Formelsammlung
Rechenmethoden zur Physik

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 25.01.2006 - Version: 1.0.3
Erhältlich unter http://privat.macrolab.de

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung "Rechenmethoden zur Physik" von Prof. Dr. Jochen Wambach an der Technischen Universität Darmstadt im Wintersemester 2004/05.

Inhaltsverzeichnis

1 Vektoren und Felder im Raum

1.1 Definitionen

Einsteinsche Summenkonvention Wenn ein Indize mehr als einmal vorkommt, ist darüber zu Summieren

Kronnecker Symbol $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

- Wenn in einer Summe mehrere verschiedene Inizes auftauchen, und ein δ Symbol, so kann man diese Indizes gleichsetzen, und das Symbol streichen

Epsilon-Tensor

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls}(i,j,k)\text{eine zykl. Vertausch. von (1,2,3)} \\ -1 & \text{falls}(i,j,k)\text{eine zykl. Vertausch. von (3,2,1)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji}$
- $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$
- $\sum_{ij} a_i a_j \varepsilon_{ijk} = 0$
- $\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$
- $\sum_{ij} \varepsilon_{ijm}\varepsilon_{ijn} = \delta_{mn}$
- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$
- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm} = \delta_{km}$

1.2 Vektoren im Raum

Einen Punkt im Raum kann man definieren durch den zu ihm vom Koordinaten Ursprung zeigenden Vektor $\vec{r}$. Dieser ist definiert über seine Komponenten $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$. Er lässt sich allerdings auch zerlegen in seine Länge $|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$ und in seine Richtung $\vec{e}_r = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r}$ (Ein Vektor der Ränge 1 der in die gleiche Richtung zeigt). Er lässt sich auch bezüglich der Einheitsvektoren angeben: $\vec{r} = r_i\vec{e}_i = r_x\vec{e}_x + r_z\vec{e}_z + r_z\vec{e}_z$

- Addition von Vektoren:
  ist Kommutativ (Vertauschbarkeit der beteiligten Vektoren)
  $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$
- Multiplikation mit einem Skalar:
  $\lambda\vec{r} = \begin{pmatrix} \lambda r_x \\ \lambda r_y \\ \lambda r_z \end{pmatrix}$
- Länge (Norm) eines Vektors
  $|\vec{r}| = \sqrt{\sum r_i^2} = \sqrt{\vec{r}\vec{r}}$
  - $|-\vec{r}| = |\vec{r}|$
  - Dreiecksungleichung
    $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$
  - Vektoren der Länge 1 werden als Einheitsvektoren bezeichnet, man erhält sie durch Renormierung von belibigen Vektoren: $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- Nullvektor
  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.2.1 Skalarmultiplikation

$$\vec{a}\vec{b} = a_i b_i$$

- $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\varphi$
  - wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander stehen gilt: $\vec{a}\vec{b} = 0$
  - $\vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{ij}$
  - ist Kommutativ
    $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
  - ist Distributiv
    $\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
  - $\left(+, \lambda, \vec{a}\vec{b}\right)$ bildet Körper

1.2.2 Vektorprodukt

Auch Kreuzprodukt genannt.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = a_i b_j \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

- $\vec{c}$ steht senkrecht auf der Ebene die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird
  $\vec{c}\vec{a} = 0$
  $\vec{c}\vec{b} = 0$
- Länge von $|\vec{c}|$ist so groß wie der Flächeninhalt des Parallelogrammes zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$
  $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$
- Richtung von $\vec{c}$ mit Hilfe der Rechten Hand Regel ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem)
- $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k$
- so nur im 3-dim Raum definiert
- $\vec{a}||\vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- Vektorprodukt ist Antikommutativ
  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Distributivgesetz
  $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- Ist *nicht* Assoziativ
  $\left(\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{b}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}\right)$

- Verhalten zur Skalaren Multiplikation
  $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$
- "bac-cab" Regel
  $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\,(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right)$

1.2.3 Spatprodukt

$$\begin{aligned}
\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] &= \vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\\
&= |\vec{a}|\left|\vec{b}\right||\vec{c}|\sin\alpha\left(\vec{b},\vec{c}\right)\cos\beta\left(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\right)\\
&= \varepsilon_{ijk}a_kb_ic_j\\
&= a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2\\
&\quad -a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3
\end{aligned}$$

- berechnet das Volumen des Spats das von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannt wird
- ist $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0$ sind $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear abhängig (liegen in einer Ebene)

1.3 Elemente der Vektoranalysis

1.3.1 Differentiation eines Vektors nach einem Skalar

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\frac{da_i}{dt}\vec{e}_i$$

- wenn nach der Zeit (t) Abgeleitet wird, kann man dies auch so abkürzen: $\frac{d\vec{a}}{dt}=\dot{\vec{a}}$
- Produktregel
  $\vec{c}\,(t)=a\,(t)\,\vec{b}\,(t)$
  $\dot{\vec{c}}\,(t)=\dot{a}\vec{b}\,(t)+a\,(t)\,\dot{\vec{b}}\,(t)$

1.3.2 Vektorielle differentiation eines Skalarfeldes

Totales Differential:

$$\begin{aligned}
\phi\,(\vec{x}) &= \phi\,(x_1,\ldots,x_n)\\
d\phi\,(\vec{x}) &= \frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx_i\\
&= \left(\vec{\nabla}\varphi\right)d\vec{r}
\end{aligned}$$

- Errechnen einer Ableitung eines Vektorfeldes: $\frac{d\vec{\phi}(\vec{x})}{dx_k}=\frac{\partial\vec{\phi}(\vec{x})}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx_k}$
- $\frac{\partial}{\partial x}$ ist die *partielle Ableitung* nach x, wobei alle anderen Variablen als Konstanten betrachtet werden.
- Satz von Schwarz
  Wenn die gemischten partiellen Ableitungen (bis zur zweiten) von einer Funktion stetig sind in einem Bereich G. Dann gilt das die Reihenfolge der Ableitungen im Innern vertauscht werden kann. Wenn dieses gilt, existiert das totale Differential.
- Flächen für die $\phi\,(\vec{x})=c$ sind werden *Äquipotentialflächen* bezeichnet.

