Formelsammlung
Physik I

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 23.05.2005 - Version: 0.9.0
Erhältlich unter HTTP://PRIVAT.MACROLAB.DE

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung "Physik I" von Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Achim Richter an der Technischen Universität Darmstadt im Wintersemester 2004/05.

Die folgende Formelsammlung steht zum kostenlosen Download zur Verfügung. Das Urheberrecht und sonstige Rechte an dem Text verbleiben beim Verfasser, der keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit der Inhalte übernehmen kann.

Inhaltsverzeichnis

1 Einheiten und Vorsatzzeichen

1.1 Einheiten

Alle Einheiten lassen sich auf die 7 SI-Basiseinheiten (System International) zurückführen. Dies sind Länge (m), Masse (kg), Zeit (s), Stromstärke (A), Temperatur (K), Stoffmenge (Mol) und die Lichtstärke (cd).

Eine ausführliche Auflistung finden sie in Tabelle 1 auf der nächsten Seite.

1.1.1 Länge

1m ist die Stecke die das Licht im Vakuum während der Zeit $\frac{1}{c_0}s$ durchläuft, mit $c_0 = 299798458\frac{m}{s}$.

1.1.2 Winkel

Ebener Winkel

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{\text{Laenge auf Kreis}}{\text{Radius}}$$

$$[\alpha] = 1rad = \frac{360°}{2\pi} = 57,295°$$

- $1° = 60'$(Bogenminuten)
- $1' = 60''$(Bogensekunden)

Raumwinkel

$$\Omega = \frac{F}{r^2} = \frac{\text{Kugelflaeche}}{\text{Radius}^2}$$

$$\begin{aligned}[\Omega] &= 1sr \\ &= 1Steradiant\end{aligned}$$

- $\Omega_{max} = 4\pi$

1.1.3 Zeit

Jedes Phänomen, dass sich selbst wiederholt, d.h. jeder periodische Vorgang, kann als Maß für die Zeit benutzt werden.

$$1s = 9192631770\text{Schwingungen von } ^{133}Cs$$

Frequenz $\nu = \frac{n}{t} = \frac{\text{Ereignisse}}{\text{Zeit}}$

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$

Periodendauer $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$

Wellenlänge $\lambda_{vakuum} = \frac{c_0}{\nu}$

- $c_0 = 299798458\frac{m}{s}$ Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

Wellenzahl $\tilde{\nu} = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda_{vakuum}}$

1.1.4 Masse

Genauer Schwere Masse (laut Einstein Äquivalent zur Trägen Masse)

$$\begin{aligned}[m] &= 1kg \\ &= \frac{1}{1,9925 * 10^{-26}}\text{Atome von } ^{12}C \\ &= 5,0188 * 10^{25}\text{Atome von } ^{12}C\end{aligned}$$

Unit $1u = 1unit = \frac{1}{12}\text{Masse von } ^{12}C = 1,6604 * 10^{-27}kg$

Isotope Elemente mit gleicher Kernladungs-, aber unterschiedlicher Neutronen Anzahl

- Offt auch Nuklide genannt

Mittleres Atomgewicht $A_r = \frac{\bar{m}_a}{\frac{1}{12}m(^{12}C)}$

- Durchschnittliches Atomgewicht über alle Isotope hinweg bezogen auf ^{12}C

Mol $1mol$ =diejenige Stoffmenge, die genausoviele Teilchen enthält wie $12,000g$ Kohlenstoff ^{12}C

- Avogadro'sche Zahl $N_A = \left(6,022045 \pm 5 * 10^{-6}\right) * 10^{23}\frac{1}{mol}$
- $1mol$ enthält N_A Teilchen

Elektron $m_e = 9,1 * 10^{-31}kg$

1.2 Vorsatzzeichen

Siehe Tabelle 2.

Tabelle 2: Vorsatzzeichen und Abkürzungen

da	Deka	10^1	d	Dezi	10^{-1}
h	Hekto	10^2	c	Zenti	10^{-2}
k	Kilo	10^3	m	Milli	10^{-3}
M	Mega	10^6	μ	Mikro	10^{-6}
G	Giga	10^9	n	Nano	10^{-9}
T	Tera	10^{12}	p	Piko	10^{-12}
P	Peta	10^{15}	f	Femto	10^{-15}
E	Exa	10^{18}	a	Atto	10^{-18}
Z	Zetta	10^{21}	z	Zepto	10^{-21}
Y	Yotta	10^{24}	y	Yocto	10^{-24}

1.3 Gleichungen

- Größengleichungen

$$\underbrace{a}_{\text{Formelzeichen}} = \underbrace{\{a\}}_{\text{Zahl}} \underbrace{[a]}_{\text{Einheit}}$$

