

Formelsammlung

Theorie klassischer Teilchen und Felder I

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 25.02.2006 - Version: 1.0.0

ERHÄLTlich UNTER [HTTP://PRIVAT.MACROLAB.DE](http://privat.macrolab.de)

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung “Theorie klassischer Teilchen und Felder I” von Prof. Dr. Jochen Wambach an der Technischen Universität Darmstadt im Wintersemester 2005/06.

Die folgende Formelsammlung steht zum kostenlosen Download zur Verfügung. Das Urheberrecht und sonstige Rechte an dem Text verbleiben beim Verfasser, der keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit der Inhalte übernehmen kann.

Inhaltsverzeichnis

<p>1 Newtonsche Mechanik 1</p> <p>1.1 Die Bogenlänge als Bahnparameter . . . 1</p> <p>1.2 Kinematik, Newtonsches Gesetze, Mehrteilchensysteme 2</p> <p>1.3 Zweiteilchensysteme 2</p> <p>1.4 Relativbewegungen 3</p> <p>1.5 Stoss 3</p> <p> 1.5.1 Elastischer Stoss eines ruhenden Teilchens 3</p> <p> 1.5.2 Streuung durch Potential im Schwerpunktsystem 4</p> <p> 1.5.3 Steuerung harte Kugeln 4</p> <p> 1.5.4 Rutherford Streuung 4</p> <p>1.6 Tensorbegriff 5</p> <p>1.7 Mechanik des “starren Körpers” 5</p> <p> 1.7.1 Drehimpulssatz 5</p> <p> 1.7.2 Physikalisches Pendel 5</p> <p> 1.7.3 Analogie: Rotation & Translation 6</p> <p> 1.7.4 Kreisel 6</p> <p> 1.7.5 Dynamik des starren Körpers . . 7</p> <p>2 Lagrange Mechanik 8</p> <p>2.1 Begriffsbildung 8</p> <p>2.2 Lagrange 1. Art 8</p> <p>2.3 d’Alembertsches Prinzip und Lagrange 2ter Art 9</p>	<p>3 Hamiltonsche Formulierung der Mechanik 9</p> <p>3.1 Variationsproblem 9</p> <p>3.2 Das Hamiltonische Prinzip 10</p> <p> 3.2.1 Invarianzen und Erhaltungssätze 10</p> <p> 3.2.2 Hamilton Funktion 10</p> <p> 3.2.3 Legendre Transformation 10</p> <p> 3.2.4 Hamiltonische Bewegungsgleichungen 11</p> <p> 3.2.5 Poisson-Klammern 11</p> <p>4 Elektrostatik 11</p> <p>4.1 Diracsche δ-Funktion 11</p> <p> 4.1.1 Eindimensional 11</p> <p> 4.1.2 Mehrdimensional 11</p> <p>4.2 Grundlagen 12</p> <p>4.3 Feldverhalten an Grenzflächen 12</p> <p>4.4 Feldenergie 13</p> <p>4.5 Multipolentwicklung 13</p> <p>4.6 Wechselwirkungsenergie im externen Potential 14</p> <p>4.7 Randwertprobleme in der Elektrostatik . 14</p> <p>4.8 Orthogonale Funktionen 15</p> <p> 4.8.1 Fourierreihe 15</p> <p> 4.8.2 Kugelflächenfunktionen 15</p> <p>4.9 Spärliche Multipolmomente 16</p> <p>5 Magnetostatik 16</p> <p>1 Newtonsche Mechanik</p> <p>1.1 Die Bogenlänge als Bahnparameter</p> <p>Charakterisierung der “Kurvenform”</p> <p>Bogenlänge $s = s(t) = \int_{t_0}^t dt' \vec{v}(t')$</p>
---	---

Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{s}\vec{e}_t$

- $\vec{e}_t = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{v}}{s} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{e}_t) = \ddot{s}\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{e}_n$

- $\dot{\vec{e}}_t \perp \vec{e}_t$
- $|\dot{\vec{e}}_t| = \left| \frac{d\vec{e}_t}{ds} \right| \dot{s} = \frac{1}{\rho}\dot{s}$
- $\dot{\vec{e}}_t = \frac{1}{\rho}\dot{s}\vec{e}_n$
- $\vec{e}_n = \frac{\dot{\vec{e}}_t}{|\dot{\vec{e}}_t|}$

Krümmungsradius $\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{a} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|^3}$

Krümmung $\chi = \frac{1}{\rho}$

Windung der Kurve $\frac{1}{\tau} = \frac{\vec{v}(\vec{a} \times \dot{\vec{a}})}{(\vec{v} \times \vec{a})^2}$

- auch: Torsion der Kurve

begleitendes Dreibein $(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_m)$

- $\vec{e}_m = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$

Frenet-Matrix \mathcal{F}

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{e}_t \\ \vec{e}_n \\ \vec{e}_m \end{pmatrix} = \mathcal{F} \begin{pmatrix} \vec{e}_t \\ \vec{e}_n \\ \vec{e}_m \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{1}{\rho} & 0 & \frac{1}{\tau} \\ 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1 + ds\mathcal{F}) \begin{pmatrix} \vec{e}_t \\ \vec{e}_n \\ \vec{e}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_t + d\vec{e}_t \\ \vec{e}_n + d\vec{e}_n \\ \vec{e}_m + d\vec{e}_m \end{pmatrix}$$

- $(1 + ds\mathcal{F})$ beschreibt eine *Rotation*.
- $(1 + ds\mathcal{F})$ ist eine Orthogonale Matrix
 $(1 + ds\mathcal{F})^{-1} = (1 + ds\mathcal{F})^T = (1 - ds\mathcal{F})$

Hauptsatz der Kurventheorie $\vec{x}(s) = \int_0^s ds' \frac{d\vec{x}}{ds'} = \int_0^s ds' \vec{e}_t(s')$

1.2 Kinematik, Newtonsches Gesetze, Mehrteilchensysteme

Siehe mein Skript: "Einführung in die Theoretische Physik"

Bewegungsgleichung im 1-dimensionalen

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

- Festlegung:
 - + Teilchen bewegt sich vom Ursprung weg
 - Teilchen bewegt sich zum Ursprung hin
- Bewegungsbereich ist der Bereich in dem die Wurzel reell bleibt.

zeitlicher Mittelwert einer Funktion $f(t)$ ist

$$\overline{f(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} dx f(x)$$

Virialsatz $2\overline{T} = -\overline{\vec{F}\vec{x}}$

- $\overline{\vec{F}\vec{x}}$ ist ein *Virial*

Konservatives Feld $\overline{T} = \frac{1}{2} \frac{dV}{dr} r$

$$\rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

Potenzgesetz $\frac{dV}{dr} = \frac{n+1}{r}V$

$$\rightarrow \text{mit } \vec{F} = \alpha r^n \vec{e}_r$$

$$\rightarrow \text{mit } n = -2 \text{ gilt } \overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{V}$$

$$\rightarrow \text{mit } n = 1 \text{ gilt } \overline{T} = \overline{V}$$

$$\rightarrow \text{mit } n \neq -1 \text{ gilt } \overline{T} = \frac{n+1}{2}\overline{V}$$

1.3 Zweiteilchensysteme

gebundene Systeme $E < 0$ sind beschränkt in der Bewegung

offene Systeme $E \geq 0$ sind unbeschränkt in der Bewegung

Kepler Problem $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} = V(r_{12})$

- $r_{12} = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$
- es gelten nur innere Kräfte
- $m_1 = \infty, m_2 = m$
- $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
- $\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_r$
- $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$
- $t - t_0 = \pm \int_{r(t_0)}^{r(t)} dr' \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r'))}}$
- $\Delta\varphi = 2 \frac{l_0}{\sqrt{2m}} \int_{r(t_0)}^{r(t)} dr' \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r'))}}$
 - geschlossene Bahn für $n\Delta\varphi = m2\pi$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
- $V_{eff}(r) = V(r) + \frac{l_0^2}{2mr^2}$
 - E kann nicht kleiner werden als V_{eff} . Für den Fall der Gleichheit beschreibt die Bahn einen Kreis.

