

# Formelsammlung

## Theorie klassischer Teilchen und Felder 2

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 12.02.2007 - Version: 0.9.3

ERHÄLTlich UNTER [HTTP://PRIVAT.MACROLAB.DE](http://privat.macrolab.de)

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung “Theorie klassischer Teilchen und Felder 2” von Prof. Dr. Jochen Wambach an der Technischen Universität Darmstadt im Wintersemester 2006/07.

Die folgende Formelsammlung steht zum kostenlosen Download zur Verfügung. Das Urheberrecht und sonstige Rechte an dem Text verbleiben beim Verfasser, der keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit der Inhalte übernehmen kann.

### Inhaltsverzeichnis

<p><b>1 Schwingungen</b> <span style="float: right;"><b>2</b></span></p> <p>1.1 Harmonische Oszillator . . . . . <b>2</b></p> <p>1.2 gedämpfter harmonischer Oszillator . . . <b>2</b></p> <p>1.3 Erzwungene Schwingung . . . . . <b>2</b></p> <p>1.4 Anharmonische Schwingungen . . . . . <b>2</b></p> <p>    1.4.1 nichtlinear + äußere Periodische Kraft + Reibung . . . . . <b>3</b></p> <p>1.5 Schwingende Systeme . . . . . <b>3</b></p> <p>    1.5.1 lineare periodische Kette . . . . . <b>4</b></p> <p><b>2 Hamilton Jakobi Theorie</b> <span style="float: right;"><b>4</b></span></p> <p>2.1 Erzeugende Funktionen . . . . . <b>5</b></p> <p>    2.1.1 Austauschtransformation . . . . . <b>5</b></p> <p>    2.1.2 Identische Transformation . . . . . <b>5</b></p> <p>    2.1.3 Punkttransformation . . . . . <b>5</b></p> <p>    2.1.4 Transformation auf ebene Polarkoordinaten . . . . . <b>5</b></p> <p>    2.1.5 Harmonische Oszillator . . . . . <b>6</b></p> <p>2.2 Hamilton Jakobi-Theorie . . . . . <b>6</b></p> <p>    2.2.1 Allgemein . . . . . <b>6</b></p> <p>2.3 Hamiltonische Prinzipialfunktion . . . . . <b>6</b></p> <p>2.4 Hamiltonische charakteristische Funktion <b>7</b></p> <p>    2.4.1 Lösungsverfahren . . . . . <b>7</b></p> <p>    2.4.2 Separation der Variablen . . . . . <b>7</b></p>	<p>2.5 Wirkungs- und Winkelvariable . . . . . <b>8</b></p> <p>    2.5.1 Poisson-Klammern . . . . . <b>8</b></p> <p>    2.5.2 Integrale der Bewegung . . . . . <b>8</b></p> <p>    2.5.3 Periodizität . . . . . <b>8</b></p> <p>    2.5.4 Wirkungs- und Winkelvariable . . <b>9</b></p> <p><b>3 Elektrodynamik</b> <span style="float: right;"><b>9</b></span></p> <p>3.1 Elektrodynamik der Dielektrika . . . . . <b>9</b></p> <p>    3.1.1 Klassifikation von verschiedenen Polarisationsformen . . . . . <b>10</b></p> <p>    3.1.2 Plattenkondensator . . . . . <b>10</b></p> <p>    3.1.3 Randwertprobleme . . . . . <b>10</b></p> <p>    3.1.4 Elektrostatische Energie . . . . . <b>11</b></p> <p>3.2 Magnetostatik in Materie . . . . . <b>11</b></p> <p>    3.2.1 Makroskopische Feldgrößen . . . . . <b>11</b></p> <p>    3.2.2 Einteilung der magn. Stoffe . . . . . <b>12</b></p> <p>3.3 Feldverhalten an Grenzflächen . . . . . <b>12</b></p> <p>3.4 Randwertprobleme . . . . . <b>12</b></p> <p>3.5 Vollständige Maxwell Gleichungen . . . . . <b>12</b></p> <p>3.6 Energie &amp; Impulssatz in der Elektrodynamik . . . . . <b>13</b></p> <p>3.7 Elektromagnetische Wellen . . . . . <b>14</b></p> <p>    3.7.1 Allgemeine Lösung der Wellengleichung . . . . . <b>16</b></p> <p>    3.7.2 Energietransport in Wellen . . . . . <b>16</b></p> <p>    3.7.3 Wellenausbreitung in elektrischen Leitern . . . . . <b>17</b></p> <p>3.8 Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen am Isolator . . . . . <b>17</b></p> <p>    3.8.1 Feldverhalten an Grenzflächen . . <b>17</b></p> <p>    3.8.2 Brechungs- und Reflexionsgesetz <b>18</b></p> <p>    3.8.3 Intensität bei Reflexion und Brechung . . . . . <b>18</b></p> <p>    3.8.4 Fresnel'sche Formeln . . . . . <b>18</b></p> <p>    3.8.5 Senkrechter Fall . . . . . <b>18</b></p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

3.8.6	Energietransport . . . . .	19
3.8.7	Totalreflexion . . . . .	19
3.9	Erzeugung elektromagnetischer Wellen . . . . .	19
3.9.1	Inhomogene Wellengleichung . . . . .	19
3.9.2	Zeitlich oszillierende Quellen . . . . .	19
3.10	Kovariante Formulierung der Elektrodynamik . . . . .	21

## 1 Schwingungen

### 1.1 Harmonische Oszillator

**Ruhelage**  $q_0$

**Kraft**  $F = -k(q - q_0)$

**Ruhelage**  $q_0$

**Koordinaten**  $x = q - q_0$

**DGL**  $m\ddot{x} + kx = 0$

- Ellipsengleichung im Phasenraum  
 $\frac{2}{m}E = \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = \text{const}$

**Bewegungsgleichung**

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \\ &= C \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ &= a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

- $a, b$  bzw.  $A, B$  bzw.  $C, \varphi$  aus Anfangsbedingungen

### 1.2 gedämpfter harmonischer Oszillator

**Kraft**  $F = -kx - \beta\dot{x}$

**DGL**  $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$

- Bahn im Phasenraum ist eine schrumpfende elliptische Spirale  
 $\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 \right) = -\beta \dot{x}^2$

**DGL**  $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x^2 = 0$

- $\gamma = \frac{\beta}{2m}$   
 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

**Bewegungsgleichung** Lösen mit  $x(t) = Ce^{\lambda t}$  Ansatz

- $\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
- $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

**schwache Dämpfung**  $\omega_0^2 > \gamma^2$

$$x(t) = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \tan \varphi &= -\frac{\dot{x}(0) + \gamma x(0)}{\omega x(0)} \\ C &= x(0) \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \end{aligned}$$

**Kriechfall**  $\omega_0^2 < \gamma^2$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \left( x(0) \cosh(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{x}(0) + \gamma x(0)}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \sinh(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t) \right) \end{aligned}$$

**Aperiodischer Grenzfall**  $\omega_0^2 = \gamma^2$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (x(0) + (\dot{x}(0) + \gamma x(0)) t)$$

→ Klingt am schnellsten ab von allen 3 Fällen

### 1.3 Erzwungene Schwingung

**Kraft**  $F = -kx - \beta\dot{x} + F_0 \cos(\Omega t)$

**DGL**  $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$

**DGL**  $\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z^2 = f_0 e^{i\Omega t}$

- $z(t) = x(t) + iy(t)$
- Bewegungsgleichung Lösen mit  $z(t) = Ce^{i\Omega t}$   
→  $C = -\frac{f_0}{\Omega^2 - 2i\gamma\Omega - \omega_0^2}$

**Bewegungsgleichung**

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \delta)$$

- für  $\gamma^2 \ll \Omega^2$

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_0 \sqrt{(\Omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}} \cos(\Omega t + \delta)$$

$$\rightarrow \tan \delta = \frac{\gamma}{\Omega - \omega_0}$$

→  $\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow |C| \rightarrow \infty$  Resonanzkatastrophe

### 1.4 Anharmonische Schwingungen

**Potential**  $V(x) = V(x_0) + \frac{dV}{dx} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$

- o.B.d.A.:  $V(x_0) = 0, x_0 = 0$
- $V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \underbrace{\frac{1}{3!} m \alpha x^3 + \frac{1}{4!} m \beta x^4 + \dots}_{\text{anharmonisch}}$
- $\alpha, \beta$  konstanten

**Allgemein**  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3$

- exakt lösbar, keine Lösungen in geschlossener Form (i.A.)
- periodische Lösungen mit  $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \dots$
- $\cos(\omega t) = \cos((\omega_0 + \omega_1)t) \approx \cos(\omega_0 t)$  für  $t$  sehr groß
- Näherungsweise Lösung:  
 $x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + \dots$

$$\begin{aligned} x^{(0)}(t) &= A \cos(\omega t) \\ x^{(1)}(t) &= -\frac{\alpha A^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha A^2}{6\omega_0^2} \cos(2\omega t) \\ x^{(2)}(t) &= \frac{1}{16\omega_0^3} \left( \frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} - \frac{\beta}{2} \right) \cos(3\omega t) \end{aligned}$$

**1.4.1 nichtlinear + äußere Periodische Kraft + Reibung**

**DGL**  $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t) - \alpha x^2 - \beta x^3$

- $\Omega \approx \omega_0$ : Kleine Amplitude  $\Rightarrow$  harmonisch
- $\Omega \approx \omega_0$ :  $\Omega = \omega_0 + \varepsilon, \varepsilon \ll 1$ , Amplitude  $|c|$
- $|c|^2 \left( (\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 \right) = \frac{f_0}{4\omega_0^2}$
- $|c|^2 \left( (\varepsilon - k|c|^2)^2 + \gamma^2 \right) = \frac{f_0}{4\omega_0^2}$

Hat im Allgemeinen 3 Lösungen

$f_0$  klein  $\Rightarrow |c|$  klein

$$|c|^2 = \frac{f_0^2}{4\omega_0^2} \frac{1}{\varepsilon^2 + \mu^2}$$

$f_0$  größer Deformation in Richtung größere  $\varepsilon$  ( $k > 0$ )

$f_0 > f_k$  es gibt in einem Bereich eine Hysterese (3 Lösungen)

$$\rightarrow c_{max} = \frac{f_0}{2\omega_0\gamma}$$

$$\rightarrow f_k^2 = \frac{8\omega_0^2\gamma^3}{|k|}$$

**1.5 Schwingende Systeme**

**generalisierte Koordinate**  $q = (q_1, \dots, q_s)$

**Betrachtet** nur Konservative Kräfte  $\Rightarrow$  es gibt ein Potential  $V(q)$

**Gleichgewichtspunkte**  $q_0 : \dot{q}(t) = 0, q(t) = q_0$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q=q_0} = 0$$

**stabiles Gleichgewicht** lokales Minimum von  $V$

**labiles Gleichgewicht** lokales Maximum von  $V$   
**neutrales Gleichgewicht**  $V$  ist lokal konstant

**Auslenkung**  $q_i = q_i^0 + \xi_i$

- $\xi_i$  kleine Auslenkung aus dem Gleichgewicht

**Potential** Taylor Entwickeln

$$\begin{aligned} V(q) &= \underbrace{V(q_0)}_{=0 \text{ BbdA}} + \sum_{i=1}^s \underbrace{\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q=q_0}}_{=0} \xi_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s \underbrace{\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_0}}_{k_{ij}} \xi_i \xi_j + \dots \end{aligned}$$

- $V(q) = \frac{1}{2} \xi^T \underline{k} \xi$
- $\underline{k}$  ist symmetrisch
- Stabiles Gleichgewicht  $\Rightarrow \underline{k}$  ist positiv definit (alle Eigenwerte  $> 0$ )

**Lagrange Funktion**

$$L = \frac{1}{2} \left( \dot{\xi}^T \underline{M} \dot{\xi} - \xi^T \underline{k} \xi \right)$$