Das *Nabla*-Symbol

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i\\
d\vec{r} &= dx_i\vec{e}_i
\end{aligned}$$

- Hiermit lässt sich das totale differential auch als Skalarprodukt schreiben, indem man die zu differenzierende Funktion vorher mit $\vec{\nabla}$ und anschließenden mit $d\vec{r}$ Multipliziert.
- $\left|\vec{\nabla}\phi\right|=\sqrt{\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2}$

Gradient Der *Gradient* von ϕ lässt sich wie folgt berechnen

$$\mathrm{grad}\,(\phi)=\vec{\nabla}\phi$$

- Einheitsvektor in Richtung des Gradienten $\vec{e}_{\vec{\nabla}\phi}=\frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|}$
- Der Gradient steht Senkrecht auf den *Äquipotentialflächen* von ϕ. $\vec{e}_{\nabla\phi}\perp\vec{e}_{dr}$
  - Äquipotentialflächen: Menge aller Punkte für die $\phi\,(\vec{r})=const=c$
  - Eine Linie die senkrecht durch alle Äquipotentialflächen geht nennt sich *Strömungslinie*
- Der Gradient macht aus einem Skalar- eine Vektorfeld
- $\vec{\nabla}f\,(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}$
- $\vec{\nabla}\vec{r}=3$ (bei 3-dim Raum)
  entsprich der Anzahl der *Freiheitsgerade* von $\vec{r}$

Richtungsableitung Die *Richtungsableitung* gibt die Steigung an, die man im Punkt $\vec{r}$ enthält, wenn man ich Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}$ laufen würde.

$$\frac{d\phi}{d\vec{e}}=\left(\vec{\nabla}\phi\right)\vec{e}$$

Laplace - Operator Der *Laplaceoperator* ist ein skalaerer Differentialoperator (er ordnet einem Vektor einen Vektor, und einem Skalar einen Skalar zu). Er ist wie folgt definiert:

$$\triangle = \vec{\nabla}\vec{\nabla} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

- $\triangle$ ist invariant (verändet sich nicht) unter Koordinatenspigelung (= Paritätsinvariant)
- $\triangle\vec{A} = \vec{\nabla} * \left(\vec{\nabla} * \vec{A}\right) - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$
- $\triangle f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r \cdot f(r))$

1.3.3 Differentiation von Vektorfeldern

Divergenz Die *Divergenz* eines Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r}) = (v_x(\vec{r}), v_y(\vec{r}), v_z(\vec{r}))$ ist wie folgt definiert ($*$= Skalarprodukt):

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla} * \vec{v}(\vec{r}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

- Auf Reihenfolge der Schreibweise achten.
- Felder mit $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ nennen sich:
  - Divergenzfrei
  - Quellenfrei
  - Konvervative Kraftfelder (mit Energieerhaltung / Unabhängigkeit des Weges)

Rotation Die *Rotation* eines Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r}) = (v_x(\vec{r}), v_y(\vec{r}), v_z(\vec{r}))$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{v}) &= \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) \\ &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\vec{e}_k \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Auf Reihenfolge der Schreibweise achten.
- Felder mit $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 0$ nennen sich:
  - Rotationsfrei
  - Wirbelfrei
  - konservative Felder

Rechenregeln

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi)) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\phi\right) = \triangle\phi = \left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\right)\phi$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\phi)) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\phi\right) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\left(\vec{A}\right)\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) = 0$$

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\left(\vec{A}\right)\right) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) - \triangle\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} * \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla} * \left(\vec{\nabla} * \vec{A}\right) - \triangle\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}(\phi\psi) = \psi\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\psi$$

$$\vec{\nabla}\left(\phi\vec{\nabla}\psi\right) = \left(\vec{\nabla}\phi\right)\left(\vec{\nabla}\psi\right) + \phi\triangle\psi$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\phi\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}\phi\right) \times \vec{A} + \phi\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) - \vec{A}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) &= \vec{A}\left(\vec{\nabla}\vec{B}\right) - \left(\vec{A}\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \\ &\quad \vec{B}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) - \left(\vec{B}\vec{\nabla}\right)\vec{A}\end{aligned}$$

1.4 Krummlinige Koordinatensysteme

1.4.1 Allgemeine Koordinatensysteme

Jeder Punkt im $\mathbb{R}^3$ ist durch Angabe von 3 Zahlen u_1, u_2, u_3 festgelegt. Insbesondere durch die *karthesischen Koordinaten* x, y, z. Es gibt also eine eineindeutige (bijektive) Zuordnung.

$$(x, y, z) \leftrightarrow (u_1, u_2, u_3)$$

$$\begin{aligned}u_1 &= u_1(x, y, z) \\ u_2 &= u_2(x, y, z) \\ u_3 &= u_3(x, y, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= x(u_1, u_2, u_3) \\ y &= y(u_1, u_2, u_3) \\ z &= z(u_1, u_2, u_3)\end{aligned}$$