- $\vec{l}_0 = mr^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z = l_0 \vec{e}_z$

Kepler mit newtonscher Gravitation

- $V(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} = -\frac{\chi}{r}$

-

$$\begin{aligned} \cos(\varphi - \varphi_0) &= \frac{\frac{1}{r} - \frac{m\chi}{l_0^2}}{\sqrt{\frac{m^2 \chi^2}{l_0^4} + \frac{2mE}{l_0^2}}} \\ &= \frac{\frac{P}{r} - 1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

- $p = \frac{l_0^2}{m\chi}$

- $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2l_0^2 E}{m\chi^2}}$

- $V_{eff}^{min} = -\frac{m\chi^2}{2l_0^2}$

- Kegelschnittgleichung $r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)}$

→ $\varepsilon = 0$ Kreis mit $E = V_{eff}$

→ $\varepsilon > 1$ $E > 0$ Hyperbel

→ $\varepsilon = 1$ $E = 0$ Parabel

→ $\varepsilon < 1$ $E < 0$ Ellipse

* Halbachsen a, b

* $a = \frac{\chi}{|E|}$

* $b = \frac{l_0^2}{2|E|m}$

* drittes Keplersches Gesetz

$$T = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{GM}}$$

1.4 Relativbewegungen

Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$

Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$

reduzierte Masse $\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$

geschlossenes System $\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}$

- \vec{r} Vektor von Teilchen 2 nach 1

- $F_{ex}^{(i)} = 0$

- $\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \text{const}$

- $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}}{M} t$

- $T_R = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$

- $T_r = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$

1.5 Stoss

Impulserhaltung $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2, \vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2$

- gilt im Schwerpunktsystem

Energieerhaltung $\frac{\vec{p}_1}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2}{2m_2} = \frac{\vec{p}'_1}{2m_1} + \frac{\vec{p}'_2}{2m_2} + Q$

- Q ist die im Stossprozess "verlorene" Energie

- gilt sowohl im Schwerpunkt als auch im Laborsystem mit dem selben Q

-

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2\mu} = \frac{p_1'^2}{2\mu} + Q$$

$$\frac{\vec{p}_2^2}{2\mu} = \frac{p_2'^2}{2\mu} + Q$$

Elastisch $Q = 0$

Inelastisch $Q > 0$

Umwandlung von Energie $Q < 0$

Richtung ist im Schwerpunktsystem nur soweit festgelegt, als das sie sowohl vor, als auch nach dem Stoss entgegengesetzt sind.

1.5.1 Elastischer Stoss eines ruhenden Teilchens

Begebenheiten $\vec{p}_1 = \vec{P}, \vec{p}_2 = \vec{0}, Q = 0$

Streuwinkel $\tan \theta = \frac{\sin \tilde{\theta}}{\cos \theta + \gamma}$

- $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$

- $\tilde{\theta}$ Winkel um den der Impulsvektor \vec{p}_1 im Schwerpunktsystem verdreht wurde durch den Stoss

- θ Winkel um den der Impulsvektor \vec{p}_1 im Laborsystem verdreht wurde durch den Stoss

Vorwärtsstreuung $m_1 > m_2, \gamma > 1$

- $\sin(\theta_{max}) = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{\gamma} < 1$

- θ_{max} ist der maximale Winkel um den der Vektor \vec{p}_1 im Laborsystem verdreht werden kann

- Streuung erfolgt in einem Kegel mit diesem Öffnungswinkel

Beliebige Streuung $m_2 > m_1, \gamma < 1$

- alle Winkel sind möglich

- z.B. auch Reflexion

Identische Massen $m_1 = m_2, \gamma = 1$

- Winkel zwischen \vec{p}'_1 und \vec{p}'_2 ist nach dem Stoss immer 90°
- Ausnahmen:
 - Teilchen Tauschen die Rollen, d.h. Teilchen 1 bleibt liegen und Teilchen 2 fliegt in die gleiche Richtung mit der gleichen Geschwindigkeit weiter
 - Teilchen 1 wechselwirkt einfach nicht und es fliegt ungestört weiter / kein stoss / kein Rollentausch
- $\theta_{max} = \pm 180^\circ$

Energietransfer $\eta = \frac{T'_2}{T_1} = 4 \frac{\mu}{M} = 4 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$

- T_1 kinetische Energie von Teilchen 1 vor dem Stoss
- T'_2 kinetische Energie von Teilchen 2 nach dem Stoss
- $m_1 = m_2 \rightarrow \eta = 1$

1.5.2 Streuung durch Potential im Schwerpunktsystem

Streuzentrum ist Ausgangspunkt eines Potentialfeldes $V(\vec{r}) = V(r)$ das nur vom Abstand abhängt. Dieses verursacht die Ablenkung des annahenden Teilchens

Stossparameter b

- gibt an, um welche Distanz das Teilchen bei un-abgelenkter Bahn am Streuzentrum vorbeifliegen würde
- db ist eine Infinitesimale Änderung von b
 - dies bewirkt eine Änderung $d\Omega$ im Raumwinkel Ω der vom Strahl durchflogen wird
 - es bewirkt eine Vergrößerung der Eintrefffläche um $d\sigma$ (=Kreis mit dem Radius $b + db$ - Kreis mit dem Radius b)
- $\frac{db}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\mu E}} \frac{dl}{d\theta}$

Strahl von Teilchen

- Alle haben gleiche Masse μ
- Alle haben gleiche kinetische Energie $\Rightarrow \vec{p}$ ist gleich

Strahlintensität $n = \frac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Flächenelement} \cdot \text{Zeit}}$

Gestreute Teilchen $\frac{dN}{\text{Zahl der gestreuten Teilchen in } d\Omega \cdot \text{Zeit}} =$

Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = -\frac{b}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta} = \frac{l}{2\mu E} \left| \frac{dl}{d\theta} \right| > 0$

- $d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi b db$
- Hängt für $V(\vec{r}) = V(r)$ nur von θ ab!
- Raumwinkel $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$
- $\sigma_{total} = \int d\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{d\sigma}{d\theta}(\theta)$

Ablenkwinkel $\theta = \pi - 2 \int_{r_{min}}^\infty dr \frac{b}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}} = \pi - \frac{2l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^\infty dr \frac{1}{r^2 \sqrt{E - \frac{l^2}{2mr^2} - V(r)}}$

- Ablenkwinkel des Strahls von negativ zu positiv unendlich (in der Zeit t) gemessen.

Drehimpuls $l = b\sqrt{2\mu E}$

Energie $E = \frac{\mu}{2} v_\infty^2$

1.5.3 Steuerung harte Kugeln

Potential $V(r) = \begin{cases} 0 & r > R \\ \infty & r \leq R \end{cases}$

isotrope Streuung $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{R^2}{4}$

- isotrop \Leftrightarrow hängt nicht mehr von θ ab
- $\sigma_{total} = \pi R^2$

1.5.4 Rutherford Streuung

Potential $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$

- z.B. Gravitation oder Coulomb

Stossparameter $b(\theta) = \frac{\kappa}{2E} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \left(\frac{\kappa}{2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

- gilt im Schwerpunktsystem
- $\sigma_{total} = \infty$ ist ein Problem, tritt aber in der Realität nicht auf, da Ladungen immer abgeschirmt sind

$$V(r) = \frac{\kappa e^{-\alpha r}}{r}$$

- Im Laborsystem

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L}(\theta_L) = \frac{d\sigma}{d\Omega_s}(\theta_s) \frac{\sin\theta_s}{\sin\theta_L} \frac{d\theta_s}{d\theta_L}$$

- Transformation der Winkel siehe 1.5.1 auf der vorherigen Seite.