- **Massentensor**  $M_{ij} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{q=q_0}$   
 $\rightarrow$  ist symmetrisch  
 $\rightarrow$  alle Eigenwerte  $\geq 0$

**DGL** auch *Säkulargleichung* genannt

$$\begin{aligned} \forall i : \sum_{j=1}^s \left( M_{ij} \ddot{\xi}_j + k_{ij} \xi_j \right) &= 0 \\ \underline{M} \ddot{\xi} + \underline{k} \xi &= 0 \end{aligned}$$

**zu** lösen falls  $\det(\underline{k} - \omega^2 \underline{M}) = 0$

- Polynom  $s$ -ten Grades in  $\omega^2$
- $\omega_\alpha^2$  Nullstellen des Polynoms ( $s$  Stück)
- $\omega_\alpha^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \omega_\alpha \in \mathbb{R}$
- Eigenschwingungen  $\xi_0^\alpha$  sind zu  $\omega_\alpha^2$  passende Lösungen  
 $\rightarrow$  sind alle reell und linear unabhängig

**Normierung**  $(\xi_0^\alpha)^T \underline{M} \xi_0^\beta = \delta_{\alpha\beta}$

- auch *Verallgemeinerte Orthonormalität* genannt

**Lösung**

$$\xi(t) = \sum_{\alpha=1}^s \xi_0^\alpha \underbrace{\left( A_\alpha e^{i\omega_\alpha t} + B_\alpha e^{-i\omega_\alpha t} \right)}_{\eta_\alpha(t)}$$

**Normal Koordinaten**  $\eta_\alpha(t) = A_\alpha e^{i\omega_\alpha t} + B_\alpha e^{-i\omega_\alpha t} = \tilde{A}_\alpha \cos(\omega_\alpha t) + \tilde{B}_\alpha \sin(\omega_\alpha t)$

**Transformation** der DGL hierdurch in folgende entkoppelte Form

$$\forall \alpha : \ddot{\eta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \eta_\alpha = 0$$

### 1.5.1 lineare periodische Kette

Besetzt aus unendlich vielen Teilchen der Masse  $m$

- Abstand jeweils  $a$
- Federkonstanten dazwischen  $k$
- 1-dim Angeordnet
- Abstraktion für 1-dim Festkörper

Masse  $M_{ij} = \delta_{ij}m$

Kopplung

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ansatz Jedes Atom vollführt harmonische Schwingung mit dem gleichen  $\omega$

$$x_l = A_l e^{i\omega t}$$

und Nachbaratome unterscheiden sich nur um konstante Phase

$$x_l = x_{l-1} e^{i\chi}$$

und Periodischen Randbedingungen

$$A_l = A_{l+N} e^{iN\chi}$$

- $\chi = \frac{2\pi}{N}n$  für  $i = 1, \dots, N$

Lösung  $\omega_n = 2\omega_0 \left| \sin \frac{n\pi}{N} \right|$

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- $n = 1, \dots, N$
- $\omega_N = 0$  Translation "Nullmoden"

Wellenlänge  $\lambda_n = a \frac{N}{n} = \frac{L}{n}$

Dispersionsrelation  $\omega(q) = 2\omega_0 \left| \sin \frac{qa}{2} \right|$

- $q$  Wellenzahl
- 1. Brioullin Zone von  $q \in \left(0, \frac{2\pi}{a}\right)$

Phasengeschwindigkeit  $c = \frac{\omega}{q} = \frac{2\omega_0}{q} \left| \sin \frac{qa}{2} \right|$

- $q$  klein  $\Rightarrow c \approx \omega_0 a$  Schallgeschwindigkeit einer longitudinalen Kompressionswelle

Gruppengeschwindigkeit  $v_g = \frac{d\omega}{dq}$

Kontinuierlicher Grenzfall  $x_l(t) = x(\xi, t)$  mit  $\xi = al$

- $N \rightarrow \infty, a \rightarrow 0, L = Na = \text{const}$

$$(x_l + x_{l+1} - 2x_l) \rightarrow a^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi} x(\xi, t)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) x(\xi, t) = 0$$

$$\text{Elastizitätsmodul } F = \eta \frac{\delta L}{L}$$

$$\text{Rückstellkraft } F_r = k\delta L$$

$$\eta = ka$$

$$\text{Phasengeschwindigkeit } c = \omega_0 a = \sqrt{\frac{a^2 k}{m}} = \sqrt{\frac{\eta}{\rho}}$$

$$\text{Dichte } \rho = \frac{m}{a}$$

## 2 Hamilton Jakobi Theorie

Kanonische Koordinaten  $q = (q_1, \dots, q_s)$

Wirkung  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$  wird minimiert

Lagrange Funktion  $L = T - V = p \cdot \dot{q} - H$

- negative Lagrange Transformierte der Hamilton Funktion

Kanonischer Impuls  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

Phasenraum  $\Gamma = (q, p)$   $2s$ -dim

DGL's, die die Bewegungsgleichungen liefern, sind:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Zyklische Koordinaten  $q_k$  so, dass  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const}$

- $L$  hängt nicht von  $q_k$  ab
- $H$  hängt nicht von  $q_k$  ab
- $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$
- $q_k(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial H}{\partial p_k}$

## 2.1 Erzeugende Funktionen

**Ziel** Suche *alle* zyklischen Koordinaten. Wechsle dazu die Koordinaten, so das mehr zyklische Variablen entstehen. Dieser Wechsel soll forminvariant geschehen.

**Forminvariant** heißt eine Transformation  $H(q, p) \rightarrow \bar{H}(Q, P)$  falls

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \Rightarrow \\ \dot{Q} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q}\end{aligned}$$

**kanonische Transformation** Eine Transformation  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  und  $H \rightarrow \bar{H}$  ist kanonisch falls  $F(q$  bzw.  $p, Q$  bzw.  $P, t)$  (beliebig, diffbar) existiert mit

$$L = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^s p_j \dot{Q}_j - \bar{H} + \frac{dF}{dt}$$

- kanonische Transformationen sind forminvariant
- $F$  legt  $\bar{H}$  vollständig fest

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

- aus DGL für  $F$  lassen sich Transformationen für  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  finden und umgekehrt

**Typ der Transformation** für  $F$  lässt sich eine der folgenden Formen wählen

- Transformation durch Freistellung der Ableitungen
- Diese  $F_i$  sind untereinander durch Legendre Transformationen verknüpft!
- Dies sind die *erzeugenden Funktionen*
- $F_1 = F_1(q, Q, t)$

$$\begin{aligned}\rightarrow p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ \rightarrow P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\end{aligned}$$

- $F_2 = F_2(q, P, t)$

$$\begin{aligned}\rightarrow F_2 &= F_1 + PQ \\ \rightarrow p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ \rightarrow Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\end{aligned}$$

- $F_3 = F_3(p, Q, t)$

$$\rightarrow F_3 = F_1 - pq$$

$$\rightarrow q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$$

$$\rightarrow P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$$

- $F_4 = F_4(p, P, t)$

$$\rightarrow \text{Doppelte Legendre Transformation}$$

$$F_4 = F_1 + PQ - pq$$

$$\rightarrow q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$$

$$\rightarrow Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$$

### 2.1.1 Austauschtransformation

- $F_1(q, Q, t) = -qQ$  bzw.  $F_4 = -pP$
- $p_i = -Q_i$
- $P_i = q_i$
- $(q, p) \rightarrow (-p, q) = (Q, P)$
- $\bar{H} = H$

### 2.1.2 Identische Transformation

- $F_2 = qP$  bzw.  $F_3 = -pQ$
- $P_i = p_i$
- $Q_i = q_i$
- $(q, p) \rightarrow (q, p) = (Q, P)$
- $\bar{H} = H$

### 2.1.3 Punkttransformation

- $F_2(q, P, t) = \sum_i g_i(q_1, \dots, q_s, t) P_i$   
g hängt nur von Punkt im Phasenraum ab
- $Q_i = g_i(q_1, \dots, q_s, t)$
- $P_i = \sum_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} P_j$
- $(q, p) \rightarrow (Q, P)$
- $\bar{H} = H + qP$
- analog mit  $F_3 = -\sum_i g_i(Q_1, \dots, Q_s, t) p_i$

### 2.1.4 Transformation auf ebene Polarkoordinaten

- $H(q, p) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$
- $q = (x, y)$   
 $p = (p_x, p_y)$
- $Q = (r, \varphi)$   
 $P = (p_r, p_\varphi)$
- $F_3 = -r \cos(\varphi) p_x - r \sin(\varphi) p_y$

- $x = r \cos(\varphi)$   
 $y = r \sin(\varphi)$
- $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$   
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $p_r = \cos(\varphi) p_x + \sin(\varphi) p_y$   
 $p_\varphi = -r \sin(\varphi) p_x + r \cos(\varphi) p_y$
- $p_x = \cos(\varphi) p_r - \frac{1}{r} \sin(\varphi) p_\varphi$   
 $p_y = \sin(\varphi) p_r + \frac{1}{r} \cos(\varphi) p_\varphi$
- $\overline{H}(Q, P) = \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2) + V(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

### 2.1.5 Harmonische Oszillator

- 1.dim
- Ziel: so transformieren das zyklische Variable entsteht
- $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2$   
 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
- $F_1 = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \cot Q$
- $p = m \omega_0 q \cot Q$   
 $P = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}$
- $q = \sqrt{\frac{2P}{m \omega_0}} \sin Q$   
 $p = \sqrt{2P m \omega_0} \cos Q$
- $\overline{H} = \omega_0 P$
- $P(t) = P_0 = \text{const}$   
 $\dot{Q} = \omega_0 \Rightarrow Q(t) = \omega_0 t + Q_0$
- $q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m \omega_0}} \sin(\omega_0 t + Q_0)$   
 $p(t) = \sqrt{2P_0 m \omega_0} \cos(\omega_0 t + Q_0)$

## 2.2 Hamilton Jakobi-Theorie

### 2.2.1 Allgemein

Suche  $F$ , so dass Problem einfach wird.

1. Wähle Transformation so, das in  $(Q, P)$  Problem bekannt ist  $\overline{H}(Q, P)$  z.B. harmonischer Oszillator
2. Wähle Transformation so, das alle Koordinaten zyklisch und  $\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = 0$ 
  - (a)  $P_i = \alpha_i = \text{const}$  für  $i = 1, \dots, s$
  - (b)  $\overline{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$
  - (c)  $\dot{Q}_i = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \alpha_i} = \omega_i = \text{const} \Rightarrow Q_i(t) = \omega_i t + \beta_i$  mit  $\beta_i = \text{const}$
3. Wähle Transformation so, das  $Q_i = \beta_i = \text{const}$  UND  $P_i = \alpha_i = \text{const}$  für  $i = 1, \dots, s$ 
  - (a) dies ist die allgemeinste Methode
  - (b)  $\overline{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$

- (c)  $\dot{Q}_i = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_i} = 0 \Rightarrow Q_i = \beta_i = \text{const}$
- (d)  $\dot{P}_i = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow P_i = \alpha_i = \text{const}$
- (e) durch auflösen  $q = (\beta, \alpha, t)$  und  $q = (\beta, \alpha, t)$  bestimmen
- (f) Wähle  $F = F_2(q, P, t)$
- (g) zu Lösen ( $F$  gesucht): *Hamilton Jakobi Gleichung*

$$H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_s}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

nichtlineare Partielle DGL in  $s + 1$  Variablen

## 2.3 Hamiltonische Prinzipialfunktion

**Definition** die Hamiltonische Prinzipialfunktion  $S = F_2$  ist die Lösung der *Hamilton Jakobi Gleichung*

$$H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 (= \overline{H})$$

- $H = c$  ist aber auch ok
- nichtlineare Partielle DGL in  $s + 1$  Variablen
- es gibt also  $s + 1$  Integrationskonstanten
- Falls  $S$  Lösung, ist auch  $S + c$  Lösung  $\Rightarrow$  also nur noch  $s$  "interessante" Integrationskonstanten

$$S(q_1, \dots, q_s, t | \alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

- Identifiziere jetzt  $P_i = \alpha_i$
- $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$

### Lösungsverfahren

1. Formuliere  $H(q, p, t)$  mit  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$

- Aufstellen der HJD:

$$H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

2. Lösung der HJD, woraus man  $S(q_1, \dots, q_s, t | \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  erhält

- $P_i = \alpha_i$
- evtl. über Separationsansatz
- $S' = S + c$  ist ebenfalls eine Lösung. Dieses  $c$  bei den Konstanten ignorieren!

