Formelsammlung
Theorie klassischer Teilchen und Felder 2

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 12.02.2007 - Version: 0.9.3
Erhältlich unter http://privat.macrolab.de

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung "Theorie klassischer Teilchen und Felder 2" von Prof. Dr. Jochen Wambach an der Technischen Universität Darmstadt im Wintersemester 2006/07.

Inhaltsverzeichnis

1 Schwingungen 2
- 1.1 Harmonische Oszillator . . . 2
- 1.2 gedämpfter harmonischer Oszillator . . . 2
- 1.3 Erzwungene Schwingung . . . 2
- 1.4 Anharmonische Schwingungen . . . 2
  - 1.4.1 nichtlinear + äußere Periodische Kraft + Reibung . . . 3
- 1.5 Schwingende Systeme . . . 3
  - 1.5.1 lineare periodische Kette . . . 4

2 Hamilton Jakobi Theorie 4
- 2.1 Erzeugende Funktionen . . . 5
  - 2.1.1 Austauschtransformation . . . 5
  - 2.1.2 Identische Transformation . . . 5
  - 2.1.3 Punkttransformation . . . 5
  - 2.1.4 Transformation auf ebene Polarkoordinaten . . . 5
  - 2.1.5 Harmonische Oszillator . . . 6
- 2.2 Hamilton Jakobi-Theorie . . . 6
  - 2.2.1 Allgemein . . . 6
- 2.3 Hamiltonische Prinzipialfunktion . . . 6
- 2.4 Hamiltonische charakteristische Funktion 7
  - 2.4.1 Lösungsverfahren . . . 7
  - 2.4.2 Seperation der Variablen . . . 7
- 2.5 Wirkungs- und Winkelvariable . . . 8
  - 2.5.1 Poisson-Klammern . . . 8
  - 2.5.2 Integrale der Bewegung . . . 8
  - 2.5.3 Periodizität . . . 8
  - 2.5.4 Wirkungs- und Winkelvariable . 9

3 Elektrodynamik 9
- 3.1 Elektrodynamik der Dielektrika . . . 9
  - 3.1.1 Klassifikation von verschiedenen Polarisationsformen . . . 10
  - 3.1.2 Plattenkondensator . . . 10
  - 3.1.3 Randwertprobleme . . . 10
  - 3.1.4 Elektrostatische Energie . . . 11
- 3.2 Magnetostatik in Materie . . . 11
  - 3.2.1 Makroskopische Feldgrößen . . . 11
  - 3.2.2 Einteilung der magn. Stoffe . . . 12
- 3.3 Feldverhalten an Grenzflächen . . . 12
- 3.4 Randwertprobleme . . . 12
- 3.5 Vollständige Maxwell Gleichungen . . . 12
- 3.6 Energie & Impulssatz in der Elektrodynamik . . . 13
- 3.7 Elektromagnetische Wellen . . . 14
  - 3.7.1 Allgemeine Lösung der Wellengleichung . . . 16
  - 3.7.2 Energietransport in Wellen . . . 16
  - 3.7.3 Wellenausbreitung in elektrischen Leitern . . . 17
- 3.8 Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen am Isolator . . . 17
  - 3.8.1 Feldverhalten an Grenzflächen . 17
  - 3.8.2 Brechungs- und Reflexionsgesetz 18
  - 3.8.3 Intensität bei Reflexion und Brechung . . . 18
  - 3.8.4 Fresnel'sche Formeln . . . 18
  - 3.8.5 Senkrechter Fall . . . 18

3.8.6 Energietransport 19
3.8.7 Totalreflexion 19
3.9 Erzeugung elektromagnetischer Wellen . 19
3.9.1 Inhomogene Wellengleichung . . 19
3.9.2 Zeitlich oszillierende Quellen . . 19
3.10 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik 21

1 Schwingungen

1.1 Harmonische Oszillator

Ruhelage q_0

Kraft $F = -k(q - q_0)$

> **Ruhelage** q_0
>
> **Koordinaten** $x = q - q_0$

DGL $m\ddot{x} + kx = 0$

- Ellipsengleichung im Phasenraum
  $\frac{2}{m}E = \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = const$

Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_o t} \\ &= C\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ &= a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

- a, b bzw. A, B bzw. C, φ aus Anfangsbedingungen

1.2 gedämpfter harmonischer Oszillator

Kraft $F = -kx - \beta\dot{x}$

DGL $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$

- Bahn im Phasenraum ist eine schrumpfende elliptische Sprirale
  $\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2\right) = -\beta\dot{x}^2$

DGL $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x^2 = 0$

- $\gamma = \frac{\beta}{2m}$
  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Bewegungsgleichung Lösen mit $x(t) = Ce^{\lambda t}$ Ansatz

- $\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
- $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

schwache Dämpfung $\omega_0^2 > \gamma^2$

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$\rightarrow$ $\tan\varphi = -\frac{\dot{x}(0) + \gamma x(0)}{\omega x(0)}$
$C = x(0)\sqrt{1 + \tan^2\varphi}$

Kriechfall $\omega_0^2 < \gamma^2$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\Big(x(0)\cosh\left(\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t\right) \\ &\quad + \tfrac{\dot{x}(0)+\gamma x(0)}{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\sinh\left(\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t\right)\Big) \end{aligned}$$

Aperiodischer Grenzfall $\omega_0^2 = \gamma^2$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(x(0) + (\dot{x}(0) + \gamma x(0))t\right)$$

$\rightarrow$ Klingt am schnellsten ab von allen 3 Fällen

1.3 Erzwungene Schwingung

Kraft $F = -kx - \beta\dot{x} + F_0\cos(\Omega t)$

DGL $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0\cos(\Omega t)$

DGL $\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z^2 = f_0 e^{i\Omega t}$

- $z(t) = x(t) + iy(t)$
- Bewegungsgleichung Lösen mit $z(t) = Ce^{i\Omega t}$
  $\rightarrow$ $C = -\frac{f_0}{\Omega^2 - 2i\gamma\Omega - \omega_0^2}$

Bewegungsgleichung

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + \delta)$$

- für $\gamma^2 \ll \Omega^2$

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_0\sqrt{\left(\Omega - \omega_0\right)^2 + \gamma^2}}\cos(\Omega t + \delta)$$

$\rightarrow$ $\tan\delta = \frac{\gamma}{\Omega - \omega_0}$
$\rightarrow$ $\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow |C| \rightarrow \infty$ Resonanzkathastrophe

