\}$ ist die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in K (in der Unbestimmten t).

4.3.2 Operationen mit Polynomen

Mit der Komponentenweise Addition und der Komponentenweise Skalarmultiplikation ist $K[t]$ ein K-VR mit Basis $\left(1, t, t^2, \ldots\right)$. Insbesondere ist $\dim_K K[t] = \infty$.

Addition

$$\begin{aligned} & \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_N t^N\right) \\ & + \left(b_0 + b_1 t + \ldots + b_M t^M\right) \\ = \; & (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\,t + \ldots \\ & + \left(a_{\max(M,N)} + b_{\max(M,N)}\right) t^{\max(M,N)} \end{aligned}$$

Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} & \lambda\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_N t^N\right) \\ = \; & (\lambda a_0) + (\lambda a_1)\,t + (\lambda a_2)\,t^2 + \ldots + (\lambda a_N)\,t^N \end{aligned}$$

Koordinaten

$$\begin{aligned} & \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_N t^N\right) \\ = & \left(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \ldots + a_N \cdot t^N\right) \end{aligned}$$

Polynommultiplikation

$$\begin{aligned} & \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_N t^N\right) * \\ & \left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_M t^M\right) \\ = & \left(a_0 b_0\right) + \left(a_0 b_1 + b_1 a_0\right) t + \left(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_2\right) t^2 \\ & + \ldots + \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) t^k + \ldots + a_N b_M t^{N+M} \end{aligned}$$

4.3.3 Struktur von Polynomen

$(K[t], +, \cdot, *)$ ist eine *kommutative K-Algebra*, das heißt:

1. $(K[t], +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum
2. $(K[t], +, *)$ ist ein kommutativer Ring
3. Es existiert eine Polynommultiplikatives Neutralelement $1 = (1, 0, 0, \ldots) \in K[t]$
4. $(\lambda \cdot a) * b = \lambda \cdot (a * b)$

4.3.4 Grad

Sei $a : \mathbb{N} \to K : n \mapsto a_n$ ein Polynom. Für $a \neq 0$ sei

$$\deg a = \min\{n \in \mathbb{N} | \forall n > N : a_n = 0\}$$

und $\deg(0) = -\infty$. Die Zahl $\deg(a) \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ heißt *Grad* von a.

Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ gilt:

1. $\max(n, -\infty) = n$
2. $n + (-\infty) = -\infty$
3. $n \geq -\infty$

Seien $a, b \in K[t]$, dann gilt:

1. $\deg(a + b) \leq \max\{\deg a, \deg b\}$
2. $\deg(a \cdot b) = \det(a) + \deg(b)$

- Für $a, b \in K[t] \setminus \{0\}$ gilt $a \cdot b = 0$, das heißt der Ring ist nullteilerfrei.

4.3.5 Auswertungsabbildung über Körper

Zu einem Polynom $a = a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N \in K[t]$ kann man eine *Auswertungsabbildung*, auch *Polynomfunktion* genannt, definieren:

$$\tilde{a} : K \to K : \lambda \mapsto a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_N \lambda^N$$

- kaum Unterschied über Körpern der Charakteristik 0 zu normalem Polynom
- In Fachbüchern wird zwischen dem Polynom und der Auswertungsabbildung meistens *nicht* unterschieden
- Man kann sich die Auswertungsabbildung von $a \in K[t]$ in beliebigen K-Algebren ansehen
- Ist K unendlich und $p, q \in K[t]$, so folgt aus $\tilde{p} = \tilde{q}$ schon $p = q$ (umgekehrt ohnehin).