3. Wir wissen  $S(q_1, \dots, q_s, t | \alpha_1, \dots, \alpha_s) = S(q, t | \alpha)$

- Bestimmen von  $\beta$  über:  
 $Q_i = \frac{\partial S(q, t | \alpha)}{\partial \alpha_i} = \beta_i = \text{const}$
- daraus wiederum ist  $q_i = q_i(t | \beta, \alpha)$  bestimmbar

4. Bestimmung der  $p_i$ :

- Auflösen von

$$p_i = \frac{\partial S(q, t | \alpha)}{\partial q_i} = p_i(q, t | \alpha) = p_i(t | \beta \alpha)$$

5. Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} q_i^{(0)} &= q_i(t = t_0) \\ p_i^{(0)} &= p_i(t = t_0) \end{aligned}$$

- Freistellen nach:  
 $\alpha = \alpha(t_0, q^{(0)}, p^{(0)})$   
 $\beta = \beta(t_0, q^{(0)}, p^{(0)})$
- Problem gelöst!

**Physikalische Bedeutung von  $S(q, P, t)$**

- $(q, p) \xrightarrow{S} (Q, P) = const$  entspricht Abbildung auf einen Pkt. im Phasenraum
- $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$
- $\frac{dS}{dt} = L$
- $S = \int dt L + c$   
 unbestimmtes Integral der Lagrange-Fkt.  $\Rightarrow$  formale Integrationsform, in der Praxis jedoch nicht verwendbar! Dieses  $S$  wird hier minimiert  $\Leftrightarrow$  Grundlage der *ganzen* Hamilton-Theorie (da haben wir mal angfangen)

**2.4 Hamiltonische charakteristische Funktion**

**2.4.1 Lösungsverfahren**

- falls  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$   
 gilt  $\Rightarrow H = E$  Konstante der Bewegung
- Herleitung über Separationsansatz:  
 $\rightarrow H(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$   
 $\rightarrow S(q, P, t) = W(q, P) - E \cdot t$   
 $\rightarrow W$  *Harmonische charakteristische Funktion*  
 $\rightarrow E = \alpha_{s+1} = const$   
 $\rightarrow$  dies nur zur Herleitung, folgende def. davon abweichend!!

1. Aufstellen der HJD

$$H(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}) = E(\alpha)$$

Lösen nach  $W(q, \alpha)$

- für zyklische Variablen wähle identische Transformation und Separationsansatz  
 $W = W_1 + q_i \alpha_i$

2.  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  mit  $p_i = \alpha_i$  nach Lösung von HJD  $W(q, \alpha)$

3.  $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \rightarrow p_i = p_i(q, \alpha)$

4.  $E = E(\alpha) \Rightarrow \omega_i = \frac{\partial E}{\partial \alpha_i}$

- Wähle  $E(\alpha)$  so, dass man freies Problem bekommt. Z.B. durch:

(a)  $E(\alpha) = \sum_i \frac{\alpha_i^2}{2m}$  bzw.  $\bar{H} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m}$  (elimination aller Kräfte)

(b)  $E(\alpha) = \alpha_1$   
 $\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = \omega_1 = 1$   $\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = \omega_i = 0$  für  $i > 1$   
 $\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = \omega_i = \delta_{i1} \rightarrow Q_1 = t + \beta_1$ , andere Koordinaten:  $Q_i = \beta_i$

- $Q_i$  sind bestimmt:  
 $Q_i = \omega_i(\alpha) \cdot t + \beta_i = \frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial \alpha_i}$

- Auflösen nach:  
 $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$   
 $p_i = p_i(\alpha, \beta, t)$

5.  $q_i^{(0)} = q_i(t = t_0), p_i^{(0)} = p_i(t = t_0)$

- Auflösen nach:  
 $\alpha = \alpha(q_i^{(0)}, p_i^{(0)})$   
 $\beta = \beta(q_i^{(0)}, p_i^{(0)})$

- Daraus dann:  
 $q_i(t)$   
 $p_i(t)$

- physikalische Interpretation von  $W$

$$\begin{aligned} W &= \sum_i \int dq_i p_i \\ S &= W - H \end{aligned}$$

- $S = \text{Wirkung}$  wird minimiert  $\Rightarrow H = const \Rightarrow W$  minimiert

**2.4.2 Separation der Variablen**

- Falls  $q_1 f(q_1, \frac{\partial Q}{\partial q_1})$  nicht von weiteren  $q_i$  und  $\frac{\partial Q}{\partial q_i}$  abhängig und

$$H\left(q_2, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}, f\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right)\right) = E$$

- $q_1$  absorbiert  
 $W(q, P) = \bar{W}(q_2, \dots, q_s, P) + W_1(q_1, P)$

- $H(q_2, \dots, q_s, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_s}, H_1) = E$   
 $H_1 = f\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right) = c_1 = const$

- Wenn alle  $q_i$  seperabel sind:  
 $W = \sum_i W_i(q_i, P)$   
 Lösungen:  $H_i = f\left(q_i, \frac{dW_i}{dq_i}, \alpha\right) = \alpha_i$   
 $H = (H_1, \dots, H_s, \alpha) = E$

- $H$  ist z.B. seperabel für  $q_1$  nicht zyklisch  $q_i$  mit  $i > 1$  zyklisch

$$\rightarrow W = W_1(q_1) + \sum_i q_i P_i$$

$\rightarrow q_i P_i$  ist die Identität auf für die  $i$ -ten Koordinaten

## 2.5 Wirkungs- und Winkelvariable

### 2.5.1 Poisson-Klammern

**Zweck** Konstanten der Bewegung und Bewegungsgleichungen kompakt darstellen (formaler Übergang zur QM einfach)

**Observable** ist  $f(q, p, t)$  mit  $(q, p) \in \Gamma$  (Phasenraum-punkt)

**zeitliche Änderung**  $\frac{df}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$

**Poisson-Klammern** für  $f(q, p, t)$  und  $g(q, p, t)$

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

- nach den angegebenen Indizes differenzieren

- $\{g, f\}_{q,p} = -\{f, g\}_{q,p}$

- $\{f, f\} = 0$

- 

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

- $\dot{q}_i = \{q_i, H\}_{q,p}$   
 $\dot{p}_i = \{p_i, H\}_{q,p}$

**fundamentale Poisson-Klamern**

- $\{q_i, q_j\}_{q,p} = 0$

- $\{p_i, p_j\}_{q,p} = 0$

- $\{q_i, p_j\}_{q,p} = \delta_{ij}$

- wenn diese Eigenschaften gelten sind die  $q_i, p_i$  ein Satz unabhängiger Variablen

**Koordinatenunabhängigkeit** falls  $(q, p)$  und  $(Q, P)$  beide genügen der Hamiltonischen Bewegungsgleichung,  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  kanonisch

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \tilde{H}(Q, P) \\ q &= q(Q, P) \\ p &= p(Q, P) \end{aligned}$$

dann gilt

$$\{Q_i, Q_k\}_{q,p} = 0$$

$$\{P_i, P_j\} = 0$$

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}$$

**Weiter ist** der Wert der Poissonklammer unabhängig von der Wahl der Koordinaten im Phasenraum.

$$\{F, G\}_{q,p} = \{F, G\}_{Q,P}$$

- d.h. wir können die Koordinatenindizes weglassen!

**Formale Eigenschaften** der Poisson-Klammern ( $c, c_1, c_2$  sind Konstanten)

**Antisymmetrie**  $\{f, g\} = -\{g, f\}$

**Bi-Linearität**  $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}$

- rechts ebenfalls linear

**Nullelement**  $\{c, f\} = 0$

**Produktregel**  $\{f, g \cdot h\} = g \{f, h\} + \{f, g\} h$

**Jakobi-Identität**  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

### 2.5.2 Integrale der Bewegung

**Integral der Bewegung** ist ein anderer Begriff für Erhaltungsgrößen. Eine Größe die entlang der Bahnkurve eines freien Teilchens erhalten ist.

**Observable**  $F(q, P, t)$  sei eine mech. Observable

- $\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \{H, F\} = \frac{\partial F}{\partial t}$

- $\frac{dF}{dt} = 0 \Rightarrow F$  Konstante der Bewegung

- $\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dF}{dt} = \{H, F\}$

- 

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

**Poissonscher Satz** Die Poisson-Klammer zweier Integrale der Bewegung ist wieder ein Integral der Bewegung.

$$\frac{df}{dt} = 0 \wedge \frac{dg}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \{f, g\} = 0$$

### 2.5.3 Periodizität

**periodisch**  $q(t), p(t)$

**Libration** falls

$$q(t + \tau) = q(t)$$

$$p(t + \tau) = p(t)$$

**Rotation** falls

$$q(t + \tau) = q(t)$$

$$p(t + \tau) = p(t) + q_0$$

- starrer Rotor  $q = \varphi, q_0 = 2\pi$

- Es können in physikalischen Systemen beide Arten auftreten

**System** ein System in  $\Gamma(q, s)$  mit  $2s$  Dimensionen ist periodisch, falls Projektion auf jede Ebene  $(q_i, p_i)$  periodisch ist. Die einzelnen Perioden seien  $\tau_i$ . Falls  $\forall_{i,j} : \frac{\tau_i}{\tau_j} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$  geschlossene Bahn im  $2s$ -dim. Phasenraum, andernfalls *bedingt periodisch*.

## 2.5.4 Wirkungs- und Winkelvariable

**Ziel** Periodenfrequenzen des Systems bestimmen

**Vorgehen** Zuerst normal Lösen über  $W$  danach  $E, W$  mit  $J_i$  ausdrücken und Ableiten  $\Rightarrow$  Frequenzen

- Es soll gelten:

$$\rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0$$

$\rightarrow \Rightarrow W = W(q, P)$  reicht zur Transformation

$\rightarrow \Rightarrow P = (P_1, \dots, P_s) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \text{const}$

$\rightarrow$  System vollständig separabel

$\rightarrow \Rightarrow W = \sum_i W_i(q_i, \alpha)$

$\rightarrow \Rightarrow P_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{dW_i}{dq_i} = p_i(q_i, \alpha)$

- $(q, p) \rightarrow (Q, P)$

- $P_i = \alpha_i$

$$\bullet Q_i = \begin{cases} \text{const} & \Leftrightarrow S(q, P, t) \\ \text{zyklisch} & \Leftrightarrow W(q, P) \end{cases}$$

$\rightarrow$  im zyklischen Fall  $\overline{H} = \overline{H}(P)$

- $P_i = \alpha_i \rightarrow$  kann auch  $P_i = P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  sein!