Ortsvektor Der Ortsvektor hat nun folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\vec{r}(u_1, u_2, u_3) &= x(u_1, u_2, u_3)\vec{e}_x + \\ &\quad y(u_1, u_2, u_3)\vec{e}_y + \\ &\quad z(u_1, u_2, u_3)\vec{e}_z\end{aligned}$$

Koordinatenlinien Unter *Koordinatenlinien* versteht man Linien, durch den Raum, bei denen jeweis alle Variablen bis auf u_i bestgehalten werden. Bei *krummlinigen Koordinaten* ist mindestens eine solche Linie keine Gerade. Diese schneiden sich im Punkt $P\,(c_1, c_2, c_3)$:

$$\begin{aligned} L_1 &\rightarrow \vec{r}\,(u_1, u_2 = c_2, u_3 = c_3) \\ L_2 &\rightarrow \vec{r}\,(u_1 = c_1, u_2, u_3 = c_3) \\ L_3 &\rightarrow \vec{r}\,(u_1 = c_1, u_2 = c_2, u_3) \end{aligned}$$

Koordinatenflächen Genauso lassen sich *Koordinatenflächene* definieren. Auch diese schneiden sich im Punkt $P\,(c_1, c_2, c_3)$:

$$\begin{aligned} F_1 &\rightarrow \vec{r}\,(u_1 = c_1, u_2, u_3) \\ F_2 &\rightarrow \vec{r}\,(u_1, u_2 = c_2, u_3) \\ F_3 &\rightarrow \vec{r}\,(u_1, u_2, u_3 = c_3) \end{aligned}$$

1.4.2 Festlegung der Einheitsvektoren

Für das neue Koordinatensystem lassen sich Einheitsvektoren errechen. Diese sind aber im Allgemeinen nicht im Raum konstant, sondern verändern sich je nach Lage im Raum. Sie werden daher als *mitgeführtes Dreibein* bezeichnen. Sie lassen sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{u_i} &= \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right|} = h_i^{-1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \\ h_i &= \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_i}\right)^2} \end{aligned}$$

h_i wird als *Maßfaktor* bezeichnet.

- Dieses Konstruktionsverfahren liefert immer eine Orthonormalbasis (Alle Vektoren haben die Länge 1 und sie stehen paarweise aufeinander senkrecht)
- Es gilt generell: $\dot{\vec{e}}_i \perp \vec{e}_i$

1.4.3 Zylinderkoordinaten

Hier werden die Punkte im Raum über die 3 Variablen ϱ, φ, z. φ ist dabei der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Projektion von $\vec{r}$ auf die x, y Ebene und ϱ die Länge vom dieses Projezierten Vektors. z ist identisch mit dem z aus den Karthesischen Koordinaten. L_1, L_3 sind Geraden und L_2 ist ein Kreis. F_1 ist ein Kreiszylinder und F_2, F_3 sind Ebenen. Diese Variablen sind in Ihrem *Wertebereich* auf $\varrho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $-\infty \leq z \leq \infty$ beschränkt. Der Ursprung $(\vec{0})$ ist in diesen Koordinaten nicht eindeutig bestimmt.

Umrechnungsvorschriften

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi \\ y &= \varrho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned}$$

Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \vec{e}_\varrho &= \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\varphi\vec{e}_\varrho - \sin\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin\varphi\vec{e}_\varrho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned}$$

- bilden Orthonormalbasis

Ortsvektor

$$\vec{r} = \varrho\vec{e}_\varrho + z\vec{e}_z$$

Maßfaktor

$$\begin{aligned} h_\varrho &= 1 \\ h_\varphi &= \varrho \\ h_z &= 1 \end{aligned}$$

Ableitungen der Einheistvektoren

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_\varrho &= \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\vec{e}_\varrho \\ \dot{\vec{e}}_z &= 0 \end{aligned}$$

Differentiation

$$\begin{aligned} ds_\varrho &= d\varrho \\ ds_\varphi &= \varrho d_\varphi \\ ds_z &= dz \end{aligned}$$

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d_\varphi^2 + dz^2$$

$$\begin{aligned} d\vec{\sigma}_{\varphi z} &= -d\vec{\sigma}_{z\varphi} = \varrho\, d\varphi\, dz\, \vec{e}_\varrho \\ d\vec{\sigma}_{z\varrho} &= -d\vec{\sigma}_{\varrho z} = dz\, d\varrho\, \vec{e}_\varphi \\ d\vec{\sigma}_{\varrho\varphi} &= -d\vec{\sigma}_{\varphi\varrho} = \varrho\, d\varrho\, d\varphi\, \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$dV = \varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz$$

1.4.4 Kugelkoordinaten

Hier werden die Punkte im Raum über die 3 Variablen r, φ, θ. φ ist dabei der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Projektion von $\vec{r}$ auf die x, y Ebene. θ ist der Winkel zwischen $\vec{r}$ und der positiven z-Achse. r ist die Länge des Vektros $\vec{r}$. L_1 ist eine Gerade und $L_2.L_3$ sind (halb) Kreise. F_1 ist ein Kugeloberfläche, F_2 ist eine Halbebenen und F_3 ein Trichter. Diese Variablen sind in Ihrem *Wertebereich* auf $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $0 \leq r \leq \infty$ beschränkt. Die gesamte z-Achse ist in Ihren Koordinaten nicht eindeutig bestimmst.