Tabelle 1: Einheiten

Größe	Formel-Buchstabe	Einheit	Einheit-Name
Länge	l	m	Meter
Masse	m	kg	KiloGramm
Zeit	t	s	Sekunde
Stromstärke	I, i(t)	A	Ampere
Temperatur	T, ϑ	°C K	Grad-Celsius Grad-Kelvin
Stoffmenge	m	Mol	mol
Lichtstärke		cd	Candela
el. Ladung	Q	$C = As$	Coulomb
el. Spannung	U, u(i)	$V = \frac{J}{C} = \frac{m^2kg}{s^3A}$	Volt
el. Widerstand	R	$\Omega = \frac{1}{S} = \frac{V}{A} = \frac{m^2kg}{s^3A^2}$	Ohm
el. Leitwert	G	$S = \frac{1}{\Omega} = \frac{A}{V} = \frac{s^3A^2}{m^2kg}$	Siemens
mag. Fluß	ϕ	$W_b = Vs = \frac{m^2kg}{s^2A}$	Weber
mag. Flußdichte	B	$T = \frac{Vs}{m^2} = \frac{kg}{s^2A}$	Tesler
mag. Feldstärke	H	$\frac{A}{m}$	
Induktivität	L	$H = \frac{Vs}{A} = \frac{m^2kg}{s^2A}$	Henry
Leistung	P	$W = VA = \frac{m^2kg}{s^3}$	Watt
Energie	W	$J = Ws = Nm = \frac{m^2kg}{s^2}$	Joule
el. Kapazität	C	$F = \frac{C}{V} = \frac{As}{V} = \frac{A^2s^4}{m^2kg}$	Farrad
Geschwindigkeit	v	$\frac{m}{s}$	
Beschleunigung	a	$\frac{m}{s^2}$	
Kraft	F	$N = \frac{mkg}{s^2}$	Newton

  - Jeder Wert beseht aus Zahl und Einheit
  - Die Einheit setzt sich aus den 7SI-Basiseinheiten zusammen welche jeweils einen Exponenten aus $\mathbb{Z}$ haben
  - Sicherer da man Fehler an falschen Einheiten erkennen kann
  - z.B. $P = UI = 220V \cdot 15A = 3300VA = 3300W$
- Zahlenwertgleichungen
  - z.B. $W = 4,186 \cdot c \cdot m \cdot \Delta\vartheta$ wenn C in $\frac{cal}{g \cdot k}$, m in kg, $\Delta\vartheta$ in K
  - nicht benutzt, da Probleme mit Einheiten / in richtiger Dimension (mm,cm,m,km,...)
- Zugeschnittene Größengleichungen
  - z.B. $\frac{W}{Ws} = \frac{4,186 \cdot c \cdot m \cdot \Delta\vartheta}{cal}$
  - selten benutzt, aber sicherer als Zahlenwertgleichungen, da Einheiten mit benutzt werden

2 Radioaktiver Zerfall

Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

- $\dot{N} = -\lambda N$

Halbwertszeit $T_{1/2}$ mit $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$

- $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$
- $\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} = \frac{1}{\tau}$
- τ mittlere Lebensdauer

C_{14} **Datierung** Ausnutzten, das in aller lebenden Materie das $\frac{C_{14}}{C_{12}}$ Verhältniss konstant ist, und erst ab dem Absterben abnimmt.

Uranium Datierung Ausnutzen, das beim Verfall von einem U_{238} Atom genau ein Pb_{206}und 8 He_4 Atome entstehen

3 Kinematik eines Massenpunktes

Kinematik ist die Lehre von der Bewegung

Dynamik Verbindung zwischen Bewegung und deren Ursachen

Massenpunkt Masse die keine Räumliche Ausdehnung besitzt

3.1 Bahn

Das Koordinatensystem ist so zu wählen, dass die Beschreibung einfach wird.

Ort von m lässt sich durch einen Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ festlegen

Bahn von m ist der Ort als Funktion der Zeit $\vec{r}(t)$

Bewegung von m ist eine Ortsveränderung $\Delta\vec{r}$ im Zeitraum Δt

Bahnkurve $x(t) = \frac{a(t)}{2}t^2 + v_0 t + x_0$

Translation gradlinige Bewegung

Rotation Kreisbewegung

3.2 Geschwindigkeit

Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

- $\vec{v}$ Zeigt in Richtung der Tangente von der Bahn $\vec{v} = v\vec{e}_t$
- $[v] = \frac{m}{s}$
- $\vec{r}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,dt$

3.2.1 Kreisbewegung

Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ =zurückgelegte rad pro s

- Liegt in der Drehachse / Senkrecht zur Drehbewegung

Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

3.3 Beschleunigung

Mittlere Beschleunigung $\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \overline{\dot{v}}$

Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

- $[v] = \frac{m}{s^2}$
- $\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{e}_t = \dot{v}\vec{e}_t + ve_n = \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\dot{e}_t$ Beschleunigung lässt sich zerlegen in Tangentiale und Normale Komponente. ρ ist der Krümmungsradius der Bahn.

Erdbeschleunigung $a = g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$

3.3.1 Kreisbewegung

Zentripetalschleunigung $\vec{a}_z = \vec{\omega} \times \vec{v}$

- nach Innen gerichtet
- bei gleichmäßiger Bewegung $a_z = \frac{v^2}{r}$
- Frequenz f
- Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$
- Periodendauer $T = \frac{1}{f}$

4 Dynamik eines Massenpunktes - Kraft

Dynamik Beschreibung von Bewegungen durch Kräfte

4.1 Begriff der Kraft

Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$

- $[p] = \frac{mkg}{s}$
- Ist eine Erhaltungsgröße $\Rightarrow$ bleibt über die Zeit gesehen in der Summe konstant

Kraft $\vec{F} = m\vec{a}$

- $[F] = \frac{mkg}{s^2} = 1Newton = 1N$
- hier geht die Träge Masse ein (Äquivalent der Schweren Masse)
- Lässt sich auf Ihrer *Wirklinie* belibig verschieben.
- Kräftegleichgewicht ($\sum \vec{F}_i = 0$): Beschleunigung verschwindet.