$\rightarrow$  Wirkungsvariable  $J_i = \oint dq_i p_i$

$\rightarrow$  minimale oder kleinste Wirkung  
 $A = \sum_i \int_{q_1}^{q_2} dq_i p_i = S + \int_{t_1}^{t_2} dt H$

$\rightarrow$  separables System

$$p_i = \frac{dW_i}{dq_i} \Rightarrow J_i = \oint dq_i \frac{dW_i(q_i, \alpha)}{dq_i} = J_i(\alpha)$$

$\rightarrow J_i$  gibt zuwachs  $W$  an, wenn  $q_i$  einen "Umlauf" macht

$\rightarrow J_i \rightarrow P_i \Rightarrow$

$$* \alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_s)$$

$$* W = W(q_1, \dots, q_s, J_1, \dots, J_s)$$

$$* H = \overline{H} = \alpha_1(J) = \overline{H}(J)$$

**Spezialfall**  $q_i$  zyklisch  $p_i = \text{const}$

- $q_{i0} = 2\pi$

- $J_i = 2\pi p_i$  falls  $q_i$  zyklisch

- $P = J \Leftrightarrow Q_i = \omega_i$  "Winkelvariablen"

$$\rightarrow Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} \rightarrow \omega_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$$

$$\rightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_i} \rightarrow \dot{\omega}_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \overline{H}(J) = \nu_i(J)$$

$$\rightarrow \omega_i = \nu_i(J) \cdot t + \beta_i$$

- Wie ändert sich  $\omega_j$  wenn sich  $q_i$  um einen Umlauf ändert

$$\Delta_i \omega_j = \oint_i d\omega_j = \delta_{ij}$$

- $\tau_i$  Periode von  $q_i$

$$\Delta_i \omega_i = \nu_i \tau_i \Rightarrow \nu_i(J) = \frac{1}{\tau_i}$$

- $\nu_i \hat{=}$  Frequenz

- falls  $\tau_i$  bekannt  $\rightarrow \omega_i, J_i \Rightarrow q_i(t), p_i(t)$

- Frequenz des Gesamtsystems ist *kleinste gemeinsame Vielfache* von einzelnen Frequenzen

**Entartung** Bewegung im  $2s$ -dim  $\Gamma$  periodisch, falls jede der  $s$ -Projektionen auf eine  $(q_i, p_i)$ -Ebene periodisch ist. Die Frequenz

$$\nu_i = \frac{1}{\tau_i}$$

ist im Prinzip für alle  $i$  verschieden.

**Phasenbahn**  $\Gamma$  ist abgeschlossen (einfach Periodisch) falls  $\frac{\nu_i}{\nu_j}$  rational ist für alle  $i, j$

**bedingt periodisch** wird sie im anderen Fall genannt.  $\Rightarrow$  Phasenbahn nicht geschlossen

**Frequenzverhältnis** lässt sich im abgeschlossenen Fall angeben

$$\sum_{i=1}^s \nu_i n_i^{(l)} = 0$$

- $l = 1, \dots, s-1$

- $n_i^{(l)} \in \mathbb{Z}$

- jeweils nicht alle  $n_i^{(l)} = 0$  für ein  $l$

- o.B.d.A. (umsortieren der Unabhängigen nach hinten)  $n_i^{(l)} = 0$  für  $i \in [m+1, s]$

- die Vektoren  $n_i^{(l)}$  müssen zueinander linear unabhängig sein

**m-Fache** Entartung haben wir, falls es nur  $m < s-1$  solcher Zahlensätze  $n_i^{(l)}$  gibt

- vollständige Entartung falls  $m = s-1$

- Suche ein  $F_2$  so, daß  $\overline{H}$  nur noch von  $s-m$   $J_i$  abhängt.

$$F_2(\omega, \overline{J}) = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^s n_i^{(l)} \omega_i \overline{J}_i + \sum_{l=m+1}^s \omega_l \overline{J}_l$$

$$\bullet \overline{\omega}_l = \frac{\partial F_2}{\partial \overline{J}_l} =$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^s n_j^{(l)} \omega_j & \text{für } l = 1, \dots, m \\ \omega_l & \text{für } l = m+1, \dots, s \end{cases}$$

$$\bullet \overline{\nu}_l = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \overline{J}_l} =$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^s n_j^{(l)} \nu_j = 0 & \text{für } l = 1, \dots, m \\ \nu_l & \text{für } l = m+1, \dots, s \end{cases}$$

$$\bullet \overline{\nu}_l = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \overline{J}_l} \quad s-m \text{ Stück}$$

## 3 Elektrodynamik

### 3.1 Elektrodynamik der Dielektrika

**Ziel**  $\rho(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r})$

**Anforderungen** an Materie

1. Gesamtladung der Materie = 0
2. es fließt *kein* Strom
3. anders als bei Metallen  $\rightarrow \vec{E}$ -Feld  $\neq 0$  innerhalb
4. Materie ist "polarisierbar"

**Polarisationsladungsdichte**  $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})$ 

- Gesamtladungsdichte  $\rho_g = \rho + \rho_p$
- $\vec{P}(\vec{r})$  lokales Dipolmoment / Polarisation
- $\oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{P}(\vec{r}) = -Q_p = 0$

**Flächenladungsdichte**  $\sigma_p = \vec{n} \cdot \vec{P}$ 

- $\vec{n}$  Normalenvektor auf dem Volumen

**Dielektrische Verschiebung**  $\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$ 

- $\vec{D}$  wird von den überschussladungen  $\rho$  erzeugt und ist damit unabhängig vom Material, während  $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\vec{D} - \vec{P})$  über  $\vec{P}$  vom Material abhängt.
- $\vec{D}$  ist nur Hilfsgröße,  $\vec{E}$  ist die eigentliche physikalische Größe

**Maxwell Gleichung** der Elektrostatik mit Dielektrikum

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= 0\end{aligned}$$

**3.1.1 Klassifikation von verschiedenen Polarisationsformen**

**Deformationspolarisation** es gibt keine elementaren Dipole im Material ohne äußeres Feld. Das Dipolmoment wird beim Anlegen des äußeren Feldes durch Verschieben der im Atom oder Molekül gebundenen Ladungen erzeugt (Deformation der Ladungsverteilung).

**Paraelektrika** Es gibt molekulare Dipole ("Elementardipole") wie zB. Wasser. Diese richten sich durch das externe Feld bis zu einem gewissen Grad aus. Die braunsche Molekularbewegung wirkt gegen die Orientierung. D.h. die Polarisierung ist temperaturabhängig. Ohne Externes Feld ist die Polarisierung 0

**Ferroelektrika** Stoffe mit molekularen Dipolen, die sich unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_c$  (Curie-Temperatur) spontan, d.h. ohne äußeres Feld ausrichten.

- Im Allgemeinen sind die äußeren Felder klein gegen die molekularen bzw. atomaren Felder.

**linear Response** für nicht zu starke Felder

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}$$

- $\alpha$  ist eine Matrix für anisotropes Dielektrikum
- $\alpha$  ist ein Skalar für isotropes Dielektrikum

**elektrische Suszeptibilität**  $\vec{P} = \underline{\chi} \epsilon_0 \vec{E}$ 

- $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$

**Dielektrizitätstensor**  $\underline{\epsilon} = \underline{1} + \underline{\chi}_E$ 

- isotrope Dielektrika gibt es auch  
 $\epsilon = 1 + \chi_E$

**Konvention im Folgenden** Es wird soweit nicht anders angegeben von einem isotropen linearen Medium ausgegangen.

**3.1.2 Plattenkondensator**

**Kapazität**  $C = \frac{Q}{U}$

**Plattenkondensator**  $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{F}{d} = \epsilon_r C_0$

**Kondensatoroberfläche**  $F$

$$\sigma = \frac{Q}{F} = D$$

- $D$  Betrag der dielektrischen Verschiebung

**3.1.3 Randwertprobleme**

- Maxwellgleichungen haben selbe Struktur  $\Rightarrow$  selbe Lösungsansätze (Poisson-Gl.)

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

**Grenzschichten** haben folgendes Stetigkeitsverhalten

$$\begin{aligned}\sigma &= \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \\ (\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0\end{aligned}$$

- $\sigma$  Ladungsdichte auf der Grenzschicht
- Stetigkeit in Komponenten

$$\begin{aligned}E_{1t} &= E_{2t} \\ \frac{D_{1t}}{\epsilon_r^{(1)}} &= \frac{D_{2t}}{\epsilon_r^{(2)}}\end{aligned}$$

- bei ungeladene Grenzschicht  $\sigma = 0$  zusätzlich:

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n} \\ \varepsilon_r^{(1)} E_{1n} &= \varepsilon_r^{(2)} E_{2n} \end{aligned}$$

- Durch Einbringen von Spiegelladungen lassen sich Felddeformationen durch Grenzschichten berücksichtigen. Deren Ort ist gespiegelt, allerdings haben sie einen zur Stetigkeitsbedingung passenden Wert.

### 3.1.4 Elektrostatistische Energie

**Punktladungen im Vakuum** an den Orten  $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  mit Ladungen  $(q_1, \dots, q_N)$

$$W_{ges} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{8\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

**Kontinuierliche** Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int_V \int d^3r d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{2} \int_V d^3r \varphi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r (\nabla\varphi(\vec{r}))^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r |\vec{E}|^2 \end{aligned}$$

**Energiedichte**  $w = \frac{\varepsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$

- $W = \int_V d^3r w(\vec{r})$
- Beim Überprüfen mit einer diskreten Verteilung gibt es

**Sebstenergiedichte** diese ist divergent für homogen geladene Kugel mit  $R \rightarrow 0$ . Problem für Elektron. Gelöst in Quantenfeldtheorie

**Wechselwirkungsanteil** entspricht der Diskreten energieformel

**Feldenergie im Dielektrikum**

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{E} \vec{D}$$

- $w = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}$

## 3.2 Magnetostatik in Materie

**Stromdichte**  $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t)$

**Kontinuitätsgleichung**  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

- in der Statik nur  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

**Maxwell-Gleichungen** sind

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

**Vektopotential**  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

- Umformulierung der homogenen Gleichung

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

- Entwicklung  $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \dots$

→ kein Monopolterm

→  $\vec{m}$  magnetisches Dipolmoment

→  $\vec{m} = \frac{1}{2} q \sum_i \vec{R}_i \times \vec{v}_i = \frac{q}{2m} \sum_i \vec{L}_i$

→  $\vec{L}_i$  Bahndrehimpulse

### 3.2.1 Makroskopische Feldgrößen

**Stromdichte**  $\vec{j}_m = \vec{j}_f + \vec{j}_{geb} + \vec{j}_{mag}$

- $\vec{j}_f$  Ströme freier Ladungen
- $\vec{j}_{geb}$  Ströme aufgrund Polarisation
- $\vec{j}_{mag}$  stationäre magnetische Dipole

**Magnetisierungsstromdichte**  $\vec{j}_{mag}$

- = 0 ohne äußeres Feld
- $\neq 0$  mit äußerem Feld,  $\vec{B}_{mag} \neq 0$
- stationär  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{mag}^{(i)} = 0$  für alle Teilchen  $i$
- $\vec{m}_i = \frac{1}{2} \int d^3r [(\vec{r} - \vec{R}_i) \times \vec{j}_{mag}(\vec{r})]$
- Ansatz:  $\vec{j}_{mag}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times (\vec{m} \cdot f(\vec{r}))$   
 $f = \begin{cases} 1 & \text{innerhalb } V \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases}$

**Magnetisierung**  $\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i f_i$

**Maxwell**

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j}_F \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

**lineare isotrope Medien**  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

**magnetische Suszeptibilität**  $\chi_m$

**relative Permiabilität**  $\mu_r = \chi_m + 1$

- $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

### 3.2.2 Einteilung der magn. Stoffe

**Diamagnetismus**  $\chi_m = \text{const} < 0$

- Induktionseffekt  $\vec{M} \uparrow \downarrow \vec{H}$
- magnetische Dipole werden induziert
- temperaturunabhängig
- z.B. Atome mit abgeschlossenen Schalen ( $\vec{L}_{ges} = 0$ )

**Paramagnetismus**  $\chi_m > 0$ ,  $\chi_m = \chi_m(T)$

- permanente magn. Dipole
- z.B. Atome mit nicht abgeschlossenen Schalen ( $\vec{L}_{ges} \neq 0$ )
- Sättigungsmagnetismus: ... bis alle Dipole ausgerichtet sind
- hohe Temperaturen:  $\chi_m(T) = \frac{c}{T}$  "Curie-Gesetz"

**Kollektiver Magnetismus**  $\chi_m = \chi_m(T, H)$  kein linearer Zusammenhang  $\vec{M} \neq \chi_m \vec{H}$

- permanente magn. Dipole  $\rightarrow$  richten sich *spontan* aus für  $T < T_c$

**Ferromagnetismus**  $\chi_m$  sehr groß + Hyterese

- $\rightarrow$  Weiß'schen Bezirke die sich mit Steigendem  $\vec{H}$  ausrichten
- $\rightarrow$  Remanenz + Koizitivfeldstärke

**Ferrimagnetismus** zwei ferromagnetische Untergitter  $A, B$

- $\rightarrow A, B$  sind antiparallel aber unterschiedlich groß
- $\rightarrow \vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B \neq 0$

**Antiferromagnetismus** ist Spezialfal des Ferrimagnetismus mit  $\vec{M}_A = -\vec{M}_B$

- $\rightarrow \vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B = 0$
- $\rightarrow$  kritische Temperatur:  $T_c = T_N$  "Neel-Temperatur"

### 3.3 Feldverhalten an Grenzflächen

- Es werden Randbedingungen an  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  gestellt.