Umrechnungsvorschriften

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{z}\right) \end{aligned}$$

Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\varphi\cos\theta\vec{e}_r + \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_\theta - \sin\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_r + \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_\theta + \cos\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z &= \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

- bilden Orthonormalbasis

Ortsvektor

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

Maßfaktor

$$\begin{aligned} h_r &= 1 \\ h_\varphi &= r\sin\theta \\ h_\theta &= r \end{aligned}$$

Ableitung der Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right) \end{aligned}$$

Differentiation

$$\begin{aligned} ds_r &= dr \\ ds_\theta &= r d_\theta \\ ds_\varphi &= r\sin\theta d_\varphi \end{aligned}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d_\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

$$\begin{aligned} d\vec{\sigma}_{\varphi\theta} &= -d\vec{\sigma}_{\theta\varphi} = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \vec{e}_r \\ d\vec{\sigma}_{r\varphi} &= -d\vec{\sigma}_{\varphi r} = r\,\sin\theta\, dr\, d\varphi\, \vec{e}_\theta \\ d\vec{\sigma}_{\theta r} &= -d\vec{\sigma}_{r\theta} = r\, dr\, d\theta\, \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\begin{aligned} \triangle &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \\ &\quad \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \\ &\quad \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \end{aligned}$$

1.4.5 Parabolische Koordinaten

Diese Koordinaten haben den Vorteil, das die Koordinaten linien für ξ und η Parabeln beschreiben, deren Brennpunkt im Ursprung des Systems liegt. Die Koordinatenlinen für φ sind Kreise.

Umrechnungsvorschriften

$$\begin{aligned} x &= \xi\eta\cos\varphi \\ y &= \xi\eta\sin\varphi \\ z &= \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \eta^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \xi &= \sqrt{r+z} \\ \eta &= \sqrt{r-z} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \vec{e}_\xi &= \frac{1}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}\left(\eta\cos\varphi\vec{e}_x + \eta\sin\varphi\vec{e}_y + \xi\vec{e}_z\right) \\ \vec{e}_\eta &= \frac{1}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}\left(\xi\cos\varphi\vec{e}_x + \xi\sin\varphi\vec{e}_y - \eta\vec{e}_z\right) \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{k} &= \frac{1}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}\left(\eta\vec{e}_\xi + \xi\vec{e}_\eta\right) \\
\vec{e}_x &= \cos\varphi\vec{k} - \sin\varphi\vec{e}_\varphi \\
\vec{e}_y &= \sin\varphi\vec{k} + \cos\varphi\vec{e}_\varphi \\
\vec{e}_z &= \frac{1}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}\left(\xi\vec{e}_\xi - \eta\vec{e}_\eta\right)
\end{aligned}$$

- bilden Orthonormalbasis

Ortsvektor

$$\vec{r} = \frac{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}{2}\left(\xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta\right)$$

Maßfaktor

$$\begin{aligned}
h_\xi &= \sqrt{\eta^2+\xi^2} \\
h_\eta &= \sqrt{\eta^2+\xi^2} \\
h_\varphi &= \xi\eta
\end{aligned}$$

1.5 Differentiation in krummlinigen Koordinatensystemen

Im Folgende werden prinzipiell 3-dimensionale Koordinatensysteme der Form:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\left(u_1,u_2,u_3\right) &= x\left(u_1,u_2,u_3\right)\vec{e}_x + \\
&\quad y\left(u_1,u_2,u_3\right)\vec{e}_y + \\
&\quad z\left(u_1,u_2,u_3\right)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

betrachtet.

1.5.1 totales Differential

$$\begin{aligned}
d\vec{r} &= \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}du_3 \\
&= \sum_{i=1}^{3} h_i\vec{e}_{u_i}du_i \\
&= \sum_{i=1}^{3} ds_i\vec{e}_{u_i}
\end{aligned}$$

Dabei haben die einzelnen partiellen Ableitungen die Form:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u_i}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u_i}\vec{e}_z = h_i\left(\vec{r}\right)\vec{e}_{u_i}$$

Maßfaktor Dies lässt sich vereinfachen durch die Einbeziehung des Maßfaktors h_i. Dieser fällt für gewöhnlich bei der Herleitung (siehe 1.4.2 auf Seite 5) der Einheitsvektoren ab.

$$h_i\left(\vec{r}\right) = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\right|$$

Infinitesimales Bogenmaß

$$ds_i = h_i\left(\vec{r}\right)du_i$$

1.5.2 Raumkurve

Metrischer Tensor

$$g_{ij} = h_ih_j\vec{e}_{u_i}\vec{e}_{u_j}$$

- Wird vorallem gebraucht, wenn $\vec{e}_{u_i}\vec{e}_{u_j} \neq \delta_{ij}$ ist, d.h. man sich nicht in einem Orthonormalsystem befindet.
- Im *Orthonormalsystem* gilt $g_{ij} = \delta_{ij}h_ih_j$
- Dies ist eine 3×3 Matrix

Bogenelement

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{3} h_ih_j\vec{e}_{u_i}\vec{e}_{u_j}du_idu_j = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}du_jdu_j$$

Flächenelement

$$d\vec{\sigma}_{ij} = d\vec{r}_i\times d\vec{r}_j = \left(\vec{e}_{u_i}\times\vec{e}_{u_j}\right)ds_ids_j$$

Volumentelement

$$\begin{aligned}
dV &= d\vec{r}_1\left(d\vec{r}_2\times d\vec{r}_3\right) \\
&= ds_1ds_2ds_3\vec{e}_{u_1}\left(\vec{e}_{u_2}\times\vec{e}_{u_3}\right)
\end{aligned}$$

Orthogonal krummlinige Koordinaten (OKK)

- Bogenelement $ds^2 = \sum_{i=1}^{3} ds_i^2$
- Flächenelement $d\vec{\sigma_{ij}} = ds_ids_j\sum_k\varepsilon_{ijk}\vec{e}_{u_k}$
- Volumenelement $dV = ds_1ds_2ds_3$

1.5.3 Gradient & Co. für OKK

Folgende Formeln gelten NUR für OKK's!!!