4.3.6 Auswertungsabbildung über Matrizen

Zu einem Polynom $a = a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N \in K[t]$ kann man eine *Auswertungsabbildung*, auch *Polynomfunktion* genannt, definieren:

$$\tilde{\tilde{a}} : K^{n \times n} \to K^{n \times n} : M \mapsto a_0 I_n + a_1 M + \ldots + a_N M^N$$

- Die Abbildung $\phi_M : K[t] \to K^{n \times n} : a \mapsto \tilde{\tilde{a}}(M)$ ist ein K-Algebrahomomorphismus.
  Hiermit ist nicht das Polynom, sondern die Auswertungsabbildung des Polynoms gemeint.
- Man kann ebenso eine Auswertungsabbildung in $End_K V$ betrachten für beliebigen K-Vektorraum V
- Der Ring $K[t]$ ist nullteilerfrei, aber der Ring $K^{n \times n}$ nicht (für $n \geq 2$)
- Es gilt für alle $\lambda \in K$
  $\tilde{\tilde{a}}(\lambda I_n) = \tilde{a}(\lambda) I_n$
  das heißt falls λ_0 eine Nullstelle von a ist folgt $\tilde{\tilde{a}}(\lambda_0 I_n) = 0$

4.3.7 Nullstelle

Sei $a \in K[t]$ ein Polynom. Die Zahl $\lambda \in K$ heißt *Nullstelle* von $a \in K[t]$, falls $\tilde{a}(\lambda) = 0$.

Hat a den Grad $d \geq 1$ und eine Nullstelle $\lambda \in K$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom $b \in K[t]$ mit $\deg b = d - 1$ und $a = (t - \lambda) \cdot b$.

$(t - \lambda)$ wird *Linearfaktor* genannt, und das zeilegen von a wird *abspalten eines Linearfaktors* bezeichnet.

- Die Umkehrung gilt ebenfalls. Falls $a = (t - \lambda) \cdot b$, dann ist λ Nullstelle von a.
- Ein Polynom in $K[t]$ vom Grad d hat höchstens d paarweise verschiedene Nullstellen.

4.3.8 Vielfachheit

Seien $a \in K[t]$ und $\lambda \in K$, so dass $A = (t-\lambda)^s b$ für $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $b \in K[t]$ mit $\tilde{b}(\lambda) = 0$. Dann heißt s die *Vielfachheit* der Nullstelle λ von a und λ heißt s-fache Nullstelle von a.

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Nullstellen von $a \in K[t] \setminus \{0\}$mit Vielfachheiten $s_1, \ldots, s_r$. Dann existiert eindeutig ein Polynom $b \in K[t]$ ohne Nullstellen, so dass

$$a = (t-\lambda_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_r)^{s_r} \cdot b$$

4.3.9 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $a \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg \geq 1$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Das heißt der Körper $\mathbb{C}$ ist *algebraisch abgeschlossen*. Daraus folgt, dass jedes Polynom in Linearfaktoren und eine Konstante faktorisiert werden kann.

- In den reellen Zahlen kann man faktorisieren in lineare und quadratische Polynome.

4.3.10 Polynomdivision

Sind $p, q \in K[t]$ mit $q \neq 0$, so existieren eindeutig bestimmte Polynome $s, r \in K[t]$ mit

$$p = s \cdot q + r$$

und $\deg(r) < \deg(q)$. r ist dabei der *Rest*, ist $r = 0$ so sagt man, p ist durch q *teilbar*.

- Ist a eine Nullstelle des Polynoms $f \in K[t]$, so ist f durch $(x-a)$ teilbar.

4.4 Charakteristisches Polynom

Sei $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix.

4.4.1 Definition

Die Determinante

$$\chi_A = \det(A - t \cdot I_n) \in K[t]$$

heißt *charakteristisches Polynom* von A.

- Eigentlich sind Polynome eine Körper und somit wäre die Determinante nicht definiert. Da sich die Polynome $K[t]$ aber in den Körper der rationalen Funktionen $K(t)$ einbetten lassen, ist dies kein Problem.

4.4.2 Koeffizienten des Charakteristischen Polynoms

$\chi_A \in K[t]$ ist ein Polynom vom Grad n. $A \in K^{n \times n}$. Es gilt

$$\chi_A = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) t^{n-1} + \ldots + \det A$$

- Damit lassen sich sich charakteristische Polynome einerseits schnell überprüfen, und anderseits Polynome vom Grad 2 direkt angeben.