Spezialfall $m_1 < m_2$

- $\tan \theta_L \sim \tan \theta_s \Rightarrow \theta_L \approx \theta_s$

Spezialfall $m_1 = m_2$

- $\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_s}{\cos \theta_s + 1} = \tan \frac{\theta_s}{2} \Rightarrow \theta_L = \frac{1}{2} \theta_s$
- $\frac{d\sigma}{d\Omega_L}(\theta_L) = 4 \cos \theta_L \frac{d\sigma}{d\Omega_s}(2\theta_L)$

1.6 Tensorbegriff

- Erweiterung des Vektorbegriffs $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ n -tupel von Zahlen
- n^k : Tupel von Zahlen
 - n^0 : Skalar
 - n^1 : Vektor

$$x'_i = \sum_j D_{ij} x_j$$

* Drehungen

→ n^2 : Matrix

$$F'_{ij} = \sum_{l,m} D_{il} D_{jm} F_{lm}$$

* Basistransformation einer Matrix

- F_{i_1, \dots, i_k} mit $i_j = 1, \dots, n$
- Dieser Satz von Zahlen ist ein *Tensor* k -ter Stufe falls
 - jeder der k -Indizes sich unter Drehung im \mathbb{R}^n wie ein Vektor verhält

1.7 Mechanik des "starren Körpers"

Freiheitsgerade 6

- 3 für Translation
- 3 für Rotationen

Kreisel

- 3 Rotationsfreiheitsgrade

Rotator

- 1 Rotationsfreiheitsgrad
- Achse ist fest
- o.B.d.A um die z Achse: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

Rotationsenergie $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$

Trägheitsmoment $J = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$

→ Kontinuierlich:

$$J = \int_V dx dy dz \rho(x, y, z) (x^2 + y^2)$$

Drehimpuls $L = J\omega$

Lösung $t - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{J}(E - V(\varphi))}}$

1.7.1 Drehimpulsatz

Drehimpuls $L_\omega = \vec{L} \vec{e}_\omega = \sum_i m_i (\vec{e}_\omega \times \vec{x}_i)^2 \omega = J\omega = J\dot{\varphi}$

- \vec{L} ist i.a. nicht in Richtung von $\vec{\omega}$
- $\vec{e}_\omega = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$

Trägheitsmoment $J = \sum_i m_i (\vec{e}_\omega \times \vec{x}_i)^2$

- Kontinuierlich

$$J = \int_V dx dy dz \rho(\vec{x}) (\vec{e}_\omega \times \vec{x})^2$$

Drehmoment $\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{ext}$

- $\frac{dL_\omega}{dt} = J\dot{\varphi} = N_\omega = \sum_i (\vec{x}_i \times \vec{F}_i^{ext}) \cdot \vec{e}_\omega$

1.7.2 Physikalisches Pendel

Aufbau

- Körper mit Schwerpunkt S
- Externe Kraft zeigt in x Richtung

$$\vec{F}^{ext} = \begin{pmatrix} m_i g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Drehmoment $N_\omega = J\dot{\varphi} = -\sum_i m_i y_i g = -MgR_y$

Schwerpunkt $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$

Ansatz $J\ddot{\varphi} + RMg \sin \varphi = 0$

- Vergleich mit Mathematischem Pendel

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

- $l = \frac{J}{MR}$

Energiesatz $V = \sum_i V_i = -g \sum_i m_i x_i = -MgR \cos \varphi$

- mit $V_i = -mgx_i$
- Summe über die potentiellen Energien
- $E = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - MgR \cos \varphi = \text{const}$
- Ableitung ergibt $J \ddot{\varphi} + MRg \sin \varphi = 0$

1.7.3 Analogie: Rotation & Translation

Siehe Tabelle 1 auf der nächsten Seite.

1.7.4 Kreisel

Eigenschaften 1 Punkt fest, 3 Freiheitsgrade

Koordinatensysteme

- Ortsfestes System K
 - $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
 - $\vec{v}_n = \vec{\omega} \times \vec{x}'_n$
 - $\vec{a}_n = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}'_n + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}'_n)$
- Im Schwerpunkt verankertes am Körper festes System K' (*Körperfest*)
 - $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$
 - Versatz dieses Koordinatensystem \vec{r}_0 gegenüber K
 - * konstant, da dieser Punkt verankert
 - Rotation dieses Koordinatensystem $\vec{\omega}$ gegenüber K
 - $\vec{v}'_n = 0$
 - $\vec{a}'_n = 0$

Kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_n |\vec{v}_n|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_n m_n (\vec{\omega} \times \vec{x}'_n)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_n m_n \left(|\vec{\omega}|^2 |\vec{x}'_n|^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{x}'_n)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\sum_{n=1}^N m_n (|\vec{x}'_n|^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{n\alpha} x'_{n\beta}) \right) \omega_\alpha \omega_\beta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 J_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{J} \vec{\omega} \end{aligned}$$

- $|\vec{\omega} \times \vec{x}'_n|^2 = |\vec{\omega}|^2 |\vec{x}'_n|^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{x}'_n)^2$

- $T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{J} \vec{\omega} = \text{const}$ beschreibt einen Ellipsoiden, den *Energieellipsoiden*

- $\vec{\nabla}_\omega (T_{rot}) = \underline{J} \vec{\omega}$

Trägheitstensor

$$\begin{aligned} J &= J^T \\ &= \sum_n m_n (|\vec{x}_n| \underline{1} - \vec{x}_n \vec{x}_n^T) \\ &= \sum_n m_n \begin{pmatrix} y_n^2 + z_n^2 & -x_n y_n & -x_n z_n \\ -x_n y_n & x_n^2 + z_n^2 & -y_n z_n \\ -x_n z_n & -y_n z_n & x_n^2 + y_n^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int_V dV \varrho(\vec{r}) (y^2 + z^2) & -\int_V dV \varrho(\vec{r}) xy & -\int_V dV \varrho(\vec{r}) xz \\ -\int_V dV \varrho(\vec{r}) xy & \int_V dV \varrho(\vec{r}) (x^2 + z^2) & -\int_V dV \varrho(\vec{r}) yz \\ -\int_V dV \varrho(\vec{r}) xz & -\int_V dV \varrho(\vec{r}) yz & \int_V dV \varrho(\vec{r}) (x^2 + y^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $\underline{1}$ ist hier die Einheitsmatrix
- x, y, z sind Koordinaten bzgl. Drehpunkt!!
- $J_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^N m_n (|\vec{x}'_n|^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{n\alpha} x'_{n\beta})$ ist eine Matrix.
- J lässt sich Diagonalisieren:

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{J}_{33} \end{pmatrix}$$

→ die Einträge auf der Diagonalen sind die Eigenwerte von J .

→ die Eigenvektoren von J bilden eine Basis. Die Eigenwerte sind das jeweilige Trägheitsmoment um die Richtung der Eigenvektoren.

→ Die Eigenvektoren sind die *Hauptträgheitsachsen*

- $T_{rot} = \frac{1}{2} \left(\tilde{J}_{11} \omega_a^2 + \tilde{J}_{22} \omega_b^2 + \tilde{J}_{33} \omega_c^2 \right)$
- $\underline{1} = \frac{1}{J_e} \vec{e}^T \underline{J} \vec{e}$ beschreibt den *Trägheitsellipsoiden*. Dies entspricht einem normierten Energieellipsoiden. (J_e ist Trägheitsmoment in Richtung J_e mit $|\vec{e}| = 1$)
- $J_{\alpha\beta} = 0$ (mit $\alpha \neq \beta$) falls ϱ Symmetrisch bezüglich der α oder β Achse

Steinerscher-Satz $J_{ik} = M (R^2 \delta_{ik} - R_i R_k) + J_{ik}^*$

- $J = M \left(\vec{R}^2 \underline{1} - \vec{R} \vec{R}^T \right) + J^*$
- J_{ik}^* ist Trägheitstensor im Schwerpunkt

Drehimpuls $\vec{L} = \underline{J} \vec{\omega}$

- i.a. $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$
- Falls $\vec{\omega}'$ in Richtung der Hauptträgheitsachsen (Eigenvektoren von \underline{J}) zeigt ist $\vec{L} \parallel \vec{\omega}'$.