**Stetigkeit** an Grenzflächen mit unterschiedlichem  $\mu_r^{(1)}, \mu_r^{(2)}$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \\ B_{1n} &= B_{2n} \\ H_{1n} \mu_r^{(1)} &= H_{2n} \mu_r^{(2)} \\ (\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{j}_F \cdot \vec{t} \end{aligned}$$

- $\vec{j}_F$  Flächenstromdichte. Wenn = 0 gilt weiter;

$$\begin{aligned} H_{2t} &= H_{1t} \\ B_{2t} \mu_r^{(1)} &= B_{1t} \mu_r^{(2)} \end{aligned}$$

### 3.4 Randwertprobleme

- i.A. Lösungen mit Hilfe des Vektorpotentials  $\vec{A}$

**Eichtransformation**  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$

- $\chi$  irgendein Skalarfeld
- $\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

**Coulomb-Eichung**  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \mu_r \vec{j}$$

- jede Koordinate entspricht Poisson-Gleichung

**Spezialfall**  $\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$

- $\vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi_m$  mit  $\varphi_m$  skalares magn. Potential
- lineares isotropes Medium

$$\vec{B} = -\mu_0 \mu_r \vec{\nabla} \varphi_m$$

- zusammen mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow$  Laplace-Gleichung

$$\Delta \varphi_m = 0$$

- mit  $\vec{M}(\vec{r}) \neq 0$  in  $V$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_m &= \vec{\nabla} \cdot \vec{M} \\ &= \varrho_m \end{aligned}$$

- $\varrho_m = \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$  effektive magnetische Ladungsdichte
- für  $r > r'$  (Radius von  $V$  = Ausdehnung der Magnetisierung)

$$\varphi_m \approx \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m}_{tot} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

- $\rightarrow \vec{m}_{tot} = \int d^3 r \vec{M}(\vec{r})$  magnetische Moment
- $\rightarrow$  Fernfeld = Dipolfeld

### 3.5 Vollständige Maxwell Gleichungen

**Vollständige** Maxwell Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varrho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{D}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \dot{\vec{D}} \end{aligned}$$

**Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

**Felder in Medien** empirische Näherung

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \underline{\epsilon_r} \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \underline{\mu_r} \mu_0 \vec{H} \\ \vec{j} &= \underline{\sigma} \vec{E} \end{aligned}$$

**Potentiale** diese lösen die beiden homogenen Maxwellgleichungen automatisch

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}} \end{aligned}$$

**Potential-DGL's** sind umgeformte inhomogene Maxwell Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \\ \square \vec{A} - \vec{\nabla} \left( \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \right) &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

**D'Alembert-Operator** ist definiert als

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

**Eichfreiheit** bietet die Möglichkeit die Potentiale zu verändern, ohne das sich die Felder ändern (*Eichtransformation*):  $\vec{B} = \vec{B}'$  und  $\vec{E} = \vec{E}'$

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \\ \phi' &= \phi - \dot{\chi} \end{aligned}$$

- $\chi$  ist beliebiges skalares Feld
- $\chi' = \chi + c$  ist äquivalent

**Helmholtz Satz** die Stromdichte  $\vec{j} = \vec{j}_L + \vec{j}_T$  lässt sich in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil aufspalten

$$\begin{aligned} \vec{j}_L &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_r \int_V d^3 r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{j}_T &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_r \times \int_V d^3 r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

**Coulomb-Eichung** bzw. *transversal Eichung*: wähle  $\chi$  so, das

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

dadurch gilt direkt

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \\ \phi &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

es bleibt nur noch zu lösen

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_T$$

- $\chi$  ist *nicht* Lorentzinvariant!
- Wahl von  $\chi$

$$\begin{aligned} a(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ \Delta \chi &= -a(\vec{r}, t) \\ \chi &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{a(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

**Lorentzeichung** wähle  $\chi$  so, das

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} = 0$$

dadurch gilt direkt

$$\begin{aligned} \square \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \\ \square \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

- Wahl von  $\chi$

$$\begin{aligned} a(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \\ \square \chi &= -a(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

- vollständige Entkopplung von  $\vec{A}$  und  $\phi$
- $\chi$  ist lorentzinvariant / in jedem Inertialsystem gleich.
- $\chi$  ist nicht eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned} \square \Lambda(\vec{r}, t) &= 0 \\ \chi' &= \chi + \Lambda \end{aligned}$$

**3.6 Energie & Impulssatz in der Elektrodynamik**

**Energiesatz**

- Gegeben sei  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  und ein Teilchen mit der Ladung  $q$  in diesen Feldern mit  $\vec{v}$  bewegt
- $\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

**Kraftdichte**  $\vec{f}(\vec{r}, t)$

$$\rho(\vec{r}, t) \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right]$$

- $\vec{v}$  ist das Geschwindigkeitsfeld mit dem  $\rho$  strömt
- $\vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

$$\begin{aligned} \frac{dW_V}{dt} &=_{mech} \int_V d^3 r \vec{j} \cdot \vec{E} \\ &= \int_V d^3 r \left[ -\vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right] \\ &=_{elekt} - \int_V \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \right) \end{aligned}$$

**Pointingvektor**  $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$

- $\frac{dW_v^{Strahlung}}{dt} = \int_{\partial V} d\vec{f} \vec{S}$
- $\frac{dW_v^{Feld}}{dt} = \int_V d^3r \frac{\partial w}{\partial t}$
- Achtung, i.A. ist das zeitliche Mittel verlangt  $\rightarrow$  steht hier nicht direkt!

**Energiestromdichte**  $|\vec{S}|$

- in Richtung  $\frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}$

**Energiedichte**  $w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [\vec{H} \vec{B} + \vec{E} \vec{D}]$

- Achtung, i.A. ist das zeitliche Mittel verlangt  $\rightarrow$  steht hier nicht direkt!

**Kontinuitätsgleichung Energie**

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{\text{Feld}} + \underbrace{\vec{\nabla} \vec{S}}_{\text{Strahlung}} + \underbrace{\vec{j} \vec{E}}_{\text{mechanisch}} = 0$$

- Pointingsches Theorem
- entspricht Energieerhaltung

**Feldimpuls**  $\vec{p}^{Feld} = \int_V d^3r \vec{D} \times \vec{B}$

- $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

**Maxwellscher Spannungstensor**  $T$

$$T_{ij} = \epsilon_r \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \epsilon_r \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_r \mu_0} |\vec{B}|^2 \right)$$

- $\vec{T}_i = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{d}{dt} (\vec{p}_V^{mech} + \vec{p}_V^{Feld})_i \\ &= \int_V d^3r \vec{\nabla} \vec{T}_i \\ &= \int_{\partial V} d\vec{f} \vec{T}_i \end{aligned}$$

- Impulsfluss  $d\vec{f} \vec{T}_i$  durch die Oberfläche  $d\vec{f}_i$
- $\vec{F}$  gesamte auf das System in  $V$  wirkende Kraft
- $\vec{p}_V^{mech}$  ist der zusätzliche mechanische Impuls (hier im meistens = 0)

### 3.7 Elektromagnetische Wellen

**homogenes Medium** sei gegeben, und damit

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_r \mu_0 \vec{H} \\ \vec{D} &= \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \end{aligned}$$

**Annahme**  $\rho(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$

**Wellengleichung** folgen aus den mit den Annahmen modifizierten Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \square \vec{E} &= \vec{0} \\ \square \vec{B} &= \vec{0} \end{aligned}$$

**Geschwindigkeit**  $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}$

**Lichtgeschwindigkeit**  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

**Brechungsindex**  $n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$

**Lösungsweg**  $\Psi(\vec{r}, t)$  sei eine der Komponenten von  $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$

- DGL  $\square \Psi(\vec{r}, t) = 0$
- Lösungsansatz  $\Psi(\vec{r}, t) = f_-(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + f_+(\vec{k}\vec{r} + \omega t)$
- Phase:  $\varphi_{\pm} = \vec{k}\vec{r} \pm \omega t$   
o.B.d.A.  $\omega > 0$
- DGL mit Ansatz  $f_{\pm}$ :  $\Delta \Psi(\vec{r}, t) = k^2 \Psi'' \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{r}, t) = \omega^2 \Psi''$
- Lösung mit beliebigen  $f_{\pm}$  mit  $\omega = uk$
- Physikalische Interpretation

$\rightarrow$  Betrachte Flächen mit gleichem  $f_{\pm}$  bzw.  $f_{\pm}$  Wert  $\Rightarrow \varphi = \varphi_0 = \text{const}$

$\rightarrow$  diese wandern mit  $t$  senkrecht zu  $\vec{k}$

$$r_{||} = \frac{\vec{r} \vec{k}}{k} = \frac{\varphi_0}{k} \mp \frac{\omega}{k} t$$

$\rightarrow f_-$  bewegt sich in  $\vec{k}$  Richtung  
 $f_+$  bewegt sich in  $-\vec{k}$  Richtung

**Phasengeschwindigkeit**  $\frac{dr_{||}}{dt} = \frac{\omega}{k} = u$

**Wellenvektor**  $\vec{k}$

- auch Ausbreitungsvektor genannt

**Allgemeine Lösung** ist eine Überlagerung (da Gleichungen linear) von

$$\begin{aligned} f_-(\vec{r}, t) &= A e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ f_+(\vec{r}, t) &= B e^{i(\vec{k}\vec{r} + \omega t)} \end{aligned}$$

- bei festen  $t$  sind Ebenen konstanter Phase äquidistant

**Wellenlänge**  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

- $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$
- $\nu = \frac{1}{\tau}$
- $u = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{k} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{\tau}$

**Felder** ergeben sich entsprechend zu

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

- $f_+ = 0$  da nur Propagation in eine Richtung betrachtet wird.
- mit Überlagerungen von  $\omega \in (-\infty, \infty)$  wird  $f_+$  dadurch wieder aufgenommen (negative  $\omega$ ).
- Diese Wellen werden auch als *ebene Wellen* bezeichnet, da Ihre Wellenfronten parallele Ebenen senkrecht zu  $\vec{k}$  bilden.
- $\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$
- $\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{u^2} \vec{E}_0$
- $\vec{k} \vec{E}_0 = 0$
- $\vec{k} \vec{B}_0 = 0$
- $|\vec{B}_0|^2 = \frac{1}{u^2} |\vec{E}_0|^2$
- $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem
- um Phasenverschiebungen zu realisieren:  $\vec{E}_0, \vec{B}_0 \in \mathbb{C}^3$
- Physikalische  $\vec{B}, \vec{E}$  Felder sind Realteile dieser Felder!!