4.4.3 Diagonalisierbarkeit

Die Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist diagonalisierbar über K genau dann, wenn $\chi_A = (\lambda_1 - t)^{e_1} \cdots (\lambda_r - t)^{e_r}$ und falls für jeden Eigenwert λ_i die *algebraische Vielfachheit* e_i übereinstimmt mit der geometrischen Vielfachheit.

- Es gilt $A' = S^{-1}AS = \operatorname{diag}\left(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{e_1 \text{ mal}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{e_r \text{ mal}}\right)$ mit $S = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,d_1}, \ldots, v_{r,1}, \ldots, v_{r,d_r})$ und $(v_{i,1}, \ldots, v_{i,d_i})$ Basis des Eigenraumes von λ_i.
- Sei φ eine *Projektion* ($\varphi \circ \varphi = \varphi$). Ist B_1 eine Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$ und B_2 eine Basis von $\ker(\varphi)$ so ist die Matrix von φ bezüglich $B_1 \cup B_2$ eine Diagonalmatrix, auf deren Diagonalen nur Nullen und einsen stehen, also sind 0 und 1 die einzigen Eigenwerte.
- Potenzen von Matrizen berechnet man am besten in Diagonalgestalt

$$\left(S^{-1}AS\right)^n = S^{-1}A^n S$$

4.4.4 Komplexe Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$ genau dann wenn für jeden Eigenwert stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zerfällt χ_A immer in Linearfaktoren.

Jede komplexe Matrix hat einen Eigenwert.

4.4.5 Satz von Cayley Hamilton

Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt

$$\tilde{\tilde{\chi}}_A(A) = 0$$

- Kann benutzt werden um einfache Formeln für höhere Potenzen von Matrizen zu finden.

4.4.6 Minimalpolynom

Für jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ existiert genau ein Polynom $\mu_A \in K[t]$ mit $\tilde{\mu}_A(A) = 0$ minimalen Grades mit Leitkoeffizienten 1. Der *Leitkoeffizient* eines Polynoms $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$ ist für $\alpha_n \neq 0$ gleich $\operatorname{lcf}(p) = \alpha_n$. μ_A heißt *Minimalpolynom* von A.

- Die Existenz annulierender Polynome (Minimalpolynom und Satz von Cayley Hamilton) ist nur in endlichdimensionalen Vektorräumen gesichert.
- Ähnliche Matrizen haben dasselbe Minimalpolynom
- zu $A \in K^{n\times n}$ haben χ_A und μ_A dieselben Nullstellen
- Das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom.
- Falls das Charakteristische Polynom keine Nullstelle, bzw. jede nur mit Algebraischer Vielfachheit 1 hat gilt:
$$\mu_A = \chi_A$$

5 Diagonalisierung normaler Matrizen

Im Folgenden ist stets $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $(\mathbb{K}^n, \langle .,. \rangle)$ standard euklidischer bzw. unitärer Raum.

5.1 Normale Matrizen

5.1.1 Adjungierte

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $A^* = (\overline{a_{ji}}) = \overline{A}^T = \overline{A^T}$ die *Adjungierte* von A.

Es gelten folgende Rechenregeln

1. $(A+B)^* = A^* + B^*$
2. $(A\cdot B)^* = B^* \cdot A^*$
3. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ für $\lambda \in \mathbb{C}$
4. $A^{**} = A$
5. Falls $\forall i,j : a_{ij} \in \mathbb{R}$ gilt $A^* = A^T$

5.1.2 symmetrisch und hermitesch

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

1. A *symmetrisch*: $\Leftrightarrow A = A^T$
2. A *schiefsymmetrisch*: $\Leftrightarrow A = -A^T$
3. A *hermitesch*: $\Leftrightarrow A = A^*$
4. A *schiefhermitesch*: $\Leftrightarrow A = -A^*$

- Der Rang von schiefhermiteschen Matrizen ist gerade.