4.2 Newton'sche Axiome

Trägheisprinzip (N_1) Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder in gleichförmig geradliniger Bewegung, falls er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu verlassen.

$$\vec{v} = const \quad \vec{a} = \vec{0}$$

Aktionsprinzip (N_2) Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich einer Kraft.

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

Reaktionsprinzip (N_3) Die Summe aller Kräfte in einem abgeschlossenen System sind 0. Aktion = Reaktion

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

- Innere Kräfte (Wechselwirkungskräfte) treten immer Paarweise auf, und sind in der Summe 0.

4.3 Gravitation, Gewicht und schwere Masse

Gravitationskraft $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$

- r ist der Abstand zwischen den Massen
- $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ ist der Radiale Einheitsvektor

- $G = 6,67890 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ ist die *Gravitationskonstante* (auch manchmal γ)
- $g = G\frac{M_E}{R_E^2}$ Erdbeschleunigung
  - Abhängig von der Höhe und vom Breitengrad, da Erde nicht ideal Kugelförmig

Gewicht Die Kraft die der Ausschlag der Federwaage anzeigt, ist gleich dem Gewicht G des Körpers, d.h.: Gewicht = Kraft

- $[Gewicht] = N$
- $1kg \hat{=} 9,81N$

Schwere Masse $m_{schwer} = m_s = \frac{Gewicht}{g}$ hat nichts zu tun mit der Trägen Masse (m_t), die wir über Beschleunigung definiert haben.

- es lässt sich zeigen, dass $m_s = m_t$ gilt

4.4 Planetenbewegung

Kepplerschen Gesetze

(K1) Bahnen der Planeten um die Sonne sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne liegt

(K2) Radiusvektor von der Sonne zum Planeten (Fahrstrahl) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

- Beschleunigung / Kräfte ist immer Radial zur Sonne gerichtet. Eine solche Kraft nennt sich *Zentralkraft* - Immer radial auf / von Zentrum gerrichtet.

(K3) Das Verhältniss aus der Umlaufzeit zur 3.ten Potenz und dem Quadrat der Umlaufzeit ist für alle Planetenbahnen gleich. $\frac{a^3}{T^2} = 3,354 * 10^{18} \frac{m^3}{s^2}$

- Hieraus lässt sich die Sonnenmasse bestimmen
- Gilt innerhalb eines Sonnensystems (bzw. Planet mit Monden oder so)

Satellitenbahn $v = \sqrt{G\frac{m_E}{r}}$

- v auf Kreisbahn
- r Bahnradius
- G Gravitationskonstante
- Umlaufperiode $T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{Gm_E}}$
- Unabhängig von Satellitenmasse

Fluchtgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gr_E}$

- Abschussgeschwindigkeit die Nötig ist, einen Körper ins Unendliche zu befördern. D.h. er wird niemals auf die Erde zurückfallen.

4.5 Reibung

Feste Körper $\left|\vec{F}_r\right|_{max} = \mu F_n$

- Die Reibung wirkt immer entgegen der Bewegungsrichtung, ist aber niemals größer als die Beschleunigende Kraft.
- F_n ist die Normalkomponente der Kraft, die den Körper auf die Oberfläche Presst
- μ Ist eine Materialkonstante (anhängig von beiden Materialien)
  - μ_H Haftreibung
  - μ_G Gleitreibung
  - μ_R Rollreibung
  - $\mu_R < \mu_G < \mu_R$

Flüssigkeiten / Gase $F_R = \gamma v$

- Wirkrichtung entgegengesetzt zu $\vec{v}$
- so nur für kleine Körper. Bei großen Körpern $F_R \sim v^2$.
- $\gamma = k\eta$ Materialkonstante
  - η Eigenschafft der Flüssigkeit / des Gases. Zähigkeit / Viskosität
    - $[\eta] = 1\frac{g}{s*cm} = 1\text{Poise} = 1P$
  - k Gestalt des Körpers
- Spezialfall: Kugel vom Radius R - Stokesches Gesetz
  $\vec{F}_R = -6\pi\eta R\vec{v}$
- Auftrieb in Flüssigkeiten/Gasen $F = m_{verdr}g$
  - m_{verd} Masse der Verdrängten Flüssigkeit / Gas
- Endgeschwindigkeit $v_e = \frac{m - m_{verdr}}{k*\eta}g$

4.6 Elastizität von Materialien

Spannung $\sigma = \frac{F}{A}$

- Kraft die Pro Querschnittsfläche in einem Material wirkt

Dehnung $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Elastizitätsmodul $\sigma = E\epsilon$

- Nur für $\epsilon < 1\%$ so, darüber beginnt das plastische Fließen was nichtlinear und vorallem irreversibel ist.
- hängt nicht nur von Material, sondern auch von dessen innerer Struktur und damit der Vorgeschichte des Materials ab.