**Polarisation** O.b.d.A  $\vec{k} = k\vec{e}_z$  damit gilt:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= (E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{u} (-E_{0y}\vec{e}_x + E_{0x}\vec{e}_y) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

- Betrachte nur  $\vec{E}$  Feld,  $\vec{B}$  analog
- Durch Realteilbildung und umschreiben

$$\begin{aligned}E_x &= |E_{0x}| \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \\ E_y &= |E_{0y}| \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi + \delta)\end{aligned}$$

**linear**  $\delta = n \cdot \pi$  mit  $n \in \mathbb{Z}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

**zirkular**  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$  und  $|E_{0x}| = |E_{0y}| = E$

$$\vec{E} = E \begin{pmatrix} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \\ \mp \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\delta = +\frac{\pi}{2}$  ist rechtszirkular (gegen den Uhrzeigersinn)
- $\delta = -\frac{\pi}{2}$  ist linkszirkular (mit dem Uhrzeigersinn)

**Elliptisch**  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$  und  $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} |E_{0x}| \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \\ \mp |E_{0y}| \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\frac{E_x}{|E_{0x}|}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|}\right)^2 = 1$$

**Allgemein** handelt es sich um eine Ellipse, die in der  $x, y$  Ebene um einen gewissen Winkel verkippt ist

**Wellenpakete** sind die allgemeinsten Lösungen, also eine Überlagerungen von den vorherigen Lösungen

$$F_{\pm}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) f_{\pm}(kz \pm \omega t)$$

- $a(k)$  ist die Gewichtungsfunktion
- ist Physikalisch relevant, da Welle meist mit über ein ganzes "Frequenzband" verteilt ist
- Es gilt meist  $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega)$

**dispersives Medium**  $\omega = uk \Rightarrow \omega = \omega(k)$

**Gruppengeschwindigkeit**  $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$  ist Teil der Taylorentwicklung von  $\omega(k)$

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} + \dots$$

→ i.a.  $u \neq v_g$

**Wellenpaket** ist Näherungslösung mit Abbruch der Entwicklung von  $\omega(k)$  nach ersten Glied

$$\begin{aligned}H_{\pm}(z, t) &= e^{(k_0 z \pm \omega_0 t)} \hat{H}_{\pm}(z \pm v_g t) \\ \hat{H}_{\pm}(z \pm v_g t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dq b(k_0 + q) e^{iq(z \pm v_g t)}\end{aligned}$$

- $\hat{H}_{\pm}$  ist die Einhüllende des Wellenpaketes, das sich mit  $v_g$  vorwärts bewegt

**Kugelwellen** sind Lösungen in der Basis der Kugelkoordinaten

- $\square$  lässt sich in den Kugelkoordinaten als Summe schreiben
- Lösung  

$$\Psi_{\pm} = \frac{A_{\pm}}{r} e^{i(kr \pm \omega t)}$$
- gleiche Wellenlänge wie ebene Wellen
- Es gibt mit  $\pm$  wieder ein und auslaufende Wellen

### 3.7.1 Allgemeine Lösung der Wellengleichung

**Fourier-Transformation** allgemein in einer Dimension

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{+ikx} \end{aligned}$$

- In  $n$  Dimensionen muss diese Transformation für jede Komponente des Vektors durchgeführt werden
- $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$

**dreidimensional** für Wellen

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt \Psi(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

**Gegeben** sind

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}) &= \Psi(\vec{r}, t = 0) \\ v_0(\vec{r}) &= \dot{\Psi}(\vec{r}, t = 0) \end{aligned}$$

- bzw. entsprechend Vektor  $\vec{E}, \vec{B}$

**Ansatz** mit Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} \square \Psi(\vec{r}, t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ \underbrace{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{u^2}\right)}_{=0} \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) &= 0 \end{aligned}$$

liefert den Ansatz

$$\tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) = a_+(\vec{k}) \delta(\omega + uk) + a_-(\vec{k}) \delta(\omega - uk)$$

$$a_{\pm}(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r e^{-\vec{k}\vec{r}} \left( \Psi_0(\vec{r}) \mp \frac{i}{ku} v_0(\vec{r}) \right)$$

und damit durch Rücktransformation und einsetzen das resultierende Feld

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3r' \int d^3r'' e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}'')} \\ &\cdot \left[ e^{ikut} \left( \Psi_0(\vec{r}'') - \frac{i}{ku} v_0(\vec{r}'') \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-ikut} \left( \Psi_0(\vec{r}'') + \frac{i}{ku} v_0(\vec{r}'') \right) \right] \\ &= \int d^3r' (\dot{D}(\vec{r}-\vec{r}', t) \Psi_0(\vec{r}') + D(\vec{r}-\vec{r}', t) v_0(\vec{r}')) \end{aligned}$$

- Integraldarstellung von  $\square \Psi(\vec{r}, t) = 0$  mit Randbedingungen von oben

**Abkürzung**

$$\begin{aligned} D(\vec{r}, t) &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{ku} e^{i\vec{k}\vec{r}} (e^{ikut} - e^{-ikut}) \\ &= \frac{-1}{2(2\pi)^3 ur} \int_{-\infty}^{\infty} dk (e^{ik(r+ut)} - e^{-ik(r-ut)}) \\ &= -\frac{1}{4\pi ur} [\delta(r+ut) - \delta(r-ut)] \\ &= \frac{1}{4\pi ur} \begin{cases} \delta(r-ut) & t > 0 \\ -\delta(r+ut) & t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### 3.7.2 Energietransport in Wellen

**Rechenregeln** zur Realteilmittlung von komplexen Funktionen

- $\vec{a}(\vec{r}, t) = a_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$
- $\vec{b}(\vec{r}, t) = b_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$
- Mittelung  

$$\overline{A(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} A(t) dt$$
- $\Re(\vec{a}) \cdot \Re(\vec{b}) = \frac{1}{2} \Re(\vec{a}^* \cdot \vec{b}) = \frac{1}{2} \Re(\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^*)$
- $\Re(\vec{a}) \times \Re(\vec{b}) = \frac{1}{2} \Re(\vec{a}_0^* \times \vec{b}_0) = \frac{1}{2} \Re(\vec{a}_0 \times \vec{b}_0^*)$

**Annahmen** sind, dass  $\vec{E}, \vec{B}$  folgende Gestalt haben

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

**Energiedichte**  $\overline{w}(\vec{r}, t)$

$$\frac{1}{4} \Re \left( \underbrace{\vec{H}_0 \vec{B}_0^*}_{\text{magnetisch}} + \underbrace{\vec{E}_0 \vec{D}_0^*}_{\text{elektrisch}} \right) =$$

**Pointingvektor**  $\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \Re(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)$

**Spezialfall** mit  $\epsilon_r, \mu_r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{w}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r |E_0|^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0 \mu_r} |B_0|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{S}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}} |\vec{E}_0|^2 \vec{e}_k \\ &= u \overline{w}(\vec{r}, t) \vec{e}_k \end{aligned}$$

- $\vec{e}_k = \frac{\vec{k}}{k}$

**3.7.3 Wellenausbreitung in elektrischen Leitern**

**Leiterstrom** ist zu berücksichtigen (Ohmsches Gesetz)

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

**Satz**  $\rho(\vec{r}, t = 0) = 0 \Rightarrow \forall t : \rho(\vec{r}, t) = 0$

**Telegraphengleichung** ist resultierende aus Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \left( \Delta - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \end{aligned}$$

**komplexe Dielektrizitätskonstante**  $\bar{\epsilon}_r = \epsilon_r + i \frac{\mu_0}{\epsilon_0 \omega}$

**komplexe Geschwindigkeit**  $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \bar{\epsilon}_r \mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \bar{\epsilon}_r}}$

**Lösung** der Telegraphengleichung

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ &= \vec{E}_0 e^{-\frac{\gamma \omega}{c} z} \exp \left( i \omega \underbrace{\left( \frac{\bar{n}}{c} z - t \right)}_{t_{ret}} \right) \end{aligned}$$

mit

$$\vec{k} = \frac{\omega}{u} \vec{e}_k$$

**Extinktionskoeffizient**  $\gamma$  sorgt für

- einen kontinuierlichen Abfall der Amplitude im Medium
- Phasenverschiebung zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$

**Brechungsindex**  $\sqrt{\bar{\epsilon}_r \mu_r} = \bar{n} + i\gamma$

- mit  $\bar{n}, \gamma \in \mathbb{R}$
- Wie gehabt  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \in \mathbb{R}$
- $\bar{n}^2 - \gamma^2 = n^2$
- $2\gamma\bar{n} = \frac{\sigma \mu_r}{\epsilon_0 \omega}$
- $\bar{n}^2 = \frac{n^2}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r \omega} \right)^2} \right]$
- $\gamma^2 = \frac{n^2}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r \omega} \right)^2} \right]$
- Im Grenzwert  $\sigma \rightarrow 0$  gilt:  
 $\bar{n} = n$   
 $\gamma = 0$

**Eindringtiefe**  $\delta = \frac{c}{\gamma \omega} = \frac{\lambda_0}{2\pi \gamma}$

- Strecke, nach der die Amplitude auf  $\frac{1}{e}$  abgesunken ist
- $\lambda_0$  Wellenlänge im Vakuum

**Wellenzahl**  $\vec{k}$  ist komplex mit  $\vec{k} = k_0 + ik_1$

- $k_0 = \frac{\omega}{c} \bar{n}$   
 $k_1 = \frac{\omega}{c} \gamma$
- $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-k_1 z} e^{i(k_0 z - \omega t)}$

**Phasengeschwindigkeit**  $u_p = \frac{\omega}{k_0} = \frac{c}{\bar{n}} < \frac{c}{n}$

**Wellenlänge**  $\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{k_0} = \lambda \frac{n}{\bar{n}} < \lambda$

- $\lambda$  Wellenlänge im Isolator

**Phasenlage** von  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{c} (\bar{n} + i\gamma) (\vec{e}_k \times \vec{E}) \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{\bar{n}^2 + \gamma^2} e^{i\varphi} (\vec{e}_k \times \vec{E}) \end{aligned}$$

- $\varphi = \arctan\left(\frac{\gamma}{\bar{n}}\right)$  ist die Phasenverschiebung zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$

**Energiestromdichte** (zeitgemittelt)

$$\begin{aligned} \bar{S}(\vec{r}) &= \frac{|E_0|^2}{2\mu_0 \mu_r u_p} e^{-2\gamma \frac{\omega}{c} z} \vec{e}_{\vec{E}_0 \times \vec{B}_0} \\ &= u_p \bar{w}(\vec{r}) \vec{e}_{\vec{E}_0 \times \vec{B}_0} \end{aligned}$$

**zeitgemittelte Energiedichte** ist gegeben durch

$$\bar{w}(\vec{r}) = \frac{|E_0|^2}{2\mu_0 \mu_r u_p^2} e^{-2\gamma \frac{\omega}{c} z}$$

**3.8 Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen am Isolator**

**3.8.1 Feldverhalten an Grenzflächen**

**Normalkomponenten**  $\vec{n}$  = Normaleinheitsvektor

$$\begin{aligned} \vec{n} \left( \vec{D}_2 - \vec{D}_1 \right) &= \sigma_F \\ \vec{n} \left( \vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

- $\sigma_F$  ist die Flächenladungsdichte

**Tangentialkomponenten**

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \left( \vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right) &= \vec{j}_F \\ \vec{n} \times \left( \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

- $\vec{j}_F$  ist die Flächenstromdichte

### 3.8.2 Brechungs- und Reflexionsgesetz

Randbedingung sind

- $\sigma_F = 0$
- $\vec{j}_F = \vec{0}$
- es handelt sich um ebene Wellen

Einfallende Welle

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{01} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_1 t)} \\ \vec{B}_1 &= \frac{1}{\omega_1} (\vec{k}_1 \times \vec{E}_1) \\ &= \frac{1}{u_1} (\vec{e}_{k_1} \times \vec{E}_1)\end{aligned}$$