5.1.3 Zerlegungen von Matrizen

Es gilt für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

1. $A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+\overline{A})}_{\text{reell}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-\overline{A})}_{\text{imaginär}}$
2. $A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^T)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^T)}_{\text{schiefsymmetrisch}}$
3. $A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^*)}_{\text{hermitesch}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^*)}_{\text{schiefhermitesch}}$

5.1.4 Eigenschaften des Skalarproduktes

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $v, w \in \mathbb{C}^n$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle Av, w\rangle &= \langle v, A^*w\rangle \\ \langle v, Aw\rangle &= \langle A^*v, w\rangle \end{aligned}$$

5.1.5 Normale Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *normal*, falls gilt

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Folgende Matrizen sind normal:

1. unitäre Matrizen
2. reelle orthogonale Matrizen
3. Diagonalmatrizen
4. hermitesche und schiefhermitesche Matrizen
5. reelle symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen

5.2 Normale Matrizen und Eigenwerte

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal.

5.2.1 Erzeugen von weiteren normalen Matrizen

1. $A - \lambda I_n$ normal für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$
2. $Q^*AQ = Q^{-1}AQ$ normal für unitäres Q

5.2.2 Eigenwerte von Adjungierte

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A und v zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A^* mit Eigenvektor v.

- Siehe 4.1.4 auf Seite 25

5.2.3 Eigenwerte von hermitescher Matrix

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesche Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von A reell. Insbesondere sind alle komplexen Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix reell.

5.2.4 Orthogonalität von Eigenvektoren

Sei $A \in C^{n\times n}$ normal. Dann sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal.

5.3 Eigenschaften spezieller normaler Matrizen

5.3.1 Normale Matrizen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Äquivalent sind:

1. A ist normal
2. $\mathbb{C}^n$ besitzt Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A
3. Es existiert $Q \in U_n\mathbb{C}$, so dass $Q^{-1}AQ$ Diagonalmatrix

5.3.2 Hermitesche Matrizen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Äquivalent sind:

1. A ist hermitesch
2. A normal & alle Eigenwerte reell
3. Es existiert $Q \in U_n\mathbb{C}$, so dass $Q^{-1}AQ$ eine reelle Diagonalmatrix ist

5.3.3 Symmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Äquivalent sind:

1. A symmetrisch
2. $\mathbb{R}^n$ besitzt Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A
3. Es existiert $Q \in U_n\mathbb{R}$, so dass $Q^{-1}AQ$ (reelle) Diagonalmatrix

5.3.4 Unitäre Matrizen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Äquivalent sind:

1. A unitär, d.h. $A \in U_n\mathbb{C}$
2. A normal & alle Eigenwerte haben Betrag 1
3. Es existiert $Q \in U_n\mathbb{C}$, so dass $Q^{-1}AQ$ Diagonalmatrix mit Elementen vom Betrag 1.

6 Jordansche Normalform

6.1 Jordanblock

6.1.1 Definition

Ein *Jordanblock* ist eine Matrix

$$J_{m,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{m\times m}$$

mit $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

6.1.2 Diagonalisierbarkeit

Ein Jordanblock ist *nicht* diagonalisierbar. Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist 1-dimensional. Es gilt

$$\chi_{J_{m,\lambda}} = (\lambda - t)^m$$

- e_1 ist Basisvektor des Eigenraums.

6.1.3 Mimimalpolynom

Für das Minimalpolynom gilt

$$\mu_{J_{m,\lambda}} = \chi_{J_{m,\lambda}} = (\lambda - t)^m$$

6.2 Jordansche Normalform

6.2.1 Definition

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ besitzt *Jordansche Normalform* falls sie eine Blockdiagonalmatrix aus Jordanblöcken ist, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} J_{m_1,\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k,\lambda_k} \end{pmatrix}$$

6.2.2 Allgemeinheit der Jordanschen Normalform

Sei $V = \mathbb{C}^n$ und $\varphi \in End_{\mathbb{C}}V$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ Jordansche Normalform hat.

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform.

6.2.3 Ähnlichkeit von Matrizen

Zwei komplexe Matrizen sind *ähnlich* genau dann, wenn sie (bis auf Umordnung der Jordanblöcke) dieselbe Jordansche Normalform haben.