4.7 Mathematisches Pendel (Fadenpendel)

Mathematisches Pendel hat folgende Idealisierungen:

- Punktförmige Masse
- gewichtsloser Faden
- nur kleine Ausschläge des Pendels

Schwingfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

- Bewegungsgleichung $\varphi(t) = A * \cos(\omega t)$

4.8 Harmonischer Oszillator

Allgemein $m\ddot{x} = -Dx \Leftrightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 x$

Lineare harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz ω. Heißt harmonisch, da nur sinus und cosinus Therme auftreten

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ &= X\cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

- X Amplitude
- φ Phasenlage

Feder-Masse Schwinger $\omega_o = \sqrt{\frac{D}{m}}$

- $D = \frac{F}{s}$ Federkonstante ($s = DF$ Hook'sches Gesetz)
- $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$
  - x_0 Anfangsauslekung
  - v_0 Anfangsgeschwindigkeit

4.9 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Allgemein $\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\varrho\dot{x} = 0$

- Bei Feder $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ und $2\varrho = \frac{\gamma}{m}$ wobei γ Reibungskonstante

Ansatz $x = Ae^{\lambda t}$

- $\lambda_{1/2} = -\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - \omega_0^2}$
- $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
- $[\lambda] = \frac{1}{s}$

kritische Dämpfung $\varrho^2 = \omega_0^2$

- $x(t) = x_0(1 + \varrho t)e^{-\varrho t}$
- Ruhelage für $t = \infty$ erreicht

Überkritische Dämpfung $\varrho^2 > \omega_0^2$

- Krichfall
- aperiodischer Fall
- abklingende Schwingung
- $C_1 = \frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$ $\quad C_2 = \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$
- $x(t) = x_0\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_2 t}\right)$

Schwach gedämpftes System $\varrho^2 < \omega_0^2$

- $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{\omega_0^2}}$
- $x(t) = x_0 e^{-\varrho t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\varrho}{\omega}\sin(\omega t)\right)$
- $\varphi = \arctan\left(-\frac{\varrho}{\omega}\right)$
- $C = \frac{1}{\arccos(\varphi)}$
- $x(t) = x_0 e^{-\varrho t} C\cos(\omega t + \varphi)$
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- exponentiell gedämpfte Schwingung
- Dämpfungsverhältniss $k = \frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\varrho T}$

4.10 Linear gekoppelte harmonische Oszillatoren

Zwei Wagen x_1 und x_2 werden mit einem Gummiband gekoppelt (Federkonstante d), jeweils an den Rändern mit einer Feder D befestigt und in Schwingung versetzt. Dabei gibt es zwei charakteristische Schwingungstypen - *Normalmoden*. Beide Pendel schwingen gegenphasig (gegeneinander) mit ω_- bzw. sie schwingen gemeinsam ω_+. Beobachtung $\omega_+ < \omega_-$.

Allgemein

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2 x_1 - \frac{d}{m}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_2 - \frac{d}{m}(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned} X &= A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \\ Y &= A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{aligned}$$

- erhalten durch Additon und Subtraktion der oberen Gleichungen
- $X = x_1 + x_2$
- $Y = x_1 - x_2$
- $\omega_+ = \omega_0$
- $\omega_- = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2d}{m}}$
- Diese Normalmoden sind sozusagen Standardbasisvektoren und alle anderen Schwingungen lassen sich aus ihnen kombinieren

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_+}{2}\cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \frac{A_-}{2}\cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ x_2 &= \frac{A_+}{2}\cos(\omega_+ t + \varphi_+) - \frac{A_-}{2}\cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{aligned}$$

- Es findet kein Energieaustausch zwischen den Schwingungnen in Normalmoden statt

Spezialfall - Schwebung

$$\begin{aligned} x_1 &= A\cos(\omega_t t)\cos(\Delta\omega t) \\ x_2 &= A\sin(\omega_t t)\sin(\Delta\omega t) \end{aligned}$$

- $\varphi_+ = \varphi_- = 0$
- $A_+ = A_- = A$
- $\Delta\omega = \frac{\omega_- - \omega_+}{2}$ Schwebungsfrequenz
- $\omega_t = \frac{\omega_- + \omega_+}{2}$ Trägerfrequenz
- Energie schwingt zwischen x_1 und x_2 hin und her

4.11 Erzwungene Schwingungen

Anregung eines gedämpft schwingenden Systems durch eine von Außen wirkende periodische Kraft (sinusförmig).

Allgemein $\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\varrho\dot{x} = \alpha_0 \cos(w_1 t)$

- Bei Feder $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ und $2\varrho = \frac{\gamma}{m}$ wobei γ Reibungskonstante
- $\alpha_0 = \frac{F_0}{m}$ von außen wirkende Kraft geteilt durch die Schwingmasse

Lösung $x(t) = \epsilon \cos(\omega_1 t + \varphi)$

- $\varphi = \arctan\left(-\frac{2\varrho\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right)$
- $\epsilon = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + (2\varrho\omega_1)^2}}$

Verhalten

- Amplitude der Schwingung ist um so größer, je größer α_0 ist
- Amplitude der Schwingung ist um so größer, je geringer der Unterschied zwischen ω_0 und ω_1 ist.
- Amplitude der Schwingung ist um so größer, je geringer die Dämpfung ϱ ist.
- ϵ_{max} bei ω_m knapp unter ω_0 bzw bei $\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\varrho^2}$
- $\epsilon(\omega_0) \approx \epsilon(\omega_m)$
- Phase bleibt im Resonanzfall um $\frac{\pi}{2}$ zurück.