Tabelle 1: Analogie Rotation & Translation

	Teilchen	Rotator	
Ort	x	φ	Winkel
Masse	m	J	Trägheitsmoment
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	$\omega = \dot{\varphi}$	Winkelgeschwindigkeit
Impuls	$m\dot{x} = mv$	$L_\omega = J\omega = J\dot{\varphi}$	Drehimpuls
Kraft	$m\ddot{x} = F$	N_ω^{ext}	Drehmoment
Kinetische Energie	$T = \frac{1}{2}mv^2$	$T = \frac{1}{2}m\omega^2$	Kinetische Energie

1.7.5 Dynamik des starren Körpers

- Bewegung des Bezugspunktes.
 - Ortsfest.
 - Im Ursprung des Koordinatensystems
- Rotation um Bezugspunkt
- Körperfestes Koordinatensystem K'
- Koordinatenachsen in Richtung der Hauptträgheitsachsen
- $L = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$

Eulerschen Kreiselgleichungen

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 + C\omega_2\omega_3 - B\omega_2\omega_3 &= N'_1 \\ B\dot{\omega}_2 + A\omega_1\omega_3 - C\omega_1\omega_3 &= N'_2 \\ C\dot{\omega}_3 + B\omega_2\omega_1 - A\omega_2\omega_1 &= N'_3 \end{aligned}$$

- äquivalent zu

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{L}' = \vec{N}'$$

Kräftefreier Kreisel $\vec{N} = 0$

- $2E = 2T_{rot} = \vec{\omega}^T \underline{J} \vec{\omega} = const$
 - Energieellipsoid
- $\vec{L}' \cdot \vec{L}' = \sum_{i=1}^3 L_i'^2 = const$
 - Kugel mit Drehimpulserhaltung
- Diese beiden Bedingungen müssen erhalten sein. D.h. die Lösung liegt im Schnitt von Kugel mit Ellipsoid
- Schnittlinien sind Kurven die die Hauptträgheitsachsen umschließen, allerdings nur für Achsen mit größten und kleinsten Trägheitsmoment
 - Rotation von $\vec{\omega}$ um diese Achsen ist stabil (beschränkte Reaktion) bei kleinen Störungen.
- Rotation um Achse mit mittleren Trägheitsmoment: Bahn führt beliebig weit weg

symmetrischer Kreisel $A = B \neq C$

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 + (C - A)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ A\dot{\omega}_1 + (C - A)\omega_1\omega_3 &= 0 \\ C\dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned}$$

- $\omega_3 = const$
- die \vec{e}'_z Achse um die dieser Körper symmetrisch ist, wird Figurenache genannt. analog für eine andere Achse.
- $\omega_\perp = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = const$
- $\gamma = \frac{C-A}{A}\omega_3$
-

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= a \cos(\gamma t) + b \sin(\gamma t) \\ \omega_2(t) &= a \sin(\gamma t) - b \cos(\gamma t) \\ \omega_3(t) &= c \end{aligned}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstant

→ Dies beschreibt einen Kegel. Den *Gangpolkegel*.

- mit Anfangsbedingungen $t = 0 \Rightarrow \omega_1 \neq 0, \omega_2 = 0$
 $a = \omega_\perp, b = 0$

$$\vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_\perp \cos(\gamma t) \\ \omega_\perp \sin(\gamma t) \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

-

$$\begin{aligned} \vec{L}' &= \begin{pmatrix} A\omega_1 \\ B\omega_2 \\ C\omega_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A\omega_\perp \cos(\gamma t) \\ B\omega_\perp \sin(\gamma t) \\ C\omega_3 \end{pmatrix} \\ &= A\vec{\omega} + (C - A)\omega_3 \vec{e}_z \end{aligned}$$

→ $\vec{L}', \vec{\omega}, \vec{e}_3$ liegen immer in einer Ebene!

- * für $A > C$ liegt der Gangpolkegel innerhalb des \vec{L} Kegels
- * für $A < C$ liegt der Gangpolkegel außerhalb des \vec{L} Kegels

→ $\vec{L}' \neq 0$ weil wir uns nicht in ortsfesten Koordinaten befinden. In diesen würde $\vec{L} = 0$ gelten

- diese Beschreibungen gelten so nur im Körperfesten System mit den Hauptträgheitsachsen als Korrdinatenachsen

in **Raumfesten Koordinaten** sehen diese Gebilde anders aus. Hierzu siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Präzession>.

- Der Gangpolkegel rollt auf einem sogenannten *Rastpolkegel* mit der Kreisfrequenz $-\gamma$ um die \vec{L} Achse ab. Dabei bewegt sich der $\vec{\omega}$ Vektor auf dem sogenannten *Nutationskegel*. Für $A = B > C$ wird von aussen, für $A = B < C$ von innen abgerollt.
- $\vec{\omega}_3 \frac{C-A}{A} = \gamma$

2 Lagrange Mechanik

2.1 Begriffsbildung

- Neue Formulierung der Mechanik
- besonders effizient für eingeschränkte Bewegung
 - Fläche
 - Kurve
- Im Allgemeinen muss man für N Massenpunkte $3N$ gekoppelte DGL's lösen

Zwangsbedingungen Bedingungen die die Bewegung der Teilchen einschränken

- geometrische Betrachtungen

Zwangskräfte Sind Kräfte die die Zwangsbedingungen bewirken

- z.B. Auflage Kraft, Faden Spannung, ...
- auch *verlorene Kräfte* genannt

holonome Zwangsbedingungen lassen sich schreiben als Gleichung der Form

$$f(\vec{x}, \dots, \vec{x}_N, t) = 0$$

- man kann maximal $3N$ unabhängige f_i haben

skleronom nennt sich f falls

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

→ skleronom = hart

rheonom anderenfalls, also

$$\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$$

nicht-holonom nennen sich Zwangsbedingungen die sich nicht als ein solches f schreiben lassen

- z.B. Beschränkungen des Ortes mit \leq

generalisierte Koordinaten q_i

- Anzahl = $s = 3N - k$
- N Anzahl der Teilchen
- k Anzahl der Zwangsbedingungen
- s Anzahl der noch wirklich frei wählbaren Koordinaten, den generalisierten Koordinaten

2.2 Lagrange 1. Art

$$m\ddot{x}^i = \vec{F}^i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{\nabla}_i f_j$$

- $f_i(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^N, t) = 0$ mit $i = 1, \dots, k$ den Zwangsbedingungen
- so erhält man $3N + k$ Bestimmungsgleichungen und kann somit dies für die $3N + k$ Unbekannten lösen.
- λ_i sind die zusätzlichen k Unbekannten.
- $\vec{\nabla}_i$ Ableitungen nach den Koordinaten des i -ten Teilchens

Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = \vec{F} + \vec{F}' = \vec{F} + \lambda \vec{\nabla} f$

- $\vec{F}' = \lambda \vec{\nabla} f$ ist die einschränkende Zwangskraft die aus der Zwangsbedingung f folgt
- λ ist der zugehörige *Lagrange Multiplikator*

skleronom entspricht einer ruhenden Fläche

$$0 = \frac{1}{m} \left(\vec{F} + \lambda \vec{\nabla} f \right) \vec{\nabla} f + \dot{x} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} f \cdot \dot{x} \right)$$

Arbeit wird von Zwangskräften nicht verrichtet

$$dW = F' d\vec{x} = 0$$

- falls \vec{F} konservativ gilt weiterhin der Energiesatz!