6.3 verallgemeinerter Eigenvektor

6.3.1 Eigenschaften einer Blockdiagonalmatrize mit Jordanblock

Sei $V = \mathbb{C}^n$, $\varphi \in End_{\mathbb{C}} V$, λ Eigenwert von φ. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so dass

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_{m,\lambda} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= \lambda v_1 \\ \varphi(v_2) &= v_1 + \lambda v_2 \\ &\vdots \\ \varphi(v_m) &= v_{m-1} + \lambda v_m \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}) v_1 &= 0 \\ (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}) v_2 &= v_1 \\ &\vdots \\ (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}) v_m &= v_{m-1} \end{aligned}$$

6.3.2 Jordankette

Eine Familie $(v_1, \dots, v_m) \in V$ heißt *Jordankette* zum Eigenwert λ von φ, falls $v_1 \neq 0$ und

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}) v_1 &= 0 \\ (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}) v_2 &= v_1 \\ &\vdots \\ (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}) v_m &= v_{m-1} \end{aligned}$$

gilt.

- Eine Jordankette zum Eigenwert λ von φ ist linear unabhängig

6.3.3 verallgemeinerter Eigenvektor

Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt *verallgemeinerter Eigenvektor* (auch: *Hauptvektor*) von φ zum Eigenwert λ, falls es ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt, so dass

$$(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^k v = 0$$

gilt. Das kleinste $k \in \mathbb{N}$, für dass diese Gleichung gilt, heißt *Stufe* von v.

6.3.4 verallgemeinerter Eigenraum

$$\begin{aligned} V^{\lambda}(\varphi) &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker\left((\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^k\right) \\ &\supseteq \mathrm{lin}(v_1, \dots, v_m) \end{aligned}$$

heißt *verallgemeinerter Eigenraum* von φ bezüglich λ.

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ alle paarweise verschiedene Eigenwerte von φ. Dann gilt

$$V = V^{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}(\varphi)$$

- Dies ist ein Untervektorraum von V
  $V^{\lambda}(\varphi) \leq V$

6.3.5 Lineare Unabhängigkeit von Jordankettenfamilie

Sei

$$\mathcal{C} = \left(\underbrace{v_1^1, \dots, v_{l_1}^1}_{l_1 \text{ stk.}}, \underbrace{v_1^2, \dots, v_{l_2}^2}_{l_2 \text{ stk.}}, \dots, \underbrace{v_1^s, \dots, v_{l_s}^s}_{l_s \text{ stk.}} \right)$$

eine Familie von s Jordanketten zum Eigenwert λ von φ, d.h.

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda \mathrm{id}) v_{j+1}^i &= v_j^i \qquad 1 \leq j < l_i \\ (\varphi - \lambda \mathrm{id}) v_1^i &= 0 \end{aligned}$$

Falls $(v_1^1, \dots, v_1^s)$ linear unabhängig ist auch $\mathcal{C}$ linear unabhängig.

- Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes enspricht der Anzahl der Jordanketten zu diesem Eigenwert.

6.3.6 Verkürzen eines Jordan Erzeugendensystem

Sei $\mathcal{C}$ wie in 6.3.5, aber linear abhängig. Dann existiert eine Familie $\mathcal{C}'$ von Jordanketten mit $\mathrm{lin}(\mathcal{C}) = \mathrm{lin}(\mathcal{C}')$, aber $\mathcal{C}'$ enthält einen Vektor weniger als $\mathcal{C}$.

Um dieses umzuformen wie folgt vorgehen:

1. aus 6.3.5 folgt, das $(v_1^1, \dots, v_1^s)$ linear abhängig. Das heißt, es existiert $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{C}$ die nicht komplett aus Nullen besteht mit
$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_1^i = 0$$
2. Sei $j \in \{1, \dots, s\}$, so dass l_j minimal mit $\alpha_j \neq 0$. Da sich die Eigenschaft der linearen Abhängikeit unter Vertauschung der Elemente in einer Familie nicht ändert, lässt sich die kürzeste Jordankette dessen erster Vektor linear abhängig ist an den Anfang der Familie tauschen. Es gilt also o.E. $j = 1$ und $\alpha_1 \neq 0$
3. Fallunterscheidung über die Länge der nun ersten Kette
   (a) $l_1 = 1$