1.4 Anharmonische Schwingungen

Potential $V(x) = V(x_0) + \left.\frac{dV}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + \ldots$

- o.B.d.A.: $V(x_0) = 0$, $x_0 = 0$
- $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \underbrace{\frac{1}{3!}m\alpha x^3 + \frac{1}{4!}m\beta x^4 + \ldots}_{\text{anharmonisch}}$
- α, β konstanten

Allgemein $\ddot{x}+\omega_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3$

- exakt Lösbar, keine Lösungen in geschlossener Form (i.A.)
- periodische Lösungen mit $\omega=\omega_0+\omega_1+\omega_2+\dots$
- $\cos(\omega t)=\cos((\omega_0+\omega_1)t)\nsim\cos(\omega_0 t)$ für t sehr groß
- Näherungsweise Lösung: $x(t)=x^{(0)}(t)+x^{(1)}(t)+x^{(2)}(t)+\dots$

$$\begin{aligned}x^{(0)}(t)&=A\cos(\omega t)\\ x^{(1)}(t)&=-\frac{\alpha}{2}\frac{A^2}{\omega_0^2}+\frac{\alpha}{6}\frac{A^2}{\omega_0^2}\cos(2\omega t)\\ x^{(2)}(t)&=\frac{1}{16}\frac{A^3}{\omega_0^3}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2}-\frac{\beta}{2}\right)\cos(3\omega t)\end{aligned}$$

1.4.1 nichtlinear + äußere Periodische Kraft + Reibung

DGL $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\cos(\Omega t)-\alpha x^2-\beta x^3$

- $\Omega\nsim\omega_0$: Kleine Amplitude $\Rightarrow$ harmonisch
- $\Omega\approx\omega_0$: $\Omega=\omega_0+\varepsilon$, $\varepsilon\ll 1$, Amplitude $|c|$
- $|c|^2\left((\Omega-\omega)^2+\gamma^2\right)=\frac{f_0}{4\omega_o^2}$
- $|c|^2\left(\left(\varepsilon-k|c|^2\right)^2+\gamma^2\right)=\frac{f_0}{4\omega_o^2}$
  Hat im Allgemeinen 3 Lösungen

  f_0 **klein** $\Rightarrow |c|$ klein

$$|c|^2=\frac{f_0^2}{4\omega_0^2}\frac{1}{\varepsilon^2+\mu^2}$$

  f_0 **größer** Deformation in Richtung größere ε $(k>0)$

  $f_0>f_k$ es gibt in einem Bereich eine Hysterese (3 Lösungen)

  $\rightarrow c_{max}=\frac{f_0}{2\omega_0\gamma}$

  $\rightarrow f_k^2=\frac{8\omega_0^2\gamma^3}{|k|}$

1.5 Schwingende Systeme

generalisierte Koordinate $q=(q_1,\dots,q_s)$

Betrachtet nur Konservative Kräfte $\Rightarrow$ es gibt ein Potential $V(q)$

Gleichgewichtspunkte $q_0:\ \dot{q}(t)=0, q(t)=q_0$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q=q_0}=0$$

stabiles Gleichgewicht lokales Minimum von V

labiles Gleichgewicht lokales Maximum von V

neutrales Gleichgeqicht V ist lokal konstant

Auslengung $q_i=q_i^0+\xi_i$

- ξ_i kleine Auslenkung aus dem Gleichgewicht

Potential Tailor Entwickeln

$$\begin{aligned}V(q)&=\underbrace{V(q_0)}_{=0\text{ BbdA}}+\sum_{i=1}^{s}\underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q=q_0}}_{=0}\xi_i\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\underbrace{\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right|_{q=q_0}}_{k_{ij}}\xi_i\xi_j+\dots\end{aligned}$$

- $V(q)=\frac{1}{2}\xi^T\underline{k}\xi$
- $\underline{k}$ ist symmetrisch
- Stabiles Gleichgewicht $\Rightarrow\underline{k}$ ist positiv definit (alle Eigenwerte >0)

Lagrange Funktion

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{\xi}^T\underline{M}\dot{\xi}-\xi^T\underline{k}\xi\right)$$

- *Massentensor* $M_{ij}=\left.\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right|_{q=q_0}$

  $\rightarrow$ ist symmetrisch
  $\rightarrow$ alle Eigenwerte ≥ 0

DGL auch *Säkulargleichung* genannt

$$\begin{aligned}\forall i:\sum_{j=1}^{s}\left(M_{ij}\ddot{\xi}_j+k_{ij}\xi_j\right)&=0\\ \underline{M}\ddot{\xi}+\underline{k}\xi&=0\end{aligned}$$

zu lösen falls $\det\left(\underline{k}-\omega^2\underline{M}\right)=0$

- Polynom s-ten Gerades in ω^2
- ω_α^2 Nullstellen des Polynoms (s Stück)
- $\omega_a^2\in\mathbb{R}_{\geq 0}\rightarrow\omega_a\in\mathbb{R}$
- Eigenschwingungen ξ_0^α sind zu ω_α^2 passende Lösungen
  $\rightarrow$ sind alle reell und linear unabhängig

Normierung $(\xi_0^\alpha)^T\underline{M}\xi_0^\beta=\delta_{\alpha\beta}$

- auch *Verallgemeinerte Orthonormalität* genannt

Lösung

$$\xi(t)=\sum_{\alpha=1}^{s}\xi_0^\alpha\left(\underbrace{A_\alpha e^{i\omega_a t}+B_\alpha e^{-i\omega\alpha t}}_{\eta_\alpha(t)}\right)$$

Normal Koordinaten $\eta_\alpha(t)=A_\alpha e^{i\omega_a t}+B_\alpha e^{-i\omega\alpha t}=\tilde{A}_\alpha\cos(\omega_a t)+\tilde{B}_\alpha\sin(\omega_a t)$

Transformation der DGL hierdurch in folgende entkoppelte Form

$$\forall\alpha:\ \ddot{\eta}_\alpha+\omega_\alpha^2\eta=0$$

1.5.1 lineare periodische Kette

Beseteht aus unendlich vielen Teilchen der Masse m

- Abstand jeweils a
- Federkonstanten dazwischen k
- 1-dim Angeordnet
- Abstraktion für 1-dim Festkörper