Virtuelle Arbeit $\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{x}$

Gleichgewicht befindet sich ein Massenpunkt falls für alle $\delta \vec{x}$, die kompatibel mit Zwangsbedingungen sind, gilt

$$\delta W = 0$$

- Im Gleichgewicht hat V (Pot. Energie) ein Extremum

virtuelle Verrückung $\delta \vec{x}$ ist instantane Verschiebung im Zeitraum $\delta t = 0$

- nicht notwendigerweise mit Bewegungsablauf verbunden, aber unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen

2.3 d'Alembertsches Prinzip und Lagrange 2ter Art

Identitäten

- $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$
- $\delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial q_j}$

Generalisierte Kraft $Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$

$$\delta W_F = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j$$

- Q hat nicht unbedingt die Dimension einer Kraft
- Falls ein Potential V existiert gilt:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

•

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \delta \vec{x}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s \frac{m_i}{2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} |\dot{x}_i|^2 - \frac{\partial}{\partial q_j} |\dot{x}_i|^2 \right) \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j \end{aligned}$$

- Kinetische Energie $T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\dot{x}_i|^2$

Langrange Funktion $L = T - V$

- T Kinetische Energie
- V Potentielle Energie

d'Alembertsches Prinzip $\delta W = \vec{F}' \delta \vec{x} = m \ddot{x} - \vec{F} = 0$

- $\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{x}_i - \vec{F}_i) \delta \vec{x}_i = 0$ für alle möglichen $\delta \vec{x}_i$
- Insgesamt

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0$$

- da alle δq_j voneinander unabhängig sind und diese Gleichung für alle δq_j (innerhalb der Bedingungen) gelten soll folgt daraus, dass für alle $j = 1, \dots, s$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

- Falls ein Potential V existiert reduziert sich dies auf

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

mit $j = 1, \dots, s$

Vorgehen im Allgemeinen

1. Bestimme die Anzahl der Freiheitsgrade $s = 3N - k$
2. Wähle die q_i
3. Bestimme T und V in q_i und $\dot{q}_i \Rightarrow L = T - V$
4. Bestimme Lagrange Gleichung 2.ter Art und löse sie

Verallgemeinerter Impuls $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

- $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \text{const}$
→ Die q_i für die diese Gleichung gilt heißen *zyklische Variablen*

3 Hamiltonsche Formulierung der Mechanik

- Mathematische Struktur
- Grundlage der Quantenmechanik
- Bewegungen sind 1. Ordnung (numerisch besser)
- Benötigt: Variationsrechnung

3.1 Variationsproblem

Ziel mache das folgende Integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$$

extremal mit Hilfe eines optimalen Weges machen

$$\vec{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$$

Euler-Gleichung Die Lösung der folgenden DGL's ist ein äquivalentes Ziel:

$$\forall i: \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$$

- Spezialfall mit $n = 1$, und f ist nicht explizit von x abhängig ($\frac{\partial f}{\partial x} = 0$), gilt:

$$f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' = \text{const}$$

falls y die Euler-Gleichung löst.

- Lagrange-Gleichungen können als Lösung eines Variationsproblems interpretiert werden.

3.2 Das Hamiltonische Prinzip

- Prinzip der kleinsten Wirkung

Wirkungsintegral

$$s = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

- $L = T - V$ in abhängigkeit von den Verallgemeinerten Koordinaten $\vec{q} = \{q_1, \dots, q_n\}$
- *Wirkung* s
- Die Bahn eines durch die Lagrangefunktion $L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$ beschriebenen Systems ist gegeben durch Extremum der Wirkung s

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow \delta s &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) = 0 \end{aligned}$$

Eichfreiheit L nur bestimmt bis auf eine totale Zeita-bleitung einer Funktion $G(\vec{q}, t)$.

$$\tilde{L} = L + \frac{d}{dt} G(\vec{q}, t)$$

L, \tilde{L} führen auf die gleichen Bewegungsgleichungen.

Vorteile des Hamiltonischen Prinzips

- es ist kompakt + elegant
- es ist immer von gleicher Form, unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems
- läßt sich relativistisch verallgemeinern, anwendbar in Quantenmechanik
- anwendbar in Kontinuumsmechanik, Elektrodynamik (funktioniert auch für Felder!)

3.2.1 Invarianzen und Erhaltungssätze

Verallgemeinerte Koordinaten werden transformiert von $q_i(t) \mapsto q_i(t, \gamma)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$.

- Wir erhalten also eine Geradenschaar
- $q(t, \gamma)$ muss so beschaffen sein, das die Lagrange-gleichung für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ erfüllt ist

Invariant unter der Transformation von $q_i(t) \mapsto q_i(t, \gamma)$ ist

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} = const$$

- auch *Noether Theorem* genannt
- Hieraus folgt aus:

Translationsinvarianz freie Ursprungswahl im Raum die *Impulserhaltung*

Rotationsinvarianz *isotropie* des Raumes (Richtungsunabhängigkeit) die *Drehimpulserhaltung*

Zeitverschiebung Energieerhaltung

Gallileiinvarianz Schwerpunktsimpulserhaltung $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{1}{M} \vec{P}t$

#	Erhaltungsgröße	Transformation
3	$\vec{P} = const$	$\vec{x}'_i = \vec{x}_i + \vec{a}$
3	$\vec{L} = const$	$\vec{x}'_i = \underline{D} \vec{x}_i$
1	$E = const$	$t' = t + \tau$
3	$M\vec{R} - \vec{P}t = const$	$\vec{x}'_i = \vec{x}_i + \vec{v}t$

allgemeines Noether Theorem

$$\begin{aligned} q(t) &\rightarrow q(t, \gamma) \\ L(q(t, \gamma), \dot{q}(t, \gamma), t) &= L(q(t), \dot{q}(t), t) \\ &+ \frac{d}{dt} G(q(t, \gamma), t) \end{aligned}$$

- siehe 3.2 (*Eichfreiheit*).
- Invariant ist damit

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} - \frac{\partial}{\partial \gamma} G(q, t) \Big|_{\gamma=0} = const$$

3.2.2 Hamilton Funktion

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i p_i - L = \vec{q}\vec{p} - L$$

- $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ verallgemeinerter Impuls
- $L = \vec{q}\vec{p} - H$
- H ist die negative Legendre Transformierte von L

3.2.3 Legendre Transformation

gegeben $f(x, y)$

gesucht $g(u, y)$ mit $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ wobei u, y unabhängig sind

$$g = f - ux$$

Rücktransformation $f = g - u \frac{dg}{du}$

3.2.4 Hamiltonische Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned}$$

- die ersten beiden Gleichungen ergeben 2s DGL. 1.Ordnung. Dies sind doppelt so viele wie bei Lagrange 2, allerdings dafür nur von der "halben" Ordnung. Dies ist numerisch günstiger
- $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

Phasenraum $\Gamma = (q, p)$ 2s Dimensional

Energie $H(q, p, t) = E =$ Gesamtenergie

- Falls $E = const \Rightarrow \dot{H} = 0$ ist die Lösung eine $2s - 1$ dimensionale Hyperfläche in Γ

3.2.5 Poisson-Klammern

Man definiert für ein physikalisches System mit s verallgemeinerten Koordinaten q_k und s verallgemeinerten Impulsen p_k , $k = 1, \dots, s$, für zwei Funktionen $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$, $g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ die *Poisson-Klammer*

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right)$$

- $\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$
- $\dot{q}_k = \{q_k, H\}$ und $\dot{p}_k = \{p_k, H\}$
- $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
- $\{a, b\} = -\{b, a\}$
- $\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0$
- Gilt $\dot{A} = \dot{B} = 0$, dann auch $\frac{d}{dt} \{A, B\} = 0$
- Gilt $\dot{F} = \dot{H} = 0$, dann auch $\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial t} = 0$

4 Elektrostatik

4.1 Diracsche δ -Funktion

4.1.1 Eindimensional

Lorentzfunktion $L_\eta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x-a)^2}$ mit $\eta > 0$

- Höhe des Maximums $\frac{1}{\pi\eta}$
- Stelle des Maximums a
- Breite (Halbwertsbreite) 2η
- $\forall x \neq 0 : \lim_{\eta \rightarrow 0^+} L_\eta(x-a) = 0$

$$\bullet \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_\alpha^\beta dx L_\eta(x) = \begin{cases} 1 & a \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diracsche δ -Funktion

$$\delta(x-a) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x-a)^2}$$

- $\int_\alpha^\beta dx \delta(x-a) = \begin{cases} 1 & a \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- Achtung! Reihenfolge des Grenzwertbildung beachten
- ist eigentlich keine Funktion, da für $x = a$ nicht definiert, sondern eine *Distribution*
- $f(x)$ sei stetige Funktion
- $\int_\alpha^\beta dx f(x) \delta(x-a) = \begin{cases} f(a) & a \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x-x_i)$ mit $f(x_i) = 0$ und $f'(x_i) \neq 0$
- $g(x) \delta(x-a) = g(a) \delta(x-a)$