  Gütefaktor $Q = \omega_0\tau = \frac{\epsilon(\omega_m)}{\epsilon_0(\omega_1=0)} \approx \frac{\epsilon(\omega_0)}{\epsilon_0(\omega_1=0)} = \frac{\alpha_0}{2\varrho\omega_0}$

  – mit $\tau = \frac{1}{2\varrho} = \frac{m}{\gamma}$

4.12 Lissajous Figuren

Lissajous Figuren entsprehen, durch die harmonische Auslenkung eines Punktes in der x und y Ebene als Bahnkurve dieses Punktes.

$$\begin{aligned} s_x(t) &= s_{x0}\cos(\omega_x t) \\ s_y(t) &= s_{y0}\cos(\omega_y t + \varphi) \end{aligned}$$

Kreis $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \omega_x = \omega_y \quad s_{x0} = s_{yo}$

- $s_{x0}^2 = s_x^2 + s_y^2$

Gerade $\varphi = 0 \quad \omega_x = \omega_y$

- Vom Punkt $(-s_{x0}, -s_{y0})$ bis (s_{x0}, s_{y0})

Ellipse $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \omega_x = \omega_y$

- $\left(\frac{s_x}{s_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{s_x}{s_{x0}}\right)^2 = 1$

Acht $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad n\omega_x = \omega_y \quad n > 1$

4.13 Nichtlineare Schwingungen

Das Gesetz $F = -Dx$ ist nur eine Näherung für kleine x.

Näherung $F = -Dx - D_3x^3$

DGL $\ddot{x} + 2\varrho\dot{x} + \omega_0^2 x + \delta x^3 = \alpha\cos(\omega t)$

- $\delta = \frac{D_3}{m}$

Effekte

- Analytisch nicht mehr lösbar $\Rightarrow$ numerische Simulation
- Überhängen der Resonanzkurve. Es gibt eine Hysterese zwischen hin und Rücklaufendem ω
- Es entstehen zusätzliche (kleinere) Resonanzen bei ganzzahligen Vielfachen / Brüchen von ω_0
- Ein nichtlinearer Oszillator braucht nicht mit der Anregungsfrequenz schwingen.
- Es tritt Periodenverdoplung auf
- Dies kann zu einer Periodenverdopplungskaskade führen
  - 2^∞Verdopplungen: aperiodische Schwingung / chaotische Schwingung

5 Arbeit, Leistung, Energie und Energieerhaltung

5.1 Arbeit und Leistung

Arbeit $W = \vec{F}\vec{r} = Fr\cos\left(\vec{F},\vec{r}\right) = \int \vec{F}\left(\vec{r}\right) d\vec{r} = \int N\,dt = \int p\,dv$

- $[F] = 1Nm = 1Ws = 1Jule = 1J$
- W hat ein neegatives Vorzeichen, falls Arbeit verrichtet werden muss (Konvention)

Leistung $N = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$

- oben ist die momentane Leistung angegeben. Die mittlere Leistung ist: $\overline{N} = \frac{W}{t}$
- $[N] = 1\frac{Nm}{s} = 1\frac{J}{s} = 1Watt = 1W$

5.2 Verschiedene Formen der Arbeit

Hubarbeit $W = mgh$

Federarbeit $W = \frac{1}{2}Dx^2$

Beschleunigungsarbeit $W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

- auch kinetische Energie genannt.

5.3 Energie

Energie Arbeitsfähigkeit des Systems, d.h. der Aufwand von Arbeit gibt dem System selbst wieder die Möglichkeit Arbeit zu leisten.

$$\Delta E + \Delta W = 0$$

Potentielle Energie Arbeitsfähigkeit der Lage des Systems

- $W_{pot} = -\int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r} = U\left(\vec{r}_1\right) - U\left(\vec{r}_2\right)$
- Die Kräfte des Potentialfeldes lassen sich ermittel mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}U\left(\vec{r}\right)$
- Im Potentialfelder erzeugen konservative Kräfte

konservative Kräfte $\oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0$

- Die ist Heis $\vec{F}$ ist rotationsfrei
- Kräfte die dies nicht erfüllen heißen nicht konservative Kräfte

Kinetische Energie Arbeitsfähigkeit eines Systems, die aus dem Bewegungszustand folgt.

- $W_{kin} = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$

5.4 Energieerhaltung

Energieerhaltung $W_{kin} + W_{pot} =$ konstant

- gilt nur in Systemen wo keine anderen Energieformen mit hineinspielen
- unter vernachlässigung der Reibung

Bewegung $t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(W - W_{pot}\right)}}$

- $W =$ Gesamtenergie des Systems
- r_0, t_0 Anfangspositionen

5.5 Bahnimpuls

Impulserhaltungssatz $\sum_i m_i\vec{v}_i =$ konst

- ohne äußere Einwirkung bleibt in einem abgeschlossenen System die Summe aller Impulse konstant.

Stoßprozess $\sum_i \frac{\vec{p'}_i^2}{2m_i} = Q + \sum_i \frac{\vec{p'}_i^2}{2m_i}$

Energieverlust Q

Elsastischer Stoß $Q = 0$

Unelastischer Stoß $Q \neq 0$

- Größen ohne $'$ vor dem Stoß, mit $'$ nach dem Stoß

zentraler elastischer Stoß $\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} = \frac{\vec{p'}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p'}_2^2}{2m_2}$

- zweite Kugel in Ruhe $p_2 = 0$
- $p_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} p_1$
  $p_2' = \frac{2m_2}{m_1+m_2} p_1$
- $v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} v_1$
  $v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_1$

zentraler unelastischer Stroß $v_1' = v_2'$

- zweite Kugel in Ruhe $p_2 = 0$
- $p_1' = \frac{m_1}{m_1+m_2} p_1$
  $p_2' = \frac{m_2}{m_1+m_2} p_2$
- $v_1' = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1$
  $v_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1$
- $Q > 0$
- $\frac{Q}{W_{kin}^{vorher}} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$