Masse $M_{ij} = \delta_{ij} m$

Kopplung

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ansatz Jedes Atom vollführt harmonische Schwingung mit dem gleichen ω

$$x_l = A_l e^{i\omega t}$$

und Nachbaratome unterscheiden sich nur um konstante Phase

$$x_l = x_{l-1} e^{i\chi}$$

und *Periodischen Randbedingungen*

$$A_l = A_{l+N} e^{iN\chi}$$

- $\chi = \frac{2\pi}{N} n$ für $i = 1, \ldots, N$

Lösung $\omega_n = 2\omega_0 \left|\sin \frac{n\pi}{N}\right|$

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- $n = 1, \ldots, N$
- $\omega_N = 0$ Translation “Nullmoden”

Wellenlänge $\lambda_n = a\frac{N}{n} = \frac{L}{n}$

Dispersionsrelation $\omega(q) = 2\omega_0 \left|\sin \frac{qa}{2}\right|$

- q Wellenzahl
- 1. Brioullin Zone von $q \in \left(0, \frac{2\pi}{a}\right)$

Phasengeschwindigkeit $c = \frac{\omega}{q} = \frac{2\omega}{q} \left|\sin \frac{qa}{2}\right|$

- q klein $\Rightarrow c \approx \omega_0 a$ Schallgeschwindigkeit einer longitudinalen Kompressionswelle

Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{d\omega}{dq}$

Kontinuierlicher Grenzfall $x_l(t) = x(\xi, t)$ mit $\xi = al$

- $N \to \infty, \quad a \to 0, \quad L = Na = const$
- $(x_l + x_{l+1} - 2x_l) \to a^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi} x(\xi, t)$
- $\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) x(\xi, t) = 0$
- Elastizitätsmodul $F = \eta \frac{\delta L}{L}$
- Rückstellkraft $F_r = k\delta L$
- $\eta = ka$
- Phasengeschwindigkeit $c = \omega_0 a = \sqrt{\frac{a^2 k}{m}} = \sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}$
- Dichte $\varrho = \frac{m}{a}$

2 Hamilton Jakobi Theorie

Kanonische Koordinaten $q = (q_1, \ldots, q_s)$

Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$ wird minimiert

Lagrange Funktion $L = T - V = p \cdot \dot{q} - H$

- negative Lagrange Transformierte der Hamilton Funktion

Kanonischer Impuls $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

Phasenraum $\Gamma = (q, p)$ $2s$-dim

DGL’s , die die Bewegungsgleichungen liefern, sind:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Zyklische Koordinaten q_k so, dass $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = const$

- L hängt nicht von $q_k$ab
- H hängt nicht von $q_k$ab
- $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$
  $q_k(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial H}{\partial p_k}$

2.1 Erzeugende Funktionen

Ziel Suche *alle* zyklischen Koordinaten. Wechsle dazu die Koordinaten, so das mehr zyklische Variablen entstehen. Dieser wechsel soll forminvariant geschehen.

Forminvariant heißt eine Transformation $H(q,p) \to \overline{H}(Q,P)$ falls

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ &\Rightarrow \\ \dot{Q} &= \frac{\partial \overline{H}}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q}\end{aligned}$$

kanonische Transformation Eine Transformation $(q,p) \to (Q,P)$ und $H \to \overline{H}$ ist kanonisch falls $F(q \text{ bzw.} p, Q \text{ bzw.} P, t)$ (beliebig, diffbar) existiert mit

$$L = \sum_{j=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{j=1}^{s} p_i \dot{Q}_i - \overline{H} + \frac{dF}{dt}$$

- kanonische Transformationen sind forminvariant
- F legt $\overline{H}$ vollständig fest

$$\overline{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

- aus DGL für F lassen sich sich Transformationen für $(q,p) \to (Q,P)$ finden und umgekehrt

Typ der Transformation für F lässt sich eine der folgenden Formen wählen

- Transformation durch Freistellung der Ableitungen
- Diese F_i sind untereinander durch Legendre Transformationen verknüpft!
- Dies sind die *erzeugenden Funktionen*
- $F_1 = F_1(q,Q,t)$

  $\to p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$
  $\to P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$

- $F_2 = F_2(q,P,t)$

  $\to F_2 = F_1 + PQ$
  $\to p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$
  $\to Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial p_i}$

- $F_3 = F_3(p,Q,t)$

  $\to F_3 = F_1 - pq$
  $\to q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$
  $\to P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$

- $F_4 = F_4(p,P,t)$

  $\to$ Doppelte Legendre Transformation $F_4 = F_1 + PQ - pq$
  $\to q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$
  $\to Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial p_i}$

2.1.1 Austauschtransformation

- $F_1(q,Q,t) = -qQ$ bzw. $F_4 = -pP$
- $p_i = -Q_i$
- $P_i = q_i$
- $(q,p) \to (-p,q) = (Q,P)$
- $\overline{H} = H$

2.1.2 Identische Transformation

- $F_2 = qP$ bzw. $F_3 = -pQ$
- $P_i = p_i$
- $Q_i = q_i$
- $(q,p) \to (q,p) = (Q,P)$
- $\overline{H} = H$

2.1.3 Punkttransformation

- $F_2(q,P,t) = \sum_i g_i(q_1, , \ldots, q_s, t) P_i$
  g hängt nur von Punkt im Phasenraum ab
- $Q_i = g_i(q_1, , \ldots, q_s, t)$
- $P_i = \sum_j \frac{\partial q_j}{\partial q_i} P_j$
- $(q,p) \to (Q,P)$
- $\overline{H} = H + qP$
- analog mit $F_3 = -\sum_i g_i(Q_1, \ldots, Q_s, t) p_i$

2.1.4 Transformation auf ebene Polarkoordinaten

- $H(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + V(x,y)$
- $q = (x,y)$
  $p = (p_x, p_y)$
- $Q = (r, \varphi)$
  $P = (p_r, p_\varphi)$
- $F_3 = -r\cos(\varphi)\, p_x - r\sin(\varphi)\, p_y$

- $x = r\cos(\varphi)$
  $y = r\sin(\varphi)$
- $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
  $r = \sqrt{x^2+y^2}$
- $p_r = \cos(\varphi)\, p_x + \sin(\varphi)\, p_y$
  $p_\varphi = -r\sin(\varphi)\, p_x + r\cos(\varphi)\, p_y$
- $p_x = \cos(\varphi)\, p_r - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\, p_\varphi$
  $p_y = \sin(\varphi)\, p_r + \frac{1}{r}\cos(\varphi)\, p_\varphi$
- $\overline{H}(Q,P) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) + V(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