Ableitung $\int_\alpha^\beta dx f(x) \delta'(x-a) = \begin{cases} -f'(a) & a \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- $f(x) \delta'(x-a) = -f'(a) \delta(x-a)$
- $\delta(x-a) = \frac{d}{dx} \Theta(x-a)$
- Heavyside vs. Dirac

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta dx \frac{d}{dx} \Theta(x-a) &= \int_\alpha^\beta dx \delta(x-a) \\ &= \Theta(x-a)|_\alpha^\beta \\ &= \begin{cases} 1 & a \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Heavyside Funktion

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^x dx' \delta(x') = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- auch *Stufenfunktion* genannt

4.1.2 Mehrdimensional

- $\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$ für $\vec{x} \neq \vec{x}_0$
- $\int_V d^3\vec{x} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \begin{cases} 1 & \vec{x}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Kartesisch

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0)$$

Orthogonal Krummliniege Koordinaten

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{\delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0) \cdot \delta(z-z_0)}{h_1(\vec{x}_0) \cdot h_2(\vec{x}_0) \cdot h_3(\vec{x}_0)}$$

- $h_i = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \right|$ Maßzahl
- Kugelkoordinaten

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{\delta(r-r_0) \cdot \delta(\varphi-\varphi_0) \cdot \delta(\theta-\theta_0)}{r_0^2 \sin \theta_0}$$

Interessantes indem δ vorkommt

- $\Delta_x \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$
- $\vec{\nabla}_x \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = 4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

4.2 Grundlagen

Ladung $Q = \sum_i q_i = n \cdot e = \int_V d^3\vec{x} \rho(\vec{x})$

- $n \in \mathbb{Z}$
- $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$

Elektron $n = -1$

Proton $n = +1$

Ladungsdichte von Punktladung $\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$

Stromdichte $\vec{j} = \frac{I}{A} \vec{e}_j$

Coulombgesetz $\vec{F}_{12} = kq_1q_2 \frac{\vec{x}_1-\vec{x}_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3}$

- Kräfte unterliegen dem Superpositionsprinzip
- im SI -System gilt
 - $1C = 1As$
 - $1V = 1 \frac{Nm}{As}$
 - $k = 10^{-7} c^2 \frac{N}{A^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

E-Feld $\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$

- Kraft am Ort \vec{x} auf die Probeladung q
- $\vec{F} = q\vec{E}$
- $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$
 - für Kontinuierliche Ladungsverteilung geht dies ebenfalls mit
 - $\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$
- \vec{E} ist Wirbelfrei $\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

el. Potential $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$

- $\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$
- Pot. Energie $V(\vec{x}) = q \cdot \phi(\vec{x})$

Polarisierbarkeit $\alpha = \left. \frac{d|\vec{p}|}{dE_0} \right|_{E_0=0}$

Spannung

$$U(\vec{x}, \vec{x}_0) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{x}' \vec{E}(\vec{x}') = -(\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x}_0))$$

Feldgleichungen der Elektrostatik / Maxwell Gleichungen der Elektrostatik Gelten wie im Folgenden im Vakuum

- Differenzielle Form

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

- Integralform

$$\oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

$$\oint_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{E} = 0$$

Poisson-Gleichung fasst die Maxwellgleichungen zusammen

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x})$$

- Singularitäten in ρ werden hiermit auf 0 abgebildet! An diesen Stellen muss mittels Gaußschem Satz die Ladungsverteilung separat ermittelt werden.
- Inhomogene, lineare, partielle DGL 2. Ordnung
- Probleme der Lösung: "Grundproblem der Elektrostatik"
- allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung ist eine Summe aus einer Speziellen Lösung der Poisson-Gleichung plus allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung

Laplace-Gleichung gilt wenn im Raum keine Ladungen vorhanden sind

$$\Delta\phi(\vec{x}) = 0$$

4.3 Feldverhalten an Grenzflächen

Tangentialkomponente des \vec{E} -Feldes ist stetig beim Durchgang durch Grenzfläche, auch mit Ladung auf der Fläche.

- auf leitender Oberfläche hat das \vec{E} -Feld keine Normalkomponente.

Normalkomponente des \vec{E} -Feldes kann beim Durchgang durch Grenzfläche (Normalenvektor \vec{n}) unstetig sein, Betrag ist durch Flächenladungsdichte σ gegeben.

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$$

- ist also nicht stetig, falls Ladungen vorhanden

4.4 Feldenergie

Die Energie einer auf einem *endlichen* Raumbereich begrenzten Ladungskonfiguration $\rho(\vec{x})$ entspricht genau der Arbeit, die nötig ist, um Ladungen aus dem unendlichen ($R \rightarrow \infty$) zu dieser Konfiguration zusammenzuführen. Konvention $\phi(R \rightarrow \infty) \rightarrow 0$

Punktladung

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Kontinuum

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \int d^3\vec{x} \frac{\rho(\vec{x}') \rho(\vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x} \phi(\vec{x}) (\Delta\phi(\vec{x})) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{x} |\vec{E}(\vec{x})|^2 \\ &= \int d^3\vec{x} w(\vec{x}) \end{aligned}$$

- gilt nur für stetige Ladungsverteilung
→ naja, aber Stufenfunktion & Punktladung geht trotzdem
- nur wenn Ladung nur auf endliches Gebiet verteilt ist
- $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$

Energiedichte $w(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{x})|^2$

4.5 Multipolentwicklung

Problem Berechnen des Potentials einer komplizierten, aber räumlich begrenzten Ladungsverteilung (im unbegrenzten Raum)

- $\rho(\vec{r}) \neq 0$ für $|\vec{r}| < R$
 $\rho(\vec{r}) = 0$ für $|\vec{r}| \geq R$
- keine Randbedingungen
- Gesucht ist Potential $\phi(\vec{r})$ für $|\vec{r}| \gg R$

ExpNabla ist nur eine abkürzende Schreibweise. Sie wird für mehrdimensionales Taylern benötigt.

- Taylern mit Nabla

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = \exp(\vec{a}\vec{\nabla}) f(\vec{x})$$

- Bsp

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \exp(-\vec{r}'\vec{\nabla}_r) \frac{1}{r}$$

Multipolmomente sind Koeffizienten aus der Taylorentwicklung von ϕ

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j Q_{ij} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \vec{r}^T \underline{Q} \vec{r} + \dots \right) \end{aligned}$$

- Aus Entwicklung um 0 von

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Entwicklung des Potentials für Abstände groß genug gegenüber der Ausdehnung der Ladungsverteilung (R) \Rightarrow höhere Terme $\left(\frac{R}{r}\right)^n$ unterdrückt
- höhere Terme sind nur wichtig nahe an der Ladungsverteilung.
- Für große Entfernung: erstes von Null verschiedenes Multipolmoment dominiert

Monopolmoment $q = \int d^3r \rho(\vec{r})$

- q ist genau die Gesamtladung
- $q \neq 0 \Rightarrow$ Monopol dominiert in der Fernzone
- $\phi \sim \frac{1}{r}$
- Potential einer Punktladung

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Dipolmoment $\vec{p} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{r}$

- Falls Ladungsverteilung Punktsymmetrisch ist, gilt $\vec{p} = 0$
- $\phi \sim \frac{1}{r^2}$
- falls $q = 0$ dominiert der Dipolterm

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3}$$

Quadrupolmoment

$$Q_{ij} = \int d^3r (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(r)$$

- $\phi \sim \frac{1}{r^3}$
- Falls $q = 0$ und $\vec{p} = 0$, dann dominiert der Quadrupol

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j Q_{ij} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \vec{r}^T \underline{Q} \vec{r} \end{aligned}$$