  Wirkungsgrad $\eta = 1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}$

Nicht zentraler elastischer Stoß $Q = 0, p_2 = 0$

- $\vec{p_1} = \vec{p_1'} + \vec{p_2'}$
- Die Vektoren p_1' und p_2' gehorchen folgender Kreisgleichung
  - $\vec{p_1'} = (x, y)$
  - $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = R^2$
  - $x_m = R = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_1$
  - $y_m = 0$
- Sonderfall $m_1 = m_2$
  - $\vec{p_1'} \perp \vec{p_2'}$
  - beim zentralen Stoß erfolgt *Geschwindigkeitsaustausch*, d.h. $\vec{p_1'} = 0$
- Sonderfall $m_1 \ll m_2$
  - Impuls $\vec{p_1'}$ kann nach dem Stoß alle Richtungen haben, sein Betrag bleibt praktisch erhalten
  - beim zentralen Stoß wird m_1 *reflektiert*
  - $v_2 \approx 2\frac{m_1}{m_2} v_1$
  - Energieübertragung $W_{kin,2} \approx 4\frac{m_1}{m_2} W_{kin,1}$
  - Energieübertrag umso Größer, je kleiner der Massenunterschied
- Sonderfall $m_1 \gg m_2$
  - Der stossende Körper m_1 behält praktisch seine Geschwindigkeit und Richtung bei
  - $\vec{p_1} \approx \vec{p_1'}$
  - der Körper stößt den anderen vor sich her.

6 Systeme von Massenpunkten

6.1 Schwerpunkt

Allgemein ein solches System mit i Massen, zu jeder Masse deren Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Zwischen diesen Kräfen herschen (paarweise identische) innere Kräfte, die im folgenden vorläufig nicht Berrücksichtigt werden, sondern nur die *äußeren Kräfte* (alle übrigen).

Massenmittelpunkt / Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \varrho\, dV}{\int \varrho\, dV}$

- Wenn die Gesamtmasse mit $M = \sum_{i=1}^n m_i$ gegeben ist, gilt: $\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M}$
- Impuls $M\dot{\vec{R}} = \vec{P}$
- Äußere Kraft $\vec{F_a} = \dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}}$
- Dichte $\varrho = \frac{dm}{dV}$
- Lage relativ zu dem Massen ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems

Impulserhaltung $\vec{P} =$ konstant

- $\Rightarrow \dot{\vec{P}} = 0$
- $\Rightarrow \dot{\vec{R}} =$ konstant

6.2 Stossprozesse im Schwerpunktsystem

Vorteil leichter zu rechen

Nachteil vom / zum messbaren im Laborsystem muss erst Transformiert werden

Stoss zweier Massen $\vec{P_1} = -\vec{P_2}$ und $\left|\vec{P_1}\right| = \left|\vec{P_1'}\right| = \left|\vec{P_2}\right| = \left|\vec{P_2'}\right|$

- Diese Beziehung gilt sowohl vor, als auch nach dem Stoß. $\vec{P_i}$ ist dabei der Impuls relativ (des Geschw. Vektors) zum Massenschwerpunkt (der In Bewegung sein kann):
  $\vec{p_i} = \vec{P} + \vec{P_i}$
- bei zwei Massen, findet der Stoß im Schwerpunkt statt.
- Wenn die Massen identisch sind, gilt obrige Gleichheit auch für die Geschwindigkeiten
- Falls eine Masse in Ruhe vor dem Stoß und Massen identisch gilt zudem $\left|\vec{P}\right| = \left|\vec{P_1}\right| = \dots$

Rakete $v_e = v_a + v_0 \ln\left(\frac{M_a}{M_e}\right)$

- v_e Endgeschwindigkeit der Rakete
- v_a Anfangsgeschwindigkeit der Rakete
- M_e Endmasse der Rakete
- M_a Anfangsmasse der Rakete
- v_o Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoffes aus der Rakete

6.3 Reduzierte Masse

Reduzierte Masse $\mu = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{m_i}} = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} = \frac{m_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}$

Bewegung $\mu \vec{a}_{12} = \vec{F}_{12}$

- Für ein Zweikörperproblem, bei dem nur innere Kräfte wirken
- $\vec{a}_{12}, \vec{F}_{12}$ sind die Werte relativ zwischen den beiden Körpern m_1 und m_2
- Überlagert mit der Bewegung des Schwerpunktes ergibt dies die Einzelbewegungen

7 Drehbewegung starrer Körper

7.1 Starre Körper

Starre Körper ausgedehnetes, kontinuierliches System von starr verbundenen Massenelementen, d.h der Abstand $|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| =$ konstant, auch wenn äußere Kraft aufgewendet wird

- Idealisierung, da Körper innere Freiheitsgerade besitzen. D.h. Verformt werden können durch Einfluss von Druck, Temperatur usw.

mittlere Dichte $\varrho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV}$

7.2 Drehmoment und Trägheitsmoment

Zurückgelegter Winkel $\varphi = \frac{1}{2}\dot{\omega}t + \omega_0 t + \varphi_0$

- entspricht Weg s bei Translation

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$

- entspricht Geschwindigkeit v bei Translation

Winkelbeschleunigung $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

- entspricht Beschleunigung a bei Translation

Umlaufgeschwindigkeit $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

Drehmoment $\vec{T} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = I\vec{\omega} = \dot{\vec{L}}$