2.1.5 Harmonische Oszillator

- 1.dim
- Ziel: so transformieren das zyklische Variable entsteht
- $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2$
  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
- $F_1 = \frac{1}{2}m\omega_0 q^2 \cot Q$
- $p = m\omega_0 q \cot Q$
  $P = \frac{1}{2}m\omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}$
- $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}}\sin Q$
  $p = \sqrt{2Pm\omega_0}\cos Q$
- $\overline{H} = \omega_0 P$
- $P(t) = P_0 = const$
  $\dot{Q} = \omega_0 \Rightarrow Q(t) = \omega_0 t + Q_0$
- $q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega_0}}\sin(\omega_0 t + Q_0)$
  $p(t) = \sqrt{2P_0 m\omega_0}\cos(\omega_0 t + Q_0)$

2.2 Hamilton Jakobi-Theorie

2.2.1 Allgemein

Suche F, so dass Problem einfach wird.

1. Wähle Transformation so, das in (Q,P) Problem bekannt ist $\overline{H}(Q,P)$ z.B. harmonischer Oszillator
2. Wähle Transformation so, das alle Koordinaten zyklisch und $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$
   (a) $P_i = \alpha_i = const$ für $i = 1,\ldots,s$
   (b) $\overline{H}(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$
   (c) $\dot{Q}_i = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\alpha_i} = \omega_i = const \Rightarrow Q_i(t) = \omega_i t + \beta_i$ mit $\beta_i = const$
3. Wähle Transformation so, das $Q_i = \beta_i = const$ UND $P_i = \alpha_i = const$ für $i = 1,\ldots,s$
   (a) dies ist die allgemeinste Methode
   (b) $\overline{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$
   (c) $\dot{Q}_i = \frac{\partial\overline{H}}{\partial P_i} = 0 \Rightarrow Q_i = \beta_i = const$
   (d) $\dot{P}_i = -\frac{\partial\overline{H}}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow P_i = \alpha_i = const$
   (e) durch auflösen $q = (\beta,\alpha,t)$ und $q = (\beta,\alpha,t)$ bestimmen
   (f) Wähle $F = F_2(q,P,t)$
   (g) zu Lösen (F gesucht): *Hamilton Jakobi Gleichung*

$$H\left(q_1,\ldots,q_s,\frac{\partial F_2}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial F_2}{\partial q_s},t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

   nichtlineare Partielle DGL in $s+1$ Variablen

2.3 Hamiltonische Prinzipialfunktion

Definition die Hamiltonische Prinzipialfunktion $S = F_2$ ist die Lösung der *Hamilton Jakobi Gleichung*

$$H\left(q_1,\ldots,q_s,\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_s},t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\;(=\overline{H})$$

- $H = c$ ist aber auch ok
- nichtlineare Partielle DGL in $s+1$ Variablen
- es gibt also $s+1$ Integrationskonstanten
- Falls S Lösung, ist auch $S+c$ Lösung $\Rightarrow$ also nur noch s "interessante" Integrationskonstanten

$$S(q_1,\ldots,q_s,t|\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$$

- Identifiziere jetzt $P_i = \alpha_i$
- $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$

Lösungsverfahren

1. Formuliere $H(q,p,t)$ mit $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$
   - Aufstellen der HJD:
   $$H\left(q_1,\ldots,q_s,\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_s},t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$
2. Lösung der HJD, woraus man $S(q_1,\ldots,q_s,t|\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ erhält
   - $P_i = \alpha_i$
   - evtl. über Separationsansatz
   - $S' = S + c$ ist ebenfalls eine Lösung. Dieses c bei den Konstanten ignorieren!
3. Wir wissen $S(q_1,\ldots,q_s,t|\alpha_1,\ldots,\alpha_s) = S(q,t|\alpha)$
   - Bestimmen von β über:
     $Q_i = \frac{\partial S(q,t|\alpha)}{\partial\alpha_i} = \beta_i = const$
   - daraus wiederrum ist $q_i = q_i(t|\beta\alpha)$ bestimmbar
4. Bestimmung der p_i:

- Auflösen von
$$p_i = \frac{\partial S(q,t|\alpha)}{\partial q_i} = p_i(q,t|\alpha) = p_i(t|\beta\alpha)$$

5. Anfangsbedingungen:
$$\begin{aligned} q_i^{(0)} &= q_i(t=t_0) \\ p_i^{(0)} &= p_i(t=t_0) \end{aligned}$$
   - Freistellen nach:
     $\alpha = \alpha\left(t_0, q^{(0)}, p^{(0)}\right)$
     $\beta = \beta\left(t_0, q^{(0)}, p^{(0)}\right)$
   - Problem gelöst!

Physikalische Bedeutung von $S(q,P,t)$

- $(q,p) \overset{S}{\rightarrow} (Q,P) = const$ entspricht Abbildung auf einen Pkt. im Phasenraum
- $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$
- $\frac{dS}{dt} = L$
- $S = \int dtL + c$
  unbestimmtes Integral der Lagrange-Fkt. $\Rightarrow$ formale Integrationsform, in der Praxis jedoch nicht verwendbar! Dieses S wird hier minimiert $\Leftrightarrow$ Grundlage der *ganzen* Hamilton-Theorie (da haben wir mal angfangen)

2.4 Hamiltonische charakteristische Funktion

2.4.1 Lösungsverfahren

- falls
$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$$
  gilt $\Rightarrow H = E$ Konstante der Bewegung
- Herleitung über Separationsansatz:

  $\rightarrow H\left(q_1,\ldots,q_s,\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_s}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
  $\rightarrow S(q,P,t) = W(q,P) - E\cdot t$
  $\rightarrow$ *W Harmonische charakteristische Funktion*
  $\rightarrow E = \alpha_{s+1} = const$
  $\rightarrow$ dies nur zur Herleitung, folgende def. davon abweichend!!