- $\vartheta_1 = \angle(\vec{k}_1, \vec{n})$

Reflektiert wird

$$\begin{aligned}\vec{E}_{1r} &= \vec{E}_{01r} e^{i(\vec{k}_{1r} \vec{r} - \omega_{1r} t)} \\ \vec{B}_{1r} &= \frac{1}{\omega_{1r}} (\vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r}) \\ &= \frac{1}{u_{1r}} (\vec{e}_{k_{1r}} \times \vec{E}_{1r})\end{aligned}$$

- $\vec{k}_{1r}$  liegt in  $(\vec{k}_1, \vec{n})$ -Ebene
- $\vartheta_{1r} = \vartheta_1 = \angle(\vec{k}_{1r}, \vec{n})$
- $k_{1r} = k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_r^{(1)} \varepsilon_r^{(1)}}$

Transmittiert wird

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \vec{E}_{02} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_2 t)} \\ \vec{B}_2 &= \frac{1}{\omega_2} (\vec{k}_2 \times \vec{E}_2) \\ &= \frac{1}{u_2} (\vec{e}_{k_2} \times \vec{E}_2)\end{aligned}$$

- $\vec{k}_2$  liegt in  $(\vec{k}_1, \vec{n})$ -Ebene
- $k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_r^{(2)} \varepsilon_r^{(2)}}$
- $\vartheta_2 = \angle(\vec{k}_2, \vec{n})$

Snellius'sches-Brechungsgesetz  $\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1}$

### 3.8.3 Intensität bei Reflexion und Brechung

Fall 1  $\vec{E}_1 \perp$  Einfallsebene polarisiert

- $E_{02} = E_{01} + E_{01r}$
- $\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + \frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \vartheta_1}}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{\perp} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - \frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \vartheta_1}}{n_1 \cos \vartheta_1 + \frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \vartheta_1}}$

Fall 2  $\vec{E}_1 \parallel$  Einfallsebene polarisiert

- $E_{02} \cos \vartheta_2 = (E_{01} - E_{01r}) \cos \vartheta_1$
- $\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_{\parallel} = \frac{2n_1 n_2 \cos \vartheta_1}{\frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}} n_2^2 \cos \vartheta_1 + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \vartheta_1}}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{\parallel} = \frac{\frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}} n_2^2 \cos \vartheta_1 - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \vartheta_1}}{\frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}} n_2^2 \cos \vartheta_1 + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \vartheta_1}}$

### 3.8.4 Fresnel'sche Formeln

Bedingung ist

$$\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)}$$

was in guter Näherung für fast alle Materialien erfüllt ist.

- $\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_{\perp} = \frac{2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{\perp} = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
- $\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_{\parallel} = \frac{2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{\parallel} = \frac{\tan(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\tan(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
- Keine Brechung bei  $\frac{\pi}{2}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{\perp} < 0 \Rightarrow$  Phasensprung um  $\pi$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{\parallel} > 0$  für  $\vartheta_1 + \vartheta_2 \leq \pi \Rightarrow$  Phasensprung um  $\pi$  für  $\vartheta_1 + \vartheta_2 > \frac{\pi}{2}$
- *Brewster-Winkel*  
 $\tan \vartheta_B = \frac{n_2}{n_1}$   
 Reflektierte Welle ist linear ( $\perp$ ) polarisiert!!

### 3.8.5 Senkrechter Fall

- Einfallsebene nicht definiert  
 $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$
- $\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_{\perp} = \left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_{\parallel} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{\perp} = -\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{\parallel} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$

### 3.8.6 Energietransport

Reflexionskoeffizient  $R = \left| \frac{\vec{S}_{1r}\vec{n}}{\vec{S}_1\vec{n}} \right| = \left| \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|^2$

Transmissionskoeffizient  $T = \left| \frac{\vec{S}_2\vec{n}}{\vec{S}_1\vec{n}} \right| = \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(2)}\mu_r^{(1)} \cos\vartheta_2}{\varepsilon_r^{(1)}\mu_r^{(2)} \cos\vartheta_1} \left| \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|^2}$

$R + T = 1$

### 3.8.7 Totalreflexion

Bedingung  $n_1 > n_2$

Grenzwinkel  $\sin\vartheta_G = \frac{n_2}{n_1}$

$\left( \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right)_{\parallel} = e^{-i2\varphi}$   
 $\tan\varphi = \frac{1}{\sin^2\vartheta_G} \frac{\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_G}}{\cos\vartheta_1}$

$\left( \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right)_{\perp} = e^{-i2\Psi}$   
 $\tan\Psi = \frac{\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_G}}{\cos\vartheta_1}$

- Phasenverschiebung - i.A.  $\varphi \neq \Psi$
- im Medium 2 exponentielle Dämpfung  
 $\cos\vartheta_2 = i\sqrt{\left(\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_G}\right)^2 - 1}$   
 $\vec{S}_2\vec{n} = 0$

## 3.9 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

### 3.9.1 Inhomogene Wellengleichung

Ziel ist für gegebene

$$\rho(\vec{r}, t)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t)$$

passende Potentiale

$$\phi(\vec{r}, t)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t)$$

zu finden

**Lorentzgleichung** formt uns die zu lösenden inhomogenen DGL um in

$$\square\phi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$\square\vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_r\mu_0\vec{j}(\vec{r}, t)$$

**Problemstellung** ist also 4mal eine Gleichung der Form

$$\square\Psi(\vec{r}, t) = \sigma(\vec{r}, t)$$

zu lösen, wobei  $\sigma$  hier als *Quellfunktion* bezeichnet wird.

**Greensche Funktion** ist die Lösung der inhomogenen DGL

$$\square G(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt' G(\vec{r}-\vec{r}', t-t')\sigma(\vec{r}', t')$$

- $G(\vec{r}-\vec{r}', t-t')$  beschreibt Ausbreitung einer Störung in  $(\vec{r}', t')$  zur Zeit  $t$  am Ort  $\vec{r}$ .
- Kausalität fordert  $t > t'$ . Dies führt zur retardierten Lösung:

$$G_0^{ret}(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta\left(t' - \underbrace{\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{u}\right)}_{t_{ret}}\right)$$

mit der retardierten Zeit  $t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{u}$

- Theoretisch gibt es noch zusätzlich eine nichtkausale, die sogenannte avancierte Lösung:

$$G_0^{avan}(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta\left(t' - \underbrace{\left(t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{u}\right)}_{t_{avan}}\right)$$

mit der avancierten Zeit  $t_{avan} = t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{u}$

- Allgemeine Lösung ist Greensche Funktion *plus Lösung der homogenen DGL* wie in 3.7.1 auf Seite 16 hergeleitet.

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \text{hom. Lsg}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \text{hom. Lsg}$$

- Forminvariant zur E-Statik und M-Statik aber mit  $t_{ret}$ !
- Lorentzgleichung ist erfüllt!

### 3.9.2 Zeitlich oszillierende Quellen

**Einfachheit halber** können wir hier Dank der Linearität der Maxwellgleichungen anstatt

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \rho_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \vec{j}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

nur

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

betrachten und hinterher wieder aufintegrieren.

**Gegeben** sei eine Stromverteilung der Form

$$\vec{j}(\vec{r}, t_{ret}) = \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{u}|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

- $\vec{A}(\vec{r})$  hängt nur über  $k = \frac{\omega}{u}$  von  $\omega$  ab
- $\vec{A}(\vec{r}, t)$  oszilliert mit gleicher Frequenz wie Quelle
- $\vec{r}$  außerhalb Quellenbereich ( $|r| \gg d$ )  
 $\vec{E} = i \frac{u^2}{\omega} e^{-i\omega t} \nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$
- $\vec{E}$  bestimmt durch  $\vec{A} \rightarrow \varphi$  nicht nötig!
- Lösung i.A. nicht analytisch integrierbar
- $d$  ist die Ausdehnung der Stromverteilung

**kleine Quellen**  $d \ll r, \lambda$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') + \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - ik\right) \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}', t) (\vec{e}_r - \vec{r})$$

**Elektrische Dipolstrahlung** ist der erste Term

$$\begin{aligned} \vec{A}_1(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \\ &= -i\omega \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p} \end{aligned}$$

- $\vec{p} = \int d^3 r \varrho(\vec{r}, t)$  ist das Dipolmoment der Ladungsverteilung
- Die dazugehörigen Felder sind

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} u k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) (\vec{e}_r \times \vec{p}) \\ \vec{E}_1(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{e^{ikr}}{r} [k^2 (\vec{e}_r \times \vec{p}) \times \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} - ik\right) (3\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{p}) - \vec{p})] \end{aligned}$$

- 2.te Term =  $\vec{A}_2$ : Mag. Dipolstrahlung + el. Quadrupolstrahlung

$$\vec{A}_2(\vec{r}) = \vec{A}_2^{mD}(\vec{r}) + \vec{A}_2^{eQ}(\vec{r})$$

**Magnetische Dipolstrahlung** ist

$$\vec{A}_2^{mD}(\vec{r}) = ik \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e}_r \times \vec{m})$$

→ Magnetisches Dipolmoment

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$$

→ Die dazugehörigen Felder sind

$$\begin{aligned} \vec{B}_2^{mD}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} [k^2 (\vec{e}_r \times \vec{m}) \times \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} - ik\right) (3\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{m}) - \vec{m})] \\ \vec{E}_2^{mD}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{k^2}{u} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) (\vec{e}_r \times \vec{m}) \end{aligned}$$

→ durch Vergleich mit el. Dipolstrahlung gewonnen

→ Strahlungsleistung pro Raumwinkel

$$\frac{dP_s^{(2)}}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{k^4 m^2}{u} \sin^2 \vartheta$$

**Elektrische Quadrupolstrahlung** ist

$$\begin{aligned} \vec{A}_2^{eQ}(\vec{r}) &= -\omega k \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \frac{e^{ikr}}{r} \vec{I}(\vartheta, \varphi) \\ &= -u k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \\ &\quad \cdot (\vec{Q}(\vec{e}_r) + \vec{e}_r \int d^3 r' r'^2 \varrho(\vec{r}')) \end{aligned}$$

→ Elektrischer Quadrupolterm

$$\begin{aligned} \vec{r}_{(\vartheta, \varphi)} &= \frac{1}{2} \int d^3 r' \vec{r}' (\vec{e}_r \cdot \vec{r}') \varrho(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{3} (\vec{Q}(\vec{e}_r) + \vec{e}_r \int d^3 r' r'^2 \varrho(\vec{r}')) \\ I_{ij}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_r)_i \left( \int d^3 r' Q_{ij}(\vec{r}') + \int d^3 r' r'^2 \varrho(\vec{r}') \right) \end{aligned}$$

→ Quadrupoltensor

$$\underline{Q} = Q_{ij}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) (3r_i r_j - r^2 \delta_{ij})$$

→  $\vec{Q}(\vec{e}_r) = \underline{Q} \vec{e}_r$

**Strahlungszone**  $r \gg d$  oder auch *Fernzone* genannt

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') e^{-ik \vec{e}_r \cdot \vec{r}'}$$

mit zusätzlich  $\lambda \gg d$  gilt  $kr' \ll 1$  und damit das endgültige Fernfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}')$$

- es handelt sich hierbei um eine Kugelwelle mit Winkelabhängigen Koeffizienten
- Die zugehörigen Felder sind

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} u k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e}_r \times \vec{p}) \\ \vec{E}_1(\vec{r}) &= u \left( \vec{B}_1 \times \vec{e}_r \right) \end{aligned}$$

- Energiedichte

$$\bar{w}_1(\vec{r}) = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{k^4 p^2}{r^2} \sin^2 \vartheta$$

mit  $\vartheta = \angle(\vec{e}_r, \vec{p})$

$$\vec{S}_1(\vec{r}) = \vec{e}_r u \bar{w}_1(\vec{r})$$

- abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel

$$\begin{aligned} \frac{dP_S}{d\Omega} &= r^2 \vec{S}_1(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r \\ &= \frac{u}{32\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r} k^4 p^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

- Gesamte Strahlungsleistung

$$P_S = \frac{u}{12\pi \epsilon_0 \epsilon_r} k^4 p^2$$

- Quadrupol Felder

$$\begin{aligned} \vec{B}^{eQ}(\vec{r}) &\approx -i \frac{\mu_0 \mu_r}{24\pi} u k^3 \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e}_r \times \vec{Q}) \\ \vec{E}^{eQ}(\vec{r}) &\approx -i \frac{k^3}{24\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{e^{ikr}}{r} \left( (\vec{e}_r \times \vec{W}) \times \vec{e}_r \right) \end{aligned}$$

**Nahzone** mit  $k|\vec{r} - \vec{r}'| \ll 1$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

was der Magnetostatik entspricht.