i. streiche v_1 aus $\mathcal{C}$, um $\mathcal{C}'$ zu erhalten

(b) $l_1 \geq 2$

i. Setze

$$\tilde{v}_p^1 = v_{p+1}^1 + \sum_{\substack{\alpha_i \neq 0 \\ i \neq 11}} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} v_{p+1}^i$$

für $1 \leq p \leq l_1 - 1$
Wegen der Minimalität von l_1 existieren die Vektoren v_{p+1}^i

ii. Nun bildet $\left(\tilde{v}_1^1, \ldots, \tilde{v}_{l_1-1}^1\right)$ eine Jordankette der Länge $l_1 - 1$

iii. Ersetze $\left(v_1^1, \ldots, v_{l_1}^1\right)$ in $\mathcal{C}$ durch $\left(\tilde{v}_1^1, \ldots, \tilde{v}_{l_1-1}^1\right)$ um $\mathcal{C}'$ zu erhalten.

4. Es gilt $\operatorname{lin}(\mathcal{C}') = \operatorname{lin}(\mathcal{C})$

6.3.7 Jordanbasis

Für jeden Eigenwert λ von φ besitzt der verallgemeinerte Eigenraum $V^\lambda(\varphi)$ eine *Jordanbasis* J, das heisst eine Basis von $V^\lambda(\varphi)$ mit

$$\left[\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}\right]_J^J$$

in Jordanscher Normalform.

6.4 Berechnung der Jordan-Normalform

Sei $V = \mathbb{C}^n$ und $\varphi \in End_{\mathbb{C}} V$.

1. Bestimme die Eigenwerte von φ

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$$

mit algebraischen Vielfachheiten

$$e_1, \ldots, e_k$$

in $\mathbb{C}$ gilt bekanntlich $e_1 + \ldots + e_k = n$.

2. Für jeden Eigenwert λ_i:
Bestimme ein Basis des verallgemeinerten Eigenraumes $V^{\lambda_i}(\varphi)$. Dazu:

(a) schrittweise Lösen der linearen Gleichungssysteme

$$(\varphi - \lambda_i \mathrm{id})^j v = 0$$

für $j = 1, 2, \ldots \leq e_i$ bis man e_i linear unabhängige Lösungen gefunden hat. Hierbei tauchen die die Lösungen für $(\varphi - \lambda_i \mathrm{id})^j v = 0$ bei $(\varphi - \lambda_i \mathrm{id})^{j+1} v = 0$ wieder auf.

(b) Für jeden dieser e_i Vektoren v bilde seine Jordanketten durch anwenden von $(\varphi - \lambda_i \mathrm{id})\, v$ (bis man 0 erhält).

(c) Setze diese Jordanketten zu einer Familie zusammen und verkürze sie schrittweise durch Anwendung von 6.3.6 auf der vorherigen Seite, bis man eine Basis (der Länge e_i) erhält.

(d) Man hat nun also für jedes λ_i eine Basis der Form

$$\mathcal{C}_i = \Big(\underbrace{v_{i1}^1, \ldots, v_{il_{i1}}^1}_{l_{i1} \text{ stk.}}, \underbrace{v_{i1}^2, \ldots, v_{il_{i2}}^2}_{l_{i2} \text{ stk.}}, \ldots, \underbrace{v_{i1}^{s_i}, \ldots, v_{il_{is_i}}^{s_i}}_{l_{is_i} \text{ stk.}} \Big)$$

wobei auch die l, s, v von i abhängig sind. Es gilt $e_i = l_{i1} + l_{i2} + \ldots + l_{is_i}$ und $s_i \leq e_i$

3. Matrix des Basiswechsels (zur Jordan Normalform) besitzt als Spalten verallgemeinerte Eigenvektoren aus 2). Diese Kettenweise aufsteigend sortieren!