- $\vec{r}$ beüglich der Drehachse / Drehpunkt gemessen (kürzester Abstand zu dieser)
- $[T] = 1Nm$
- entspricht Kraft F bei Translation
- Hier gilt in etwa $(N2)$, das heißt für gleichmäßige bewegung gilt $\sum_i \vec{T}_i = \vec{0}$

Trägheitsmoment $I = \sum_i r_i^2 dm = \int r^2 dm = \int r^2 \varrho dV$

- $[I] = kg\, m^2$
- entspricht Masse m bei Translation

  Holzylinder $I = \frac{m}{2}\left(r_a^2 + r_i^2\right)$

  - bei Drehung um Zylinderachse

  Kreisscheibe $I = \frac{m}{2}R^2$

Trägheitsradius $A = \sqrt{\frac{I}{m}}$

- entsprich einem Radius A so, dass $I = mA^2$ gilt.
- $[A] = m$

Drehimpuls $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Rotations Energie $W_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$

Drehpendel $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t)$

- $\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}$
- Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

Steinerscher Satz $I_A = I_S + ml^2$

- I_S Trägheitsmoment im Schwerpunkt bzgl. der gleichen (nur parallelverschobenen) Drechachse
- l Abtand des neuen Drehpunkt A vom Schwerpunkt S
- I_A Trägheitsmoment im Punkt A

Energieerhaltung $W_{kin} + W_{pot} + W_{rot} = konst$

- erweiterte Energieerhaltung
- Bietet lösungsanstatz, durch Ableiten und Nullsetzen mit anschließendem lösen der Differentialgleichung.

7.3 Physikalisches Pendel

Unter einem physikalischen Pendel versteht man ein Pendel, bei dem die Masse nicht auf einem Punkt konzentriert ist, wie beim mathematischen Pendel, sondern Räumlich verteilt

Bewegung $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t)$

Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{smg}{I_A}} = \sqrt{\frac{smg}{I_S + ms^2}} = \sqrt{\frac{T_{max}}{I}}$

- m Masse des Pendels
- I_s Trägheitsmoment im Schwerpunkt
- s Anstand des Aufhängepunkts vom Schwerpunkt

reduzierte Pendellänge $l_r = \frac{I_A}{ms} = \frac{I_S + ms^2}{ms}$

- entspricht Länge eines mathematischen Pendels mit der selben Schingungsdauer
- Wenn ein Pendel anstatt in A um l_r verschoben aufgehangen wird, so ergibt sich die selbe Kreisfrequenz. $\Rightarrow$ *Reversionspendel*
- $\omega = \sqrt{\frac{g}{l_r}}$

Doppelpendel / Chaotisches Pendel hier werden zwei aneinander gekoppelte Rotoren in Bewegung gesetzt. Deren Bewegungsablauf extrem stark von den Anfangsbedingungen abhängt. Hier ist es also nicht mehr möglich seine Bahn vorrauszuberrechnen.

7.4 Vergleich von Linearer- und Rotationsbewegung

Siehe Tabelle 3 auf der nächsten Seite.

8 Drehimpuls

Drehimpuls $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}$

- $\left[\vec{L}\right] = 1\frac{m^2 kg}{s} = 1Ws^2$

Erhaltung $\vec{L} =$ konstant

- Wenn von außen kein Drehmoment auf das System wirkt. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T} = 0$

System $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$

- Gesamtdrehimpuls des Systems
- Gesamtdrehimpuls wird von inneren Kräften *nicht* verändert

System beinflusst $\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{L}}_i = \sum_i \vec{T}_i = \vec{T}_a$

- Die änderung des Drehimpulses eines Gesamtsystems ist gleich dem äußeren Drehmoment
- Im kräftefreien Fall gilt auch hier $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i =$ konstant.

9 Verhalten eines freien Körpers und Kreisel

9.1 Hauptträgheitsachsen

Freie Achsen Drehachsen mit dem größten und kleinsten Trägheitsmoment

- und diese Achsen ist die Bewegung stabil

Trägheitsellipsolid Misst man I_s des Körpers um verschiedene Achsen und trägt die Größe $\frac{1}{\sqrt{I_s}}$ als fkt. der Achsenrichtung vom Schwerpunkt SP aus auf, dann erhält man den sogenannten Trägheitsellipsoid des Köpers.

Hauptträgheitsachesen Die Achsen des Trägheitsellipsoids heißen Hauptträgheitsachsen

Drehimpuls $\vec{L} = I\vec{\omega}$

- I ist ein Tensor, d. h. das der Drehimpuls in eine Andere Richtung als $\vec{\omega}$ zeigen kann.

Rotationsellipsoid Rotationssymetrsischer Ellipsoid

9.2 Kreiselbewegung

Figurenachse C geometrisch ausgezeichnete Symmetrieachse (gleichzeitig Achse mit größtem I)

Momenteane Drehachse $\vec{\omega}$

Drehimpulsachse Richtung von $\vec{L}$ im Raum

Stoß eines Kreisels $\vec{\omega}$ und C Achsen bewegen sich mit festem Winkelabstand um raumfeste Drehachse $\vec{L}$

Nutation tritt beim Kräftefreien Kreisel auf, wenn Drehachse und Figurenachse *nicht* zusammenfallen. Drehachse und Figurenachse rotieren um $\vec{L}$. Der Drehimpuls bleibt erhalten.