Sei $\phi\left(u_1,u_2,u_3\right)$ ein Skalarfeld, und $\vec{V}\left(u_1,u_2,u_3\right) = \sum_{i=1}^{3} V_i\left(u_1,u_2,u_3\right)\vec{e}_{u_i}$ ein Vektorfeld.

Gradient

$$\vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial s_i}\vec{e_{u_i}} = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\vec{e_{u_i}}$$

Rotation

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial (h_i V_j)}{\partial u_i} \vec{e}_k$$

- $\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{e}_{u_i}}{h_i}\right) = 0$
- Sei $\vec{V}$ ein Vektorfeld, und u, v belibige krummlinige Koordinaten
  $\left(\vec{e}_u \frac{\partial}{\partial v}\right) \times \vec{V} = \vec{e}_u \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial v}$

Divergenz

$$\vec{\nabla}\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} \frac{\partial (p_i v_i)}{\partial s_i} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (p_i v_i)}{\partial u_i}$$

- $p_i = \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i}$
- $\vec{\nabla} \times \left(u_m \vec{\nabla} u_n\right) = \sum_k \varepsilon_{mnk} \frac{\vec{e}_{u_k}}{h_m h_n}$

Laplace Operator

$$\begin{aligned} \triangle\phi &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} \frac{\partial}{\partial s_i} \left(p_i \frac{\partial \phi}{\partial s_i}\right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{p_i}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u_i}\right) \end{aligned}$$

1.6 Kurven-, Oberflächen- und Raumintegrale

1.6.1 Vektorielle Kurvenintegrale

$$\begin{aligned} \int_C d\vec{r}\, \phi(x,y,z) &= \vec{e}_x \int_C dx\, \phi(x,y,z) + \\ &\quad \vec{e}_y \int_C dy\, \phi(x,y,z) + \\ &\quad \vec{e}_z \int_C dz\, \phi(x,y,z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_C &= \int_C d\vec{r}\, \vec{V}(\vec{r}) \\ &\quad \int_C dx\, V_x + \int_C dy\, V_y + \int_C dz\, V_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C \left(d\vec{r} \times \vec{V}(\vec{r})\right) &= \vec{e}_x \int_C (dyV_z - dzV_y) + \\ &\quad \vec{e}_y \int_C (dzV_x - dxV_z) + \\ &\quad \vec{e}_z \int_C (dxV_y - dyV_x) \end{aligned}$$

- Der Indize C bedeutet, dass entlang der Kurve C Integiert wird.
- Hierbei sind x, y, z durch Funktionen aneinander gebunden, damit die Integrale vollständig definiert sind. Dies wird z.B. mit einer Parameterisierung erreicht.
- Die Integrale sind im Allgemeinen abhängig vom Integrationsweg
- W_C ist die *Arbeit* die entlang des Weges C verrichtet werden muss.
  - Ist *wegunabhängig* für $\vec{V}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi$.
    $W_C = \int_C d\vec{r}\, \vec{V}(\vec{r}) = -\int_C d\phi = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2)$

1.6.2 Parameterisierung der Bahnkurve

Menge aller Punkte zwischen α_1 und α_2 gibt die *Bahnkurve* $\vec{r}(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$. Hierbei ist α der *Bahnparameter* der die Bahnkurve parameterisiert.

Spezielle Bahnparameter sind s die *Bogenlänge*, und t die Zeit.

$$\int d\vec{r}\, \vec{V}(\vec{r}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \left(V_x \frac{dx}{d\alpha} + V_y \frac{dy}{d\alpha} + V_z \frac{dz}{d\alpha}\right)$$

- Der Wert des Integrals hängt nich von der Parameterisierung ab, solange sie den *gleichen* Weg beschreiben

1.6.3 Weglänge einer Bahnkurve

Sei $\vec{r}(\alpha)$ eine Parameterisierung des zu messenden Weges. Die Weglänge ergibt sich dann für $\alpha_1 < \alpha_2$

$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \left|\frac{d\vec{r}}{d\alpha}\right|$$

1.6.4 Flächenintegrale

Hierzu benötigt man eine Funktion $s(x,y,z) = 0$ die eine Fläche beschreibt. Wenn sich diese nach $z = z_s(x,y)$ umstellen lässt z, kann man das Flächenintegral über der Funktion $\phi(x,y,z)$ wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} I_S &= \int dy \int dx\, \phi(x,y,z_S(x,y)) \\ &= \int_S dydx \frac{\vec{n}\vec{V}}{\vec{n}\vec{e}_z} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

- Diese Integral Wird auch der *Fluss* von $\vec{V}$durch s genannt
- Bei Integration in anderen Koordinatensystemen nach ds_u integrieren