1. Auftellen der HJD
   $H\left(q_1,\ldots,q_s,\frac{\partial W}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = E(\alpha)$
   Lösen nach $W(q,\alpha)$
   - für zyklische Variablen wähle identische Transformation und Seperationsansatz
     $W = W_1 + q_i\alpha_i$
2. $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ mit $p_i = \alpha_i$ nach Lösung von HJD $W(q,\alpha)$
3. $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \rightarrow p_i = p_i(q,\alpha)$
4. $E = E(\alpha) \Rightarrow \omega_i = \frac{\partial E}{\partial \alpha_i}$
   - Wähle $E(\alpha)$ so, dass man freies Problem bekommt. Z.B. durch:
     (a) $E(\alpha) = \sum_i \frac{\alpha_i^2}{2m}$ bzw. $\overline{H} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m}$ (elimination aller Kräfte)
     (b) $E(\alpha) = \alpha_1$
     $\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = \omega_1 = 1$ $\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = \omega_i = 0$ für $i > 1$
     $\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = \omega_i = \delta_{i1} \rightarrow Q_1 = t + \beta_1$, andere Koordinaten: $Q_i = \beta_i$
   - Q_i sind bestimmt:
     $Q_i = \omega_i(\alpha)\cdot t + \beta_i = \frac{\partial W(q,a)}{\partial \alpha_i}$
   - Auflösen nach:
     $q_i = q_i(\alpha,\beta,t)$
     $p_i = p_i(\alpha,\beta,t)$
5. $q_i^{(0)} = q_i(t=t_0)$, $p_i^{(0)} = p_i(t=t_0)$
   - Auflösen nach:
     $\alpha = \alpha\left(q_i^{(0)}, p_i^{(0)}\right)$
     $\beta = \beta\left(q_i^{(0)}, p_i^{(0)}\right)$
   - Daraus dann:
     $q_i(t)$
     $p_i(t)$

- physikalische Interpreation von W
  $W = \sum_i \int dq_i p_i$
  $S = W - H$
- S =Wirkung wird minimiert $\Rightarrow H = const \Rightarrow W$ minimiert

2.4.2 Seperation der Variablen

- Falls q_1 $f\left(q_1, \frac{\partial Q}{\partial q_1}\right)$ nicht von weiteren q_i und $\frac{\partial Q}{\partial q_i}$ abhängt und
$$H\left(q_2,\ldots,q_s,\frac{\partial W}{\partial q_2},\ldots,\frac{\partial W}{\partial q_s}, f\left(q_1,\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)\right) = E$$
- q_1 absorbiert
  $W(q,P) = \overline{W}(q_2,\ldots,q_s,P) + W_1(q_1,P)$
- $H\left(q_2,\ldots,q_s,\frac{\partial \overline{W}}{\partial q_2},\ldots,\frac{\partial \overline{W}}{\partial q_s},H_1\right) = E$
  $H_1 = f\left(q_1,\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right) = c_1 = const$
- Wenn alle q_i seperabel sind:
  $W = \sum_i W_i(q_i,P)$
  Lösungen: $H_i = f\left(q_i,\frac{dW_i}{dq_1},\alpha\right) = \alpha_i$
$$H = (H_1,\ldots,H_s,\alpha) = E$$
- H ist z.B. seperabel für
  q_1 nicht zyklisch
  q_i mit $i > 1$ zyklisch

  $\rightarrow W = W_1(q_1) + \sum_i q_i P_i$
  $\rightarrow q_i P_i$ ist die Identität auf für die i-ten Koordinaten

2.5 Wirkungs- und Winkelvariable

2.5.1 Poisson-Klammern

Zweck Konstanten der Bewegung und Bewegungsgleichungen kompakt darstellen (formaler Übergang zur QM einfach)

Observable ist $f(q,p,t)$ mit $(q,p) \in \Gamma$ (Phasenraumpunkt)

zeitliche Änderung $\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$

Poisson-Klammern für $f(q,p,t)$ und $g(q,p,t)$

$$\{f,g\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

- nach den angegebenen Indizes differenzieren
- $\{g,f\}_{q,p} = -\{f,g\}_{q,p}$
- $\{f,f\} = 0$
- $$\frac{df}{dt} = \{f,H\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial t}$$
- $\dot{q}_i = \{q_i, H\}_{q,p}$
  $\dot{p}_i = \{p, H\}_{q,p}$

fundamentale Poisson-Klamern

- $\{q_i, q_j\}_{q,p} = 0$
- $\{p_i, p_j\}_{q,p} = 0$
- $\{q_i, p_j\}_{q,p} = \delta_{ij}$
- wenn diese Eigenschaften gelten sind die q_i, p_i ein satz unabhängiger Variablen

Koordinatenunabhängigkeit falls (q,p) und (Q,P) beide genügen der Hamiltonischen Bewegungsgleichung, $(q,p) \to (Q,P)$ kanonisch

$$\begin{aligned} H(q,p) &= \tilde{H}(Q,P) \\ q &= q(Q,P) \\ p &= p(Q,P) \end{aligned}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_k\}_{q,p} &= 0 \\ \{P_i, P_j\} &= 0 \\ \{Q_i, P_j\}_{q,p} &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Weiter ist der Wert der poissonklammer unabhängig von der Wahl der Koordinaten im Phasenraum.

$$\{F,G\}_{q,p} = \{F,G\}_{Q,P}$$

- d.h. wir können die Koordinatenindizies weglassen!

Formale Eigenschaften der Poissson-Klammern (c, c_1, c_2 sind Konstanten)

Antisymmetrie $\{f,g\} = -\{g,f\}$

Bi-Linearität $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}$

- rechts ebenfalls linear

Nullelement $\{c, f\} = 0$

Produktregel $\{f, g \cdot h\} = g\{f,h\} + \{f,g\} h$

Jakobi-Identität $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$

2.5.2 Integrale der Bewegung

Integral der Bewegung ist ein anderer Begriff für Erhaltungsgrößen. Eine Größe die entlang der Bahnkurve eines freien Teilchens erhalten ist.