- Q_{ij} hat nur 5 unabhängige Elemente
- $\sum_i Q_{ii} = 0$
- $Q_{ij} = Q_{ji}$
 $\underline{Q} = \underline{Q}^T$
- $Q_{ij} = 0$ falls $\rho(\vec{x})$ auf der x_i oder x_j Achse symmetrisch ist
- Falls die Ladungsverteilung Rotationssymmetrisch / Kugelsymmetrisch ist, gilt $Q_{ij} = 0$

Oktopol wäre der nächste Term in der Taylorentwicklung

4.6 Wechselwirkungsenergie im externen Potential

Problem Gesucht ist die Wechselwirkungsenergie einer räumlich beschränkten Ladungsverteilung mit einem externen Potential

Wechselwirkungsenergie $W = q\phi_{ext}(\vec{r}_0) - \vec{p}\vec{E}_{ext}(\vec{r}_0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \left. \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} + \dots$

- \vec{r}_0 ist der Entwicklungspunkt / Ursprung, bzg. dem q, \vec{p}, Q_{ij} der Ladungsverteilung berechnet werden.
- $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$ ist die Kraft auf die Ladungsverteilung

→ beim Dipol
 $\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{p}\vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})$

4.7 Randwertprobleme in der Elektrostatik

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} df \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \right)$$

- df ist das infinitesimale Flächenelement
- $\frac{\partial}{\partial n'}$ leitet nach dem Flächennormalenvektor ab
 $\frac{\partial\psi}{\partial n'} = (\vec{\nabla}\psi) \vec{e}_{n'}$
- Lösung dieser DGL liefert das Potential in V
- ρ in V und ϕ bzw. $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ auf ∂V bestimmen ϕ vollständig \Leftrightarrow Ladungen außerhalb V tragen wenn überhaupt nur noch indirekt durch die Randbedingungen zu ϕ bei.
- Falls im Volumen V keine Ladungen liegen

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} df \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \right)$$

- Ist V der Gesamttraum \mathbb{R}^3 dann hat man Randbedingungen im Unendlichen und erhält das normale Poisson Integral

- Die obere Gleichung ist überbestimmt. Es genügt entweder ϕ oder $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ zu kennen. Dies nennt sich *Cauchy-Randbedingungen*.

Dirichlet Randbedingungen: ϕ gegeben auf ∂V

→ Eindeutiges ϕ

Neumann Randbedingungen: $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ gegeben auf ∂V

→ Eindeutiges ϕ bis auf konstanten additiven Term: ϕ_1, ϕ_2 Lösungen $\Rightarrow \phi_1 - \phi_2 = konst$

Physikalische Realisierung geht mit Hilfe von

Nichtleiter (Isolatoren) Ladungsträger fest, gilt auch für zusätzliche Ladungen

Leiter (Metalle) freie Ladungsträger

Greensche Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} + f(\vec{x}, \vec{x}')$$

- mit $f(\vec{a}, \vec{b}) = f(\vec{b}, \vec{a})$ und $G(\vec{a}, \vec{b}) = G(\vec{b}, \vec{a})$
- falls $\Delta_x f(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ für alle $\vec{x}, \vec{x}' \in V$
- $\Delta_x G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$

Neumann $\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0 \partial V}$ für alle $\vec{x}' \in \partial V$

$$\rightarrow \phi(\vec{x}') - \phi_0 = \int_V d^3x' G_N(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}) + \epsilon_0 \int_{\partial V} df' G_N(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial\phi}{\partial n'}$$

Dirichlet $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ für alle $\vec{x}' \in \partial V$

$$\rightarrow \phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G_D(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \epsilon_0 \oint_{\partial V} df' \phi(\vec{x}') \frac{\partial G_D}{\partial n'}$$

Methode der Bildladung

- Ist eine Geometrische Konstruktion
- Es wird eine Ladungsanordnung (Bildladung) außerhalb vom Volumen gesucht die so beschaffen ist, dass die Randbedingungen erfüllt sind
- Mit dieser Gesamtanordnung (Ladung im Volumen + Bildladung) kann man nun die Randbedingungen fallen lassen und das Potential ohne sie berechnen

Separationsansatz ist der Versuch $\phi(x, y, z) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z)$ als Ansatz zur Lösung der DGL zu wählen

- Hier zum Bsp. mit Fourier Funktionen

Seperationsansatz in Polarkoordinaten

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi)$$

- mit $Q = const$ und A_l, B_l aus Randbedingungen

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

- mit A_{lm}, B_{lm} aus Randbedingungen

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

4.8 Orthogonale Funktionen

Betrachte im folgenden stetige Funktionen einer Variablen auf $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

quadratisch integrabel heißt eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, falls das folgende Integral existiert

$$\int_a^b dx |f(x)|^2$$

- $|x|^2 = x^* x$ mit x^* das komplex Konjugierte zu x

Funktionensystem ist eine Familie von Funktionen

$$\{U_n(x)\} := \{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Orthonormal heißt ein Funktionensystem $\{U_n(x)\}$ falls gilt

$$\int_a^b dx U_n^*(x) \cdot U_m(x) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Darstellung einer Funktion $f(x)$ mit orthonormalen Funktionen $\{U_n(x)\}$ als Basis (so gut es mit dieser Basis eben geht)

$$\text{minimal} = \int_a^b dx |f(x) - f_N(x)|^2$$

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n U_n(x)$$

$$c_n = \int_a^b dx U_n^*(x) \cdot f(x)$$

Vollständig heißt ein Funktionensystem $\{U_n(x)\}$ falls gilt

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x)$$

Vollständigkeitsrelation ist äquivalent dazu, das $\{U_n(x)\}$ vollständig ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(y) U_n(x) = \delta(x - y)$$

4.8.1 Fourierreihe

ist ein spezielles Orthonormalsystem mit

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

$$a_n = \frac{2}{(b-a)} \int_a^b dt f(t) \cdot \cos(n\omega t)$$

$$b_n = \frac{2}{(b-a)} \int_a^b dt f(t) \cdot \sin(n\omega t)$$

4.8.2 Kugelflächenfunktionen

Legendre'sche DGL

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2) \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0$$

- mit $l \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$
- es gilt $-l \leq m \leq l$
- $P(x)$ ist auf $[-1, +1]$ definiert

Legendre Polynome mit berechnung nach Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^2 - 1)^l$$

- $P_l(x)$ Lösung von Legendre DGL mit $m = 0$
- $P_0(x) = 1$
 $P_1(x) = x$
 $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
 $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
- Dieser Bilden ein vollständiges Funktionensystem (aber nicht orthogonal)

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$$

$$A_l = \frac{2l+1}{l} \int_{-1}^1 dx f(x) P_l(x)$$

Zugeordnete Legendre Polynome $P_l^m(x)$ Lösung von Legendre DGL

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^{l+m}}{\partial x^{l+m}} P_l(x)$$

$$= (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^m}{\partial x^m} P_l(x)$$

- dieses gilt für $m \geq 0$
- für m beliebig gilt

$$P_l^{-|m|} = (-1)^{|m|} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_l^{|m|}$$

Kugelflächenfunktion

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

- Orthogonalität

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\varphi Y_l^{m'*}(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

- Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l Y_l^{m'*}(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) = \delta(\cos\theta' - \cos\theta) \delta(\varphi' - \varphi)$$

- Diese Funktionen bilden also ein Orthogonales und Vollständiges Funktionensystem

$$\begin{aligned} Y_0^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_1^0(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\ Y_1^1(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} \\ Y_2^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (3\cos^2\theta - 1) \\ Y_2^1(\theta, \varphi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\varphi} \\ Y_2^2(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\varphi} \end{aligned}$$

- Koordinaten bzgl. Kugelflächenbasis

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi) \\ A_{lm} &= \int d\Omega Y_l^{m*}(\theta, \varphi) \cdot f(\theta, \varphi) \\ d\Omega &= d\varphi \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

- $Y_l^{m*} = (-1)^m Y_l^{-m}$

Additionstheorem für Kugelflächenfunktion

$$P_l(\cos\alpha) = \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^{m*}(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$$