$$\begin{aligned} [\varphi]_{\mathcal{C}} &= \mathcal{C}^{-1} [\varphi]_E \, \mathcal{C} \\ &= \operatorname{diag}\big(J_{l_{11},\lambda_1}, \ldots, J_{l_{1s_1},\lambda_1}, \\ &\qquad J_{l_{21},\lambda_2}, \ldots, J_{l_{2s_2},\lambda_2}, \ldots J_{l_{ks_k},\lambda_k}\big) \end{aligned}$$

wobei die für die Basiswechselmatrizen gilt

$$\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k)$$

7 Quadratische Formen

7.1 Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

7.1.1 Definition

Eine Abbildung $Q : V \to \mathbb{R}$ heißt *quadratische Form*, falls für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$ gilt

1. $Q(\lambda \cdot v) = \lambda^2 Q(v)$
2. Folgendes ist eine symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} \beta_Q &: V \times V \to \mathbb{R} \\ &: (u, v) \mapsto \frac{1}{2}\left(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\right) \end{aligned}$$

7.1.2 assoziierte quadratische Form

Sei β eine beliebige symmetrische Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$Q : V \to \mathbb{R} : v \mapsto \beta(v, v)$$

eine quadratische Form. Q heißt die zu β *assoziierte quadratische Form.*

- Die Beziehungen aus diesem und dem letzten Punkt zwischen quadratischer Form und Bilinearform gelten allgemein über beliebigen Körpern, in denen $1 + 1 \neq 0$ gilt.

7.2 Matrizen

Sei nun $V = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V.

7.2.1 Matrizen zu Bilinearformen

Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform.

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = (\beta(v_i, v_j))_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

heißt *Matrix* von β bezüglich $\mathcal{B}$.

- $[\beta]_{\mathcal{B}}$ist symmetrisch, d.h.
  $[\beta]_{\mathcal{B}} = ([\beta]_{\mathcal{B}})^T$
- Die Matrix des euklidischen Skalarproduktes $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ auf V und $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ist

  $$[\langle .,. \rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

  weil $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis ist.

7.2.2 Bilinearform zu Matrix

Sei $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann definiert

$$(u, v) \mapsto u^T B v$$

eine symmetrische Bilinearform auf V.

7.2.3 Matrix zu verschiedenen Basen

Sei $\mathcal{B}' = \left(v_1', \dots, v_n'\right)$ eine weitere Basis von V, und sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform auf V mit Matrizen $A = [\beta]_{\mathcal{B}}$ und $A' = [\beta]_{\mathcal{B}'}$ Es sei ferner $S \in GL_n\mathbb{R}$ die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$, das heißt

$$S = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

und

$$\begin{pmatrix} s_{i1} \\ \vdots \\ s_{in} \end{pmatrix} = [v_i']_{\mathcal{B}}$$

$$A' = S^T A S$$

- siehe auch 1.6.2 auf Seite 13.

7.3 Quadrik

Sei $V = \mathbb{R}^n$ der euklidische Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt $\langle .,. \rangle$

7.3.1 Hauptachsen

Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Dann existiert eine Orthonormalbasis

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$$

von $\mathbb{R}^n$, so dass

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix ist. Die eindimensionalen Teilräume

$$\mathrm{lin}(v_i) = \mathbb{R} v_i$$

heißen *Hauptachsen* von β.

Um eine Matrix in Hauptachsenform zu bringen siehe Diagonalisierung von Matrizen unter 4.2.2 auf Seite 25. Diese Transformation heißt *Hauptachsentransformation*.

- Mit $\mathbb{R} v_i = \{\lambda v_i | \lambda \in \mathbb{R}\}$

7.3.2 Quadrik

Für eine quadratische Form $Q : V \to \mathbb{R}$ heißt

$$\{v \in V | Q(v) = 1\}$$

die zu Q gehörige Quadrik.

In Hauptachsenform erhält gilt

$$\sum_i x_i^2 \lambda_i = 1$$

und man die *Achsenschnittpunkte* durch

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$$

- Die Hauptachsentransformation spiegelt und dreht die Quadriken lediglich
- Im $\mathbb{R}^2$ gibt es folgende Fälle

  Hyperbel für $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$ (bzw. andersrum)
  - Spezialfall *Parabel*

  Ellipse für $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
  - Spezialfall *Kreis*

  Gerade für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ (bzw. andersrum)

Index