Observable $F(q,P,t)$ sei eine mech. Observable

- $\frac{dF}{dt} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \{H,F\} = \frac{\partial F}{\partial t}$
- $\frac{dF}{dt} = 0 \Rightarrow F$ Konstante der Bewegung
- $\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = \{H,F\}$
- $$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Poissonscher Satz Die Poisson-Klammer zweier Integrale der Bewegung ist wieder ein Integral der Beweung.

$$\frac{df}{dt} = 0 \wedge \frac{dg}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\{f,g\} = 0$$

2.5.3 Periodizität

periodisch $q(t)$, $p(t)$

Libration falls

$$\begin{aligned} q(t+\tau) &= q(t) \\ p(t+\tau) &= p(t) \end{aligned}$$

Rotation falls

$$\begin{aligned} q(t+\tau) &= q(t) \\ p(t+\tau) &= p(t) + q_0 \end{aligned}$$

- starrer Rotor $q = \varphi$ $q_0 = 2\pi$

- Es können in physikalischen Systemen beide Arten auftreten

System ein System in $\Gamma(q,s)$ mit $2s$ Dimesionen ist periodisch, falls Projektion auf jede Ebene(q_i, p_i) periodisch ist. Die einzelnen Perioden seien τ_i. Falls $\forall_{i,j} : \frac{\tau_i}{\tau_j} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ geschlossene Bahn im $2s$-dim. Phasenraum, andernfalls *bedingt periodisch.*

2.5.4 Wirkungs- und Winkelvariable

Ziel Periodenfrequenzen des Systems bestimmen

Vorgehen Zuerst normal Lösen über W danach E, W mit J_i ausdrücken und Ableiten $\Rightarrow$ Frequenzen

- Es soll gelten:
  - $\rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0$
  - $\rightarrow \Rightarrow W = W(q, P)$ reicht zur Transformation
  - $\rightarrow \Rightarrow P = (P_1, \ldots, P_s) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = const$
  - $\rightarrow$ System vollständig seperabel
  - $\rightarrow \Rightarrow W = \sum_i W_i(q_i, \alpha)$
  - $\rightarrow \Rightarrow P_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{dW_i}{dq_i} = p_i(q_i, \alpha)$
- $(q, p) \rightarrow (Q, P)$
- $P_i = \alpha_i$
- $Q_i = \begin{cases} const & \Leftrightarrow S(q, P, t) \\ zyklisch & \Leftrightarrow W(q, P) \end{cases}$
  - $\rightarrow$ im zyklischen Fall $\overline{H} = \overline{H}(P)$
- $P_i = \alpha_i \rightarrow$ kann auch $P_i = P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ sein!
  - $\rightarrow$ Wirkungsvariable $J_i = \oint dq_i p_i$
  - $\rightarrow$ minimale oder kleinste Wirkung $A = \sum_i \int_{q_1}^{q_2} dq_i p_i = S + \int_{t_1}^{t_2} dt H$
  - $\rightarrow$ seperables System $p_i = \frac{dW_i}{dq_i} \Rightarrow J_i = \oint dq_i \frac{dW_i(q_i, \alpha)}{dq_i} = J_i(\alpha)$
  - $\rightarrow$ J_i gibt zuwachs W an, wenn q_i einen “Umlauf” macht
  - $\rightarrow J_i \rightarrow P_i \Rightarrow$
    - $\alpha_i = \alpha_i(J_1, \ldots, J_s)$
    - $W = W(q_1, \ldots, q_s, J_1, \ldots, J_s)$
    - $H = \overline{H} = \alpha_1(J) = \overline{H}(J)$

Spezialfall q_i zyklisch $p_i = const$

- $q_{i0} = 2\pi$
- $J_i = 2\pi p_i$ falls q_i zyklisch

- $P = J \Leftrightarrow Q_i = \omega_i$ “Winkelvariablen”
  - $\rightarrow Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} \rightarrow \omega_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$
  - $\rightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_i} \rightarrow \dot{\omega}_i = \frac{\partial}{\partial J_i}\overline{H}(J) = \nu_i(J)$
  - $\rightarrow \omega_i = \nu_i(J) \cdot t + \beta_i$
- Wie ändert sich ω_j wenn sich q_i um einen Umlauf ändert $\Delta_i \omega_j = \oint_i d\omega_j = \delta_{ij}$
- τ_i Periode von q_i $\Delta_i \omega_i = \nu_i \tau_i \Rightarrow \nu_i(J) = \frac{1}{\tau_i}$
- $\nu_i \mathrel{\hat{=}}$ Frequenz
- falls τ_i bekannt $\rightarrow \omega_i, J_i \Rightarrow q_i(t), q_i(t)$
- Frequenz des Gesamtsystems ist *kleinste gemeinsame Vielfache* von einzelnen Frequenzen

Entartung Bewegung im $2s$-dim Γ periodisch, falls jede der s-Projektionen auf eine (q_i, p_i)-Ebene periodisch ist. Die Frequenz

$$\nu_i = \frac{1}{\tau_i}$$

ist im Prinzip für alle i verschieden.

Phasenbahn Γ ist abgeschlossen (einfach Periodisch) falls $\frac{\nu_i}{\nu_j}$ rational ist für alle i, j

bedingt periodisch wird sie im anderen Fall genannt. $\Rightarrow$ Phasenbahn nicht geschlossen

Frequenzverhältnis läss sich im abgeschlossenen Fall angeben

$$\sum_{i=1}^{s} \nu_i n_i^{(l)} = 0$$

- $l = 1, \ldots, s-1$
- $n_i^{(l)} \in \mathbb{Z}$
- jeweils nicht alle $n_i^{(l)} = 0$ für ein l
- o.B.d.A. (umsortieren der Unabhängigen nach hinten) $n_i^{(l)} = 0$ für $i \in [m+1, s]$
- die Vektoren $n_i^{(l)}$ müssen zueinander linear unabhängig sein

m-Fache Entartung haben wir, falls es nur $m < s-1$ solcher Zahlensätze $n_i^{(l)}$ gibt

- vollständige Entartung falls $m = s-1$
- Suche ein F_2 so, daß $\overline{H}$ nur noch von $s-m$ J_i abhängt.

$$F_2\left(\omega, \overline{J}\right) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} n_i^{(l)} \omega_i \overline{J}_i + \sum_{l=m+1}^{s} \omega_l \overline{J}_l$$

- $\overline{\omega}_l = \frac{\partial F_2}{\partial \overline{J}_l} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s} n_j^{(l)} \omega_j & \text{für } l = 1, \ldots, m \\ \omega_l & \text{für } l = m+1, \ldots, s \end{cases}$
- $\overline{\nu}_l = \dot{\overline{\omega}}_l = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s} n_j^{(l)} \nu_j = 0 & \text{für } l = 1, \ldots, m \\ \nu_l & \text{für } l = m+1, \ldots, s \end{cases}$
- $\overline{\nu}_l = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \overline{J}_l}$ $s-m$ Stück