- Die zugehörigen Felder sind

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} u \frac{ik}{r^2} (\vec{e}_r \times \vec{p})$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{3\vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3}$$

- $\vec{E}$  entspricht einem elektrostatischem Dipolfeld!
- dominant Elektrischer Charakter
- Zeitabhängigkeit über Dipolmoment  $\vec{p}$ .

### 3.10 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

**Inertialsysteme** Bezugssysteme mit konstanter Relativgeschwindigkeit

**Ortsvektor** kovariant

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

**Norm** von Kovarianten Vektoren  $a_\mu a^\mu$  ist erhalten bei Lorentztransformation

**Summenkonvention** für 4-er Vektoren ist, das immer über ein Paar von von Indizes summiert wird, wobei einer unten, und einer oben stehen muss. Beide Vektoren müssen dazu multipliziert geschrieben sein. Summiert wird von 0 bis 3.

**Metrischer Tensor** bzw. der Indexverschiebungsoperator ist

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$
- $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$
- $g_{\mu\nu} x^\nu = x_\mu$
- $g^{\mu\nu} x_\nu = x^\mu$

**Einheitsmatrix** für 4-er Vektoren

$$\delta_\mu^\nu = g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Vierergeschwindigkeit**  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$

**Eigenzeit**  $\tau$

**Minkowski-Kraft**  $K^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} = m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \gamma \left( \frac{\vec{F}\vec{v}}{c}, F_x, F_y, F_z \right)$

**Lorentz-Gamma-Faktor**  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  mit  $\beta = \frac{v}{c}$

**Lorentztransformation** mit der Matrize (hier exemplarisch in  $z$  Richtung mit  $v$  bewegt)

$$L_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

**Viererableitung**  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

**Stromdichte**  $j^\mu = (c\rho, \vec{j}) = \gamma \rho_0 (c, \vec{v}) = \rho_0 u^\mu$

- $\rho_0$  ist die Ladungsdichte
- $\vec{j} = \vec{v}\rho_0$

**Kontinuitätsgleichung**  $\partial_\mu j^\mu = 0$

**Wellengleichung**  $(\partial^\mu \partial_\mu) A^\mu = \mu_0 j^\mu$

- $\mu_0$  Permiabilitätskonstante
- $\partial^\mu \partial_\mu = \square$
- Gilt nur in Lorentzzeichnung

**Lorentzzeichnung**  $\partial_\mu A^\mu = 0$

**Feldstärketensor**  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

- Antisymmetrisch  
 $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$
- Komponenten

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \left( \vec{B}^2 - \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 \right)$  ist eine Lorentzinvariante

**inhomogene Maxwellgleichung**  $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\beta$

**Jakobi-Identität**  $\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$

**4-dim Epsilontensor**  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  =

}	+1	gerade Permutation von (0, 1, 2, 3)
	-1	ungerade Permutation von (0, 1, 2, 3)
	0	zwei Indizes gleich

**Dualrer Feldstärketensor**  $\overline{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$

- $\overline{F}^{\mu\nu} = -\overline{F}^{\nu\mu}$

- Komponenten

$$\overline{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{1}{c}E_z & -\frac{1}{c}E_y \\ B_y & -\frac{1}{c}E_z & 0 & \frac{1}{c}E_x \\ B_z & \frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_x & 0 \end{pmatrix}$$

homogene Maxwellgleichung  $\partial_\alpha \overline{F}^{\alpha\beta} = 0$

**Transformation der Felder** erst für den Spezialfall

$$\vec{v} = v\vec{e}_z$$

$$E'_x = \gamma(E_x - \beta c B_y)$$

$$E'_y = \gamma(E_y + \beta c B_x)$$

$$E'_z = E_z$$

$$B'_x = \gamma\left(B_x + \frac{\beta}{c}E_y\right)$$

$$B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_x\right)$$

$$B'_z = B_z$$

- $\vec{E}\vec{B} = \vec{E}'\vec{B}'$  ist Lorentzinvariante
- allgemeiner Fall mit  $\vec{v}$  in beliebiger Richtung

$$\vec{E}' = \gamma \left[ \vec{E} + c(\vec{\beta} \times \vec{B}) \right] - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{E})$$

$$\vec{B}' = \gamma \left[ \vec{B} - \frac{1}{c}(\vec{\beta} \times \vec{E}) \right] - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{B})$$

# Index

- 4-dim Epsilontensor, 21
- Anharmonische Schwingungen, 2
- Antiferromagnetismus, 12
- Aperiodischer Grenzfall, 2
- Austauschtransformation, 5
  
- bedingt periodisch, 8, 9
- Brechung, 17
- Brechungsindex, 14, 17
- Brewster-Winkel, 18
  
- Coulomb-Eichung, 12, 13
- Curie-Temperatur, 10
  
- D'Alembert-Operator, 13
- Deformationspolarisation, 10
- Diamagnetismus, 12
- Dielektrika, 9
- Dielektrische Verschiebung, 10
- Dielektrizitätskonstante, 17
- Dielektrizitätstensor, 10
- Dipolstrahlung, 20
- dispersives Medium, 15
- Dualrer Feldstärketensor, 21
  
- ebene Wellen, 15
- Eichfreiheit, 13
- Eichtransformation, 12, 13
- Eigenzeit, 21
- Eindringtiefe, 17
- Einheitsmatrix, 21
- Elektrische Dipolstrahlung, 20
- Elektrische Quadrupolstrahlung, 20
- elektrische Suszeptibilität, 10
- Elektrodynamik, 9
- Elektromagnetische Wellen, 14
- Elektrostatistische Energie, 11
- Elementardipole, 10
- elliptische Polarisation, 15
- Energiedichte, 11, 14, 16, 17
- Energiesatz, 13
- Energiestromdichte, 14, 17
- Energietransport in Wellen, 16
- Entartung, 9
- Epsilontensor, 21
- Erzeugende Funktionen, 5
- erzeugenden Funktionen, 5
- Erzwungene Schwingung, 2
- Extinktionskoeffizient, 17
  
- Feldenergie im Dielektrikum, 11
- Felder in Medien, 13
- Feldimpuls, 14
- Feldstärketensor, 21
- Fernzone, 20
- Ferrimagnetismus, 12
- Ferroelektrika, 10
- Ferromagnetismus, 12
  
- Flächenladungsdichte, 10
- Forminvariant, 5
- Fourier-Transformation, 16
- Frequenz, 9
- Fresnel'sche Formeln, 18
- fundamentale Poisson-Klamern, 8
  
- gedämpfter harmonischer Oszillator, 2
- Geschwindigkeit, 14
- Gleichgewicht
  - neutrales, 3
- Gleichgewicht
  - labiles, 3
  - stabiles, 3
- Gleichgewichtspunkte, 3
- Greensche Funktion, 19
- Grenzflächen, 12
- Grenzschichten, 10
- Grenzwinkel, 19
- Gruppengeschwindigkeit, 4, 15
  
- Hamilton Jakobi Gleichung, 6
- Hamilton Jakobi Theorie, 4
- Hamilton Jakobi-Theorie, 6
- Hamiltonische charakteristische Funktion, 7
- Hamiltonische Prinzipialfunktion, 6
- Harmonische charakteristische Funktion, 7
- Harmonische Oszillator, 2, 6
- Helmholtz Satz, 13
- homogene Maxwellgleichung, 22
  
- Identische Transformation, 5
- inhomogene Maxwellgleichung, 21
- Impulsfluss, 14
- Inertialsysteme, 21
- Integral der Bewegung, 8
  
- Jakobi-Identität, 8, 21
  
- Kanonische Koordinaten, 4
- kanonische Transformation, 5
- Kanonischer Impuls, 4
- Kapazität, 10
- Kette, 4
- Kollektiver Magnetismus, 12
- komplexe Dielektrizitätskonstante, 17
- komplexe Geschwindigkeit, 17
- Koninuitätsgleichung Energie, 14
- Kontinuitätsgleichung, 11, 13, 21
- Koordinaten, 4
- Kovariante Elektrodynamik, 21
- Kraftdichte, 13
- Kriechfall, 2
- Kugelwellen, 15
  
- Lagrange Funktion, 4
- Libration, 8
- Lichtgeschwindigkeit, 14
- lineare periodische Kette, 4

- lineare Polarisation, 15
- Lorentzzeichnung, 13, 21
- Lorentztransformation, 21
- Lorenz-Gamma-Faktor, 21
  
- Magnetische Dipolstrahlung, 20
- magnetische Suszeptibilität, 11
- Magnetisierung, 11
- Magnetisierungsstromdichte, 11
- Magnetostatik, 11
- Massentensor, 3
- Maxwell Gleichungen, 12
- Maxwellgleichung, 21, 22
- Maxwellscher Spannungstensor, 14
- Medien, 13
- Metrischer Tensor, 21
- Minkowski-Kraft, 21
  
- Nahzone, 20
- Normal Koordinaten, 3
  
- Observable, 8
- Ortsvektor, 21
  
- Paraelektrika, 10
- Paramagnetismus, 12
- periodisch, 8
- Periodizität, 8
- Permiabilität, 11
- Phasengeschwindigkeit, 14, 17
- Phasenlage, 17
- Phasenraum, 4
- Plattenkondensator, 10
- Pointingvektor, 14, 16
- Poisson-Klammern, 8
- Poissonscher Satz, 8
- Polarisation, 15
- Polarisationsladungsdichte, 10
- Polarkoordinaten, 5
- Potentiale, 13
- Prinzipialfunktion, 6
- Punkttransformation, 5
  
- Quadropoltensor, 20
- Quadrupolstrahlung, 20
- Quellfunktion, 19
  
- Reflexion, 17
- Reflexionskoeffizient, 19
- relative Permiabilität, 11
- Rotation, 8
- Ruhelage, 2
  
- Säkulargleichung, 3
- schwache Dämpfung, 2
- Schwingende Systeme, 3
- Schwingungen, 2
- Sebstenergiedichte, 11
- Separation der Variablen, 7
- Snellius'sches-Brechungsgesetz, 18
- Spannungstensor, 14
- Strahlungszone, 20
  
- Stromdichte, 11, 21
- Summenkonvention, 21
- Suszeptibilität
  - elektrische, 10
  - magnetische, 11
  
- Telegraphengleichung, 17
- Totalreflexion, 19
- Transmissionskoeffizient, 19
  
- Vektropotential, 11
- Verallgemeinerte Orthonormalität, 3
- Viererableitung, 21
- Vierergeschwindigkeit, 21
  
- Wechselwirkungsanteil, 11
- Wellen, 14
- Wellenausbreitung in elektrischen Leitern, 17
- Wellengleichung, 14, 21
- Wellenlänge, 15, 17
- Wellenpakete, 15
- Wellenvektor, 14
- Wellenzahl, 17
- Winkelvariable, 8
- Wirkung, 4
- Wirkungsvariable, 8
  
- zirkulare Polarisation, 15
- Zyklische Koordinaten, 4