- Torkelbewegung. Wenn $\vec{\omega}$ und C nicht zusammenfallen, machten $\vec{\omega}$ und C Bewegungen auch Kegelmantel mit $\vec{L}$ als Mittelachse

Tabelle 3: Vergleich von Linearer- und Rotationsbewegung

	Linear	Einheit	Rotation	Einheit	
Ort	x	m	φ	rad	Winkel
Geschw.	$v = \dot{x}$	$\frac{m}{s}$	$\omega = \dot{\varphi}$	$\frac{\text{rad}}{s}$	Winkelgeschw.
Beschl.	$a = \dot{v} = \ddot{x}$	$\frac{m}{s^2}$	$\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$	$\frac{\text{rad}}{s^2}$	Winkelbesch.
Masse	m	kg	$I = \int r^2 dm$	$m^2 kg$	Trägheitsmom.
Kraft	$F = ma = \dot{P}$	$N = \frac{kgm}{s^2}$	$T = I\dot{\omega} = \dot{L} = \vec{r} \times \vec{F}$	$J = Nm$	Drehmoment
Impuls	$P = mv$	$Ns = \frac{kgm}{s}$	$L = I\omega = \vec{r} \times \vec{p}$	$\frac{kgm^2}{s}$	Drehimpuls
Kin. En.	$W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	$J = Nm$	$W_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$	$J = Nm$	Rot. En.

- Da $\vec{\omega}$ Achse nun veschoben ist, und $\vec{L}$ aber gleich bleibt, muss es noch eine weitere Rotation geben, die sich mit $\vec{\omega}$ überlagert, damit $\vec{L}$ erhalten bleibt.

Präzession tritt auf, wenn bei beweglicher Drehachse ein Drehmoment angreift. Der Kreisel weicht dann in senkrechter Richtung aus. Der Drehimpuls bleibt *nicht* erhalten. Der Betrag von $\vec{L}$ bleibt zwar erhalten, aber seine Richtung ändert sich.

- Es wird ein Kreisel auf eine Balkenwaage quer aufgesteckt, das ganze ausbalanciert, und in Rotation versetzt. Wenn diese Wage nun mit einem Gewicht belastet wird, beginnt die Wage sich nur ein wenig zu neigen, und das Ganze Rechtwinklig zur Gewichtskraft und Rotationsachse sich zu drehen. Dieses nennt man Präzession

Präzessionsfrequenz $\dot{\varphi} = \omega_p = \frac{T}{L \sin\alpha} = \frac{T}{I \cdot \omega \cdot \sin\alpha}$

- α Winkel zwischen $\vec{T}$ und $\vec{L}$
- Der Betrag von $\vec{T}$ senkrecht zu $\vec{L}$ ändert nur dessen Richtung, aber nicht den Betrag von $\vec{L}$
- Der Betrag von $\vec{T}$ parallel zu $\vec{L}$ ändert nur Betrag von $\vec{L}$, aber nicht dessen Richtung
- Die Drehbewegung erfolgt in Richtung $\vec{T}$
- Beim Kinderkreisel gilt $\omega = \frac{rmg}{L}$
  - unabhängig vom Neigungswinkel α
  - r höhe des Schwerpunks über dem Boden

10 Scheinkräfte in rotierenden Bezugssystemen

Scheinkräfte In beschleunigten Bezugssystemen haben wir zusätzliche Kräfte: Scheinkräfte

10.1 Zentrifugalkraft

Wir beobachten einen Gegenstand m der kreisförmig mit $\vec{\omega}$ im Abstand r vom Drehzentrum rotiert. Als ruhender Beobachter sehen wir $F_z = m\omega^2 r$ hält m auf Kreisbahn.

Ein mitrotierender Beobachter m ruht im rotierenden Koordinatensystem, aber es zieht eine nach außen gerichtete Kraft $F_z = m\omega^2 r$ an ihm, die Zentrifugalkraft.

$$\vec{F}_z = m\left[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]\right]$$

- F_z wirkt immer so, dass das Trägheitsmoment maximal ist.
- Wirkt zusätzlich zu der Correoliskraft

10.2 Coreoliskraft

Problem Wie bewegt sich ein wagen auf einem Rotierenden Plattenteller, wenn er sich (durch ein nachlassendes Seil) weiter vom Zentrum entfernt. $L = mr^2\omega$ bleibt bei Zentralkraft erhalten. r kleiner $\Rightarrow \omega > \omega_0$

$$F_c = 2m\omega_0 v_r$$

$$\vec{F}_c = -2m\left[\vec{\omega} \times \vec{v}\right]$$

- v_r Radialgeschwindigkeit von m auf dem Teller
- Wirkt *zusätzlich* zu der Zentrifugalkraft
- In Vektorgleichung wird das komplette $\vec{v}$ genommen, und nicht nur dessen Radialkomponente! Die Tangentialkomponente ist zusammen mit der Zentrifugalkraft (von $\vec{\omega}$) und zu $\vec{v}$ zugehörigen Zentripetalkraft die Gesamt auf die Masse wirkende Radialkraft.
- Wirkung von $\vec{F}_c$: "gerade" radiale Bewegung auf einer rotierenden Kreisscheibe (externer Beobachter) ist in Wirklichkeit eine gekrümmte Kurve (Beobachter auf Kreisscheibe).

10.3 Foucaultsches Pendel

Pendel auf Erdoberfläche aufgehangen. Wenn sich die Erde unter dem Pendel wegdreht, versucht es seine Pendelachse beizubehalten. d.h. es es hat eine Rotatiosgeschwindigkeit der achse von $\omega_0 = \frac{2\pi}{24h} \cdot \sin(\alpha)$ (α ist Breitengrad der Erde).

Index