3 Elektrodynamik

3.1 Elektrodynamik der Dielektrika

Ziel $\rho(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r})$

Anforderungen an Materie

1. Gesamtladung der Materie = 0
2. es fließt *kein* Strom
3. anders als bei Metallen → $\vec{E}$-Feld $\neq 0$ innerhalb
4. Materie ist "polarisierbar"

Polarisationsladungsdichte $\varrho_p = -\vec{\nabla}\vec{P}(\vec{r})$

- Gesamtladungsdichte $\varrho_g = \varrho + \varrho_P$
- $\vec{P}(\vec{r})$ lokales Dipolmoment / Polarisation
- $\oint_{\partial V} d\vec{F}\vec{P}(\vec{r}) = -Q_P = 0$

Flächenladungsdichte $\sigma_p = \vec{n}\vec{P}$

- $\vec{n}$ Normalenvektor auf dem Volumen

Dielektrische Verschiebung $\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0\vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$

- $\vec{D}$ wird von den überschussladungen ϱ erzeugt und ist damit unabhängig vom Material, während $\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\vec{D} - \vec{P}\right)$ über $\vec{P}$ vom Material abhängt.
- $\vec{D}$ ist nur Hilfsgröße, $\vec{E}$ ist die eigentliche physikalische Größe

Maxwell Gleichung der Elektrostatik mit Dielektrikum

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\vec{D}(\vec{r}) &= \varrho(\vec{r})\\ \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) &= 0\end{aligned}$$

3.1.1 Klassifikation von verschiedenen Polarisationsformen

Deformationspolarisation es gibt keine elementaren Dipole im Material ohne äußeres Feld. Das Dipolmoment wird beim Anlegen des äußeren Feldes durch Verschieben der im Atom oder Molekühl gebundenen Ladungen erzeugt (Deformation der Ladungsverteilung).

Paraelektrika Es gibt molekulare Dipole ("*Elementardipole*") wie zB. Wasser. Diese richten sich durch das externe Feld bis zu einem gewissen Grad aus. Die braunsche Molekularbewegung wirkt gegen die Orientierung. D.h. die Polarisierung ist temperaturabhängig. Ohne Externes Feld ist die Polarisation 0

Ferroelektrika Stoffe mit molekularen Dipolen, die sich unterhalb einer kritischen Temperatur T_c (Curie-Temperatur) spontan, d.h. ohne äußeres Feld ausrichten.

- Im Allgemeinen sind die äußeren Felder klein gegen die molekularen bzw. atomaren Felder.

linear Response für nicht zu starke Felder

$$\vec{P} = \alpha\vec{E}$$

- α ist eine Matrix für anisotropes Dielektrikum
- α ist ein Skalar für isotropes Dielektrikum

elektrische Suszeptibilität $\vec{P} = \underline{\chi}\varepsilon_0\vec{E}$

- $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$

Dielektrizitätstensor $\underline{\varepsilon} = \underline{1} + \underline{\chi_E}$

- isotrope Dielektrika gibt es auch $\varepsilon = 1 + \chi_E$

Konvention im Folgenden Es wird soweit nicht anders angegeben von einem isotropen linearen Medium ausgeganden.

3.1.2 Plattenkondensator

Kapazität $C = \frac{Q}{U}$

Plattenkondensator $C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{F}{d} = \varepsilon_r C_0$

Kondensatoroberfläche F

$$\sigma = \frac{Q}{F} = D$$

- D betrag der dielektrischen Verschiebung

3.1.3 Randwertprobleme

- Maxwellgleichungen haben selbe Struktur ⇒ selbe Lösungsansätze (Poisson-Gl.)

$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$$

Grenzschichten haben folgendes Stetigkeitsverhalten

$$\begin{aligned}\sigma &= \vec{n}\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\\ \left(\vec{t}\times\vec{n}\right)\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) &= 0\end{aligned}$$

- σ Ladungsdichte auf der Grenzschicht
- Stetigkeit in Komponenten

$$\begin{aligned}E_{1t} &= E_{2t}\\ \frac{D_{1t}}{\varepsilon_r^{(1)}} &= \frac{D_{2t}}{\varepsilon_r^{(2)}}\end{aligned}$$

- bei ungeladene Grenzschicht $\sigma = 0$ zusätzlich:

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n} \\ \varepsilon_r^{(1)} E_{1n} &= \varepsilon_r^{(2)} E_{2n} \end{aligned}$$

- Durch Einbringen von Spiegelladungen lassen sich Felddeformationen durch Grenzschichten berücksichtigen. Deren Ort ist gespiegel, allerdings haben sie einen zur Stetigkeitsbedingung passenden Wert.

3.1.4 Elektrostatische Energie

Punktladungen im Vakuum an den Orten $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ mit Ladungen $(q_1, \dots, q_N)$

$$W_{ges} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{8\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int_V \int d^3r\, d^3r' \frac{\varrho(\vec{r})\, \varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{2} \int_V d^3r \varphi(\vec{r})\, \varrho(\vec{r}) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r \left(\nabla\varphi(\vec{r})\right)^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r \left|\vec{E}\right|^2 \end{aligned}$$

Energiedichte $w = \frac{\varepsilon_0}{2} \left|\vec{E}\right|^2$

- $W = \int_V d^3\vec{r}\, w(\vec{r})$
- Beim Überprüfen mit einer diskreten Verteilung gibt es

  Sebstenergiedichte diese ist divergent für homogen geladene Kugel mit $R \to 0$. Problem für Elektron. Gelöst in Qantenfeldtheorie

  Wechselwirkungsanteil entspricht der Diskreten energieformel

Feldenergie im Dielektrikum

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r\, \vec{E}\vec{D}$$

- $w = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$

3.2 Magnetostatik in Materie

Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t)$

Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$

- in der Statik nur $\vec{\nabla}\vec{j} = 0$

Maxwell-Gleichungen sind

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Vektropotential $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

- Umformulierung der homogenen Gleichung

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

- Entwicklung $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \dots$

  $\to$ kein Monopolterm

  $\to$ $\vec{m}$ magnetisches Dipolmoment

  $\to$ $\vec{m} = \frac{1}{2} q \sum_i \vec{R}_i \times \vec{v}_i = \frac{q}{2m} \sum_i \vec{L}_i$