- Berechet die "Summe" aller Werte auf einer Fläche
- Der Wert des Integrals hängt ab von der Wahl der Fläche ab
- Das oben aufgeführte ist ein Spezialfall einer allgemeinen Parameterisierung: $\vec{r} = \vec{r}\,(\alpha, \beta)$
- Reduzierung auf Integral über z.B. x, y mit:
  1. $S\,(x, y, z) = k$ Funktion die die Fläche / Ebene beschreibt.
  2. $S\,(x, y, z) = k$ auflösen nach $z\,(x, y)$ und $\vec{V} = (x, y, z\,(x, y))$
  3. $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} S}{|\vec{\nabla} S|} = \dots$
  4. $\vec{n}\vec{V} = \dots$
  5. $\vec{n}\vec{e}_z = \dots$
  6. Integral $I_S = \int_S dydx \frac{\vec{n}\vec{V}}{\vec{n}\vec{e}_z}\Big|_{z=z(x,y)} = \dots$ berechnen

1.6.5 Vektorelle Flächenintegrale

Hierzu benötigt man eine Konvention, die der orientierten Flächen: Der Vektor $d\vec{\sigma} = d\sigma\vec{n}$ steht senkrecht auf der Oberfläche und zeigt immer nach Außen. Je nachem ob wo mam sich auf der Koordinatenachse befindet gilt:

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= \pm dy\,dz \\ d\sigma_y &= \pm dx\,dz \\ d\sigma_z &= \pm dx\,dy \end{aligned}$$

Sei $\varphi\,(\vec{r})$ ein Skalar- und $\vec{V}\,(\vec{r}) = \vec{e}_x V_x + \vec{e}_y V_y + \vec{e}_z V_z$ ein Vektorfeld. Es lassen sich nun folgende Integrale definieren:

$$\begin{aligned} \int_S d\vec{\sigma}\phi\,(\vec{r}) &= \vec{e}_x \int d\sigma_x\phi + \vec{e}_y \int d\sigma_y\phi \\ &\quad +\vec{e}_z \int d\sigma_z\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_S d\vec{\sigma}\vec{V}\,(\vec{r}) &= \int_S d\sigma_x V_x + \int_S d\sigma_y V_y \\ &\quad + \int_S d\sigma_z V_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_S \left(d\vec{\sigma} \times \vec{V}\,(\vec{r})\right) &= \vec{e}_k \int_S \left(\varepsilon_{ijk} d\sigma_i V_j\right) \vec{e}_x \\ &= \int_S \left(d\sigma_y V_z - d\sigma_z V_y\right) + \dots \end{aligned}$$

- Es gilt $d\vec{\sigma} = |d\vec{\sigma}|\,\vec{e}_n$. Falls eine Komponente von $d\vec{\sigma}$ und auch $\vec{e}_n$ bekannt ist lässt sichhieraus der Betrag und damit das geamte $d\vec{\sigma}$ rekonstruieren. Z.B. $d\sigma_z = dx\,dy$ und $\vec{e}_n = \dots$.

1.6.6 Oberflächenberechnung

Die Oberläche F einer Funktion S lässt sich mit Hilfe von vektoriellen Flächenintegralen sehr leicht bestimmen. Hierzu muss ein $d\vec{\sigma}_F$ gefunden werden, welches auf der gesamten Fläche rechtwiklig steht und dessen länge der größe der Flächenelemente entspricht. Dieses $d\vec{\sigma}_F$ lässt sich auf verschiedene Arten gewinnen. Entweder man nutzt ein bereits bekanntes Koordinatensystem, falls die gewünschte Fläche dort einer Koordinatenfläche (bzw. einem Teil davon) entspricht. Oder man definiert sich entsprechend ein neues. Die Fläche ist hiermit nun

$$A_F = \int_S |d\vec{\sigma}_F|$$

- Es lässt sich auch ein neues $d\vec{\sigma}_F$ wie folgt definieren. Die Fläche F lasse sich in der Form

  $$F : u_1, u_2 \mapsto \vec{r}_F\,(u_1, u_2) = \vec{r}\,(u_1, u_2, u_3 = c_3)$$

  mit $c_3 =$ konstant schreiben. Dann gilt:

  $$d\vec{\sigma}_F \pm \frac{\partial \vec{r}_F}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}_F}{\partial u_2} du_1 du_2$$

  Wobei das Vorzeichen so gewählt werden muss, das es auf geschlossenen Flächen nach außen zeigt.

1.6.7 Volumenintegrale

Hierbei wird ein Dreifachintegral über alle drei Raumkoordinaten bestimmt. Die Grenzen können dabei im allgemeinen voneinander abhängen.

$$\int_V dV\,\varrho = \iiint_V dxdydz\,\varrho\,(x, y, z)$$

$$\int_V dv\,\vec{V}\,(\vec{r}) = \vec{e}_x \int_V dV\,V_x + \vec{e}_y \int_V dV\,V_y + \vec{e}_z \int_V dV\,V_z$$

- Die abhängigen Grenzen können z.B. so behandelt werden:

  $$\iiint_V \dots = \int_{x=a}^{b} dx \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \dots$$

- Für belibige Koordinatensysteme gilt außer den vorher genannten Beziehungen:

  $$dV = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right) \right| du_1 du_2 du_3$$

1.6.8 Integralsätze

- All diese Sätze gelten nur, wenn es auf beiden Seiten möglich ist, divergenten Punkten auszuweichen. Wenn z.B. eine Fläche immer durch einen Punkt läuft, der divergiert egal wie man sie legt, dann gelten all diese Sätze nicht.