- mit $\alpha \angle((r, \theta, \varphi), (r', \theta', \varphi'))$

4.9 Sphärische Multipolmomente

Entwickeln von $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ mit $\alpha \angle(\vec{x}, \vec{x}')$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^\infty P_l(\cos\alpha) \left(\frac{r'}{r}\right)^l$$

- Für Näherungen wähle $r' < r$, als entwickle so, das kürzerer Vektor auf dem Bruch steht

Allgemein mit $\vec{x} \rightarrow (r, \theta, \varphi)$ und $\vec{x}' \rightarrow (r', \theta', \varphi')$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^>} \left(\frac{r^<}{r^>}\right)^l Y_l^{m*}(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$$

- $r_< = \min(r, r')$
 $r_> = \max(r, r')$

Sphärische Multipolmomente

$$q_{lm} = \int d^3x' \varrho(\vec{x}') (r')^l Y_l^{m*}(\theta', \varphi')$$

- $q_{lm}^* = (-1)^m q_{l,-m}$
- Hiermit gilt für das Potential

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^\infty \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) \cdot q_{lm}$$

5 Magnetostatik

Stromdichte $\vec{j} = \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}} = \varrho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)$

- ϱ ist die *Ladungsdichte*
- \vec{v} ist die *Driftgeschwindigkeit* der Elektronen

Ladungserhaltung $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

Magnetostatik $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

Knotenregel $0 = \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}$

Konstanten $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

Biot-Savart $d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{x}' \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

- Unendlich langer Draht auf z-Achse

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$

mit ρ Anstand von der z Achse

Verallgemeinerung $I d\vec{x} = \vec{j}(\vec{x}) d^3x$

Kraft auf Strom

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= I d\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x}) \\ \vec{F} &= \int_V d^3x \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) \end{aligned}$$

- Kraft von einem Leiter auf einen anderen, wenn einer der Leiter geschlossen ist.

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} d\vec{x}_1 \cdot \oint_{C_2} d\vec{x}_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

- mit $\vec{j}(\vec{x}) = q\vec{v}\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ folgt die *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x})$$

Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

- Hiermit lässt sich das \vec{B} -Feld auch schreiben als

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$$

- analog zum Potential in der Elektrostatik

Grundgleichung der Magnetostatik

$$\Delta_x \vec{A}(\vec{x}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{x})$$

- gilt nur für räumlich beschränkte Ladungsverteilung
- dies sind 3 Poisson-DGL's, für jede Raumkoordinate eine

Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform im Vakuum

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ bedeutet dass es keine magnetischen Ladungen gibt

Eichung \vec{A} nicht Eindeutig durch $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ bestimmt

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$$

ist ebenfalls eine Lösung. Diese Transformation nennt sich *Eichtransformation*.

- *Coulomb-Eichung*: $\Delta\psi = 0$
→ insbesondere $\psi = 0$

magnetisches Moment $\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3x \vec{x} \times \vec{j}$

$$\begin{aligned} \vec{A} &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{r^3} \\ \vec{B}(\vec{x}) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m}\vec{x})\vec{x}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

- Näherung gilt für \vec{x} mit $|\vec{x}| \gg R$ mit der Ausdehnung der Stromverteilung R
- \vec{m} ist zweiter Koeffizient der Taylornäherung von \vec{A}
- Gleichung gilt mit der Eichung $\psi = 0$

Index

- Additionstheorem, 16
- Arbeit, 8

- Beschleunigung, 2
- Bildladung, 14
- Biot-Savart, 16
- Bogenlänge, 1

- Cauchy-Randbedingungen, 14
- Coulomb-Eichung, 17
- Coulombgesetz, 12

- d'Alembertsches Prinzip, 9
- Dipolmoment, 13
- Diracsche δ -Funktion, 11
- Dirichlet, 14
- Drehimpuls, 5, 6
- Drehimpulserhaltung, 10
- Drehimpulssatz, 5
- Drehmoment, 5
- Dreibein, 2

- E-Feld, 12
- Eichfreiheit, 10
- Eichtransformation, 17
- el. Potential, 12
- Elastisch, 3
- Elektron, 12
- Elektrostatik, 11
- Ellipse, 3
- Energiedichte, 13
- Energieellipsoiden, 6
- Energietransfer, 4
- Euler-Gleichung, 9
- Eulersche Kreiselgleichungen, 7
- ExpNabla, 13

- Feldenergie, 13
- Fourierreihe, 15
- Frenet-Matrix, 2
- Funktionensystem, 15

- Gallileiinvarianz, 10
- Gangpolkegel, 7
- gebundene Systeme, 2
- generalisierte Koordinaten, 8
- Geschwindigkeit, 2
- Gleichgewicht, 8
- Grenzfläche, 12
- Grundgleichung der Magnetostatik, 17

- Halbachsen, 3
- Hamiltonische Prinzip, 10
- Hamiltonische Bewegungsgleichungen, 11
- Hauptträgheitsachsen, 6
- Heavyside Funktion, 11
- holonome Zwangsbedingungen, 8
- Hyperbel, 3

- Impuls, 9
- Impulserhaltung, 10
- Inelastisch, 3
- isotropie, 10

- Körperfest, 6
- Kegelschnittgleichung, 3
- Kepler, 3
- Knotenregel, 16
- Krümmung, 2
- Krümmungsradius, 2
- Kraft auf Strom, 16
- Kreisel, 6, 7
- Kugelflächenfunktion, 16
- Kugelflächenfunktionen, 15
- Kurventheorie
 - Hauptsatz, 2

- Ladung, 12
- Ladungsdichte, 12, 16
- Ladungserhaltung, 16
- Lagrange 1. Art, 8
- Lagrange 2ter Art, 9
- Lagrange Mechanik, 8
- Lagrange Multiplikator, 8
- Laplace-Gleichung, 12
- Legendre Polynome, 15
- Legendre Transformation, 10
- Legendre'sche DGL, 15
- Lorentz-Kraft, 17

- magnetisches Moment, 17
- Magnetostatik, 16
- Maxwell, 12
- Mittelwert, 2
- Moment, 17
- Monopolmoment, 13
- Multipolentwicklung, 13
- Multipolmoment, 16
- Multipolmomente, 13

- Neumann, 14
- nicht-holonome, 8
- Noether Theorem, 10
- Nutationskegel, 8

- offene Systeme, 2
- Oktopol, 14
- Orthogonale Funktionen, 15
- Orthonormal, 15

- Parabel, 3
- Phasenraum, 11
- Poisson-Gleichung, 12
- Poisson-Klammern, 11
- Polarisierbarkeit, 12
- Potential
 - elektrisch, 12
- Proton, 12
- Punktladung, 13

quadratisch integrierbar, 15
Quadrupolmoment, 13

Randwertprobleme, 14
Rastpolkegel, 8
reduzierte Masse, 3
Relativbewegungen, 3
rheonom, 8
Rodrigues, 15
Rotation, 2
Rotationsinvarianz, 10

Scheinerscher-Satz, 6
Separationsansatz, 14
skleronom, 8
Spannung, 12
Stoß, 3
Streuung, 3
Streuungswinkel, 3
Stromdichte, 12, 16
Stufenfunktion, 11

Tensorbegriff, 5
Trägheitsellipsoiden, 6
Trägheitsmoment, 5
Trägheitstensor, 6
Translationsinvarianz, 10

Variationsproblem, 9
Vektorpotential, 17
Verallgemeinerter Impuls, 9
verlorene Kräfte, 8
Verrückung, 8
Virial, 2
Virialsatz, 2
virtuelle Arbeit, 8
virtuelle Verrückung, 8
Vollständig, 15
Vollständigkeitsrelation, 15
Vorwärtsstreuung, 3

Wechselwirkungsenergie, 14
Windung, 2
Wirkung, 10
Wirkungsintegral, 10

Zeitverschiebung, 10
Zugeordnete Legendre Polynome, 15
Zwangsbedingungen, 8
Zwangskräfte, 8
Zweiteilchensysteme, 2
zyklische Variablen, 9