- Die Keise um die Integrale bedeuten, dass über geschlossene Flächen / Linien integriert werden muss.
- Bei Kruvenumläufen wird gegen den Uhrzeigersinn positiv gezählt. Es gilt (*Orientierung* der *Zirkulatuion*):
$\oint_C = - \oint_{-C}$

Gauß'scher Satz $\oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma}\vec{j} = \int_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla}\vec{j}$

- Integral der Quelldichte ist gleich dem Fluss durch die Randflächen

Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\varrho\vec{V}\right) = 0$

- ϱ ist die Dichte des Mediums
- $\vec{V}$ ist die Strömungsgeschdingkeit
- Gilt nur für quellenfreie Felder. Bedeutet, dass die Summe aus Abnahme von z.B. Masse in einer Region und der Fluss durch dessen Begrenzung 0 ergibt.

Green'scher Integralsatz $\oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{V}} dv\vec{\nabla}$

- Dies sind Differentialoperatoren. Sie wirken auf die hinter ihnen stehende Gleichung genau gleich
- z.B. $\oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \times \vec{V}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} dv\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})$

Green'scher Satz $\oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma}\left(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u\right) = \int_{\mathcal{V}} dV\left(u\triangle v - v\triangle u\right)$

Satz von Stokes $\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r}\vec{V} = \int_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma}\left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right)$

- $\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r}\phi(\vec{r}) = \int_{\mathcal{S}}\left(d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}\right)\phi(\vec{r})$
- $\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \times \vec{V}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{S}}\left(d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}\right) \times \vec{V}(\vec{r})$

Potentialfeld $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$

- auch konservatives Feld genannt.

Oberfläche $\mathcal{S}$ ist Symbol für geschlossene Fläche

Volumen $\mathcal{V}$ ist Symbol für zusammenhängendes Volumen

Begrenzung $\partial\mathcal{S}$ $\partial\mathcal{V}$ Begrenzungskurve / Fläche einer Oberfläche / Volumen

2 Differentialgleichungen

2.1 Typen von Differentialgleichungen (DGL)

Ziel Gleichung für $y(x)$ finden. Also ist die Lösung keine Zahl oder Vektor, sondern eine Gleichung.

gewöhnliche DGL Funktionen mit einer Variablen

- *ODE* im Englischen (Ordonary Differential Equilitation)

partielle DGL Funktionen mehrerer Variablen

- *PODE*im Englischen (Partial Ordonary Differential Equilitation)

DGL n-ter Ordnung

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

- dies ist die implizite Form. Falls es sich explizit auflösen lässt $y = G\left(x, y', \ldots, y^{(n)}\right)$.

allgemeine Lösung bis auf (Integrations-) Konstanten bestimmt

spezielle Lösung vollständig bestimmt

- Dafür mussen bei einer Gleichung n-ter Ordnung n Randbedingungen festgelegt werden. Dafür bestimme zu einem gewählten x_0 passend:
$y_0 = y(x_0), y_0' = y'(x_0), \ldots, y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0)$

Lineare DGL (LDGL)
$y^{(n)}(x)+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+f_1(x)y(x)=g(x)$

- es tauchen die Ableitungen von $y^{(k)}$ und y selber nur in ihrere ersten Potzen auf, und es gibt keine Mischterme wie z.B. $y^{(k)} \cdot y^{(l)}$

homogene LDGL $g(x) = 0$
inhomogene LDGL $g(x) \neq 0$

2.2 Lösungsverfahren für LGDL 1. Ordnung

Trennung der Variablen

Lösungsweg für einige einfache Typen von Differentialgleichungen 1. Ordnung

- schreibe y' in der Form $\frac{dy}{dx}$
- fasse x und y als "unabhängige Variablen" auf
- y und dy auf eine Seite, x und dx auf die andere
- Integriere auf beiden Seiten
- Löse nach y auf

2.2.1 Lösen von inhomogenen Gleichungen

Die Lösung einer LDGL 1. Ordnung setzt sich zusammen aus einer allg. Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

1. Allg. Lösung der homogenen LDGL
   $y' + f(x)\,y = 0$
   $y_H(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} d\tilde{x} f(\tilde{x})}$

2. Ansatz
   $y_I(x) = \alpha(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} d\tilde{x} f(\tilde{x})}$
   Randbedingung $\alpha(x_0) = y_0$
   $A = \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} f(\tilde{x})$
   $y_I = \alpha(x)\, e^{-A(x)}$

3. Bestimmung von $\alpha(x)$
   $y_I'(x) = \alpha'(x)\, e^{-A(x)} - \alpha(x)\, f(x)\, e^{-A(x)}$
   $\alpha'(x) = g(x)\, e^{A(x)}$
   $\alpha(x) = \alpha(x_0) + \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} g(\tilde{x})\, e^{A(x)}$
   $y(x) = y_0 e^{-A(x)} + \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} g(\tilde{x})\, e^{A(\tilde{x})-A(x)}$

2.2.2 Vereinfachen durch Substitution

Durch geschicktes wählen von $u = f(y)$ lassen sich inhomogene Differentialgleichungen oder komplizierte homogene DGL manchmal auf eine einfache Form zurückführen.

2.3 Lösungsverfahren für LDGL 2. Ordnung

2.3.1 Eigenschaften der Lösungen

Wir betrachten die Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordung der Form:

$$y^{(n)} + c_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + c_1(x)\, y' + c_0(x)\, y = 0$$

- Ist $y(x)$ Lösung, dann auch $\lambda \cdot y(x)$
- Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen, dann auch $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$
- Wenn $u(x)$ und $v(x)$ Lösungen sind, dann auch $y(x) = u(x) + iv(x)$
- Die Menge der Lösungen bilden einen Untervektorraum der Komplexwertigen Funktionen
- Die Lösungsraum einer LDGL n-ter Ordnung ist n-Dimensional

2.3.2 Unabhängigkeit der Lösung

n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ einer LDGL n-ter Ordnung bilden genau dann eine Basis, wenn sie linear unabhängig sind. Dazu muss ihre *Wronski-Determinante* von 0 verschieden sein

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

- bei $y'' + py' + qy = 0$ gilt
  $W' + pW = 0$
  $W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} d\tilde{x} p(\tilde{x})}$

2.3.3 Lösungsansatz

Der Allgemeine Lösungsansatz lautet

$$y = Ce^{\lambda x}$$

was bei

$$y^{(n)} + c_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + c_1(x)\, y' + c_0(x)\, y = 0$$

zu dem *Charakteristischen Polynom*

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_0 = 0$$

fürt, was gelöst werden muss. Das heißt in folgende Form gebracht:

$$a(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

2.3.4 Lösen mit Hilfe von differential Operatoren

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dx} \quad \mathcal{D}y = \frac{dy}{dx}$$

Hiermit lässt sich eine LDGN n-ter Ordnung auch wie folgt notieren:

$$\left(\mathcal{D}^n + c_{n-1}D^{n-1} + \ldots + c_0\right) y = 0$$

Auch diese Polynom lässt sich Faktorisieren

$$(\mathcal{D} - \alpha_1)(\mathcal{D} - \alpha_2)\ldots(\mathcal{D} - \alpha_n)\, y = 0$$

Die n Lösungen sind dann damit: $(i \in \{1, \ldots, n\})$ (falls $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$)

$$y_i = e^{\alpha_i x}$$

2.3.5 Bestimmung der Zweiten Lösung aus der Wronskideterminante und der ersten Lösung

$$w(x) = \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} \frac{W(\tilde{x})}{y_1^2(\tilde{x})} = W(x_0) \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{\tilde{x}} d\tilde{\tilde{x}} p(\tilde{\tilde{x}})}}{y_1^2(\tilde{x})}$$

$$y_2 = y_1(x)\, w(x) + cy_1(x)$$

2.3.6 Lösen einer inhomogenen DGL 2. Ordnung

Die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = g(x)$$

besteht aus der Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung (also mit $g(x) = 0$) plus einer speziellen Lösung.

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$

Dieses $y_p(x)$ kann in folgender Form dargestellt werden:

$$y_p(x) = v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x)$$

v_1 und v_2 müssen folgenden Gleichungen (Bestimmungsgleichungen) gehorchen:

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = g(x)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} v_1(x) &= -\int_{x_0}^{x} d\tilde{x} \frac{y_2(\tilde{x})\,g(\tilde{x})}{W(\tilde{x})} \\ v_2(x) &= \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} \frac{y_1(\tilde{x})\,g(\tilde{x})}{W(\tilde{x})} \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen $v_1(x_0) = v_2(x_0) = 0$.

2.4 Lösungen

2.4.1 Allgemeine Lösungen einfacher Gleichungen

- $y' + ay = 0$
  $y(x) = Ce^{-ax}$ bzw. $y(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}$
- $y' + f(x)\,y = 0$
  $y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} d\tilde{x} f(\tilde{x})}$
- $y' + ay = b$
  $y(x) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right) e^{-ax} + \frac{b}{a}$ bzw. wenn $y(x_0) = y_0 = 0$ dann $y(x) = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-ax}\right)$
- $y' + f(x)\,y = g(x)$
  $A = \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} f(\tilde{x})$
  $y(x) = y_0 e^{-A(x)} + \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} g(\tilde{x})\,e^{A(\tilde{x})-A(x)}$
- $y'' + ay' + by = 0$
  $\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$
  - $\frac{a^2}{4} > b$ (Kriechfall)
    $y(x) = C_1 e^{\lambda_1} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
  - $\frac{a^2}{4} = b$ (aperiodische Grenzfall)
    $y(x) = (C_1 + C_2 x)\,e^{\lambda}$
  - $\frac{a^2}{4} < b$ (Schwingfall)
    $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$
    $y(x) = (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(x))\,e^{\alpha x}$
    * $y(x) = A \sin(\beta x + \phi)\,e^{\alpha x}$
      $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$
      $\phi = \arctan\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$
- $y'' + ay' + by = g(x)$
  Eine der folgenden y_p auswählen und zusammen mit der Lösung des entsprechenden homogenen Systems (y_h - siehe oben) einsetzen und Konstanten bestimmen:
  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$
  - $g(x)$ Polynom in x ($P_n(x)$)

    $$y_p(x) = \begin{cases} Q_n(x) & b \neq 0 \\ xQ_n(x) & a \neq 0, b = 0 \\ x^2 Q_n(x) & a = b = 0 \end{cases}$$

  - $g(x)$ Exponentialfunktion $g(x) = e^{\lambda x}$

    $$y_p(x) = \begin{cases} Ce^{\lambda x} & \lambda \neq \lambda_1, \lambda \neq \lambda_2 \\ Cxe^{\lambda x} & \lambda = \lambda_1 \text{ XOR } \lambda = \lambda_2 \\ Cx^2 e^{\lambda x} & \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

  - $g(x) = a_1 \sin(\beta x) + a_2 \cos(\beta x)$

    $$y_p(x) = \begin{cases} c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x) & \beta \neq \omega \\ x\,(c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x)) & \beta = \omega \end{cases}$$

Index