  $\to$ $\vec{L}_i$ Bahndrehimpulse

3.2.1 Makroskopische Feldgrößen

Stromdichte $\overline{\vec{j}_m} = \overline{\vec{j}_f} + \overline{\vec{j}_{geb}} + \overline{\vec{j}_{mag}}$

- $\vec{j}_f$ Ströme freier Ladungen
- $\vec{j}_{geb}$ Ströme aufgrund Polarisation
- $\vec{j}_{mag}$ stationäre magnetische Dipole

Magnetisierungsstromdichte $\overline{\vec{j}_{mag}}$

- $= 0$ ohne äußeres Feld
- $\neq 0$ mit äußerem Feld, $\vec{B}_{mag} \neq 0$
- stationär $\vec{\nabla}\vec{j}_{max}^{(i)} = 0$ für alle Teilchen i
- $\vec{m}_i = \frac{1}{2} \int d^3r \left[\left(\vec{r} - \vec{R}_i\right) \times \vec{j}_{mag}(\vec{r})\right]$
- Ansatz: $\vec{j}_{mag}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times (\vec{m} \cdot f(\vec{r}))$

  $$f = \begin{cases} 1 & \text{innerhalb } V \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases}$$

Magnetisierung $\vec{M} = \sum_i \overline{m_i f_i}$

Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j}_F \\ \vec{\nabla}\vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

lineare isotrope Medien $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

magnetische Suszeptibilität χ_m

relative Permiabilität $\mu_r = \chi_m + 1$

- $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

3.2.2 Einteilung der magn. Stoffe

Diamagnetismus $\chi_m = const < 0$

- Induktionseffekt $\vec{M} \uparrow\downarrow \vec{H}$
- magnetische Dipole werden induziert
- temperaturunabhängig
- z.B. Atome mit abgeschlossenen Schalen $\left(\vec{L}_{ges} = 0\right)$

Paramagnetismus $\chi_m > 0$, $\chi_m = \chi_m(T)$

- permanente magn. Dipole
- z.B. Atome mit nicht abgeschlossenen Schalen $\left(\vec{L}_{ges} \neq 0\right)$
- Sättigungsmagnetismus: ... bis alle Dipole ausgerichtet sind
- hohe Temperaturen: $\chi_m(T) = \frac{c}{T}$ "Curie-Gesetz"

Kollektiver Magnetismus $\chi_m = \chi_m(T, H)$ *kein* linearer Zusammenhang $\vec{M} \neq \chi_m \vec{H}$

- permanente magn. Dipole → richten sich *spontan* aus für $T < T_c$

  Ferromagnetismus χ_m sehr groß + Hyterese

  → Weiß'schen Bezirke die sich mit Steigendem $\vec{H}$ ausrichten
  → Remanenz + Koizitivfeldstärke

  Ferrimagnetismus zwei ferromagnetische Untergitter A, B

  → A, B sind antiparallel aber unterschiedlich groß
  → $\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B \neq 0$

  Antiferromagnetismus ist Spezialfal des Ferrimagnetismus mit $\vec{M}_A = -\vec{M}_B$

  → $\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B = 0$
  → kritische Temperatur: $T_c = T_N$ "Neel-Temperatur"

3.3 Feldverhalten an Grenzflächen

- Es werden Randbedingungen an $\vec{B}$ und $\vec{H}$ gestellt.

Stetigkeit an Grenzflächen mit unterschiedlichem $\mu_r^{(1)}$,$\mu_r^{(2)}$

$$\begin{aligned} \vec{n}\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) &= 0 \\ B_{1n} &= B_{2n} \\ H_{1n}\mu_r^{(1)} &= H_{2m}\mu_r^{(2)} \end{aligned}$$

$$\left(\vec{t} \times \vec{n}\right)\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{j}_F \vec{t}$$

- $\vec{j}_F$ Flächenstromdichte. Wenn $= 0$ gilt weiter;

$$\begin{aligned} H_{2t} &= H_{1t} \\ B_{2t}\mu_r^{(1)} &= B_{1t}\mu_r^{(2)} \end{aligned}$$

3.4 Randwertprobleme

- i.A. Lösungen mit Hilfe des Vektorpotentials $\vec{A}$

Eichtransformation $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$

- χ irgendein Skalarfeld
- $\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\mu_r\vec{j}$$

- jede Koordinate entspricht Poisson-Gleichung

Spezialfall $\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$

- $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_m$ mit φ_m skalares magn. Potential
- lineares isotropes Medium

$$\vec{B} = -\mu_0\mu_r\vec{\nabla}\varphi_m$$

- zusammen mit $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ → Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi_m = 0$$

- mit $\vec{M}(\vec{r}) \neq 0$ in V

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_m &= \vec{\nabla}\vec{M} \\ &= \varrho_m \end{aligned}$$

- $\varrho_m = \vec{\nabla}\vec{M}$ effektive magnetische Ladungsdichte
- für $r > r'$ (Radius von V =Ausdehnung der Magnetisierung)

$$\varphi_m \approx \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}_{tot}\vec{r}}{r^3}$$

  → $\vec{m}_{tot} = \int d^3r\, \vec{M}(\vec{r})$ magnetische Moment
  → Fernfeld = Dipolfeld

3.5 Vollständige Maxwell Gleichungen

Vollständige Maxwell Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{D} &= \varrho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{D}} &= 0 \\ \vec{\nabla}\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \dot{\vec{D}} \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$$

Felder in Medien empirische Näherung

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \underline{\varepsilon_r}\varepsilon_0\vec{E} \\ \vec{B} &= \underline{\mu_r}\mu_0\vec{H} \\ \vec{j} &= \underline{\sigma}\vec{E}\end{aligned}$$

Potentiale diese lösen die beiden homogenen Maxwellgleichungen automatisch

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}\end{aligned}$$

Potential-DGL's sind umgeformte inhomogene Maxwell Gleichungen

$$\begin{aligned}\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\vec{A} &= -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \\ \Box\vec{A} - \vec{\nabla}\left(\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}\right) &= -\mu_0\vec{j}\end{aligned}$$

D'Alembert-Operator ist definiert als

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Eichfreiheit bietet die Möglichkeit die Potentiale zu verändern, ohne das sich die Felder ändern (*Eichtransformation*): $\vec{B} = \vec{B}'$ und $\vec{E} = \vec{E}'$

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ \phi' &= \phi - \dot{\chi}\end{aligned}$$

- χ ist beliebieges skalares Feld
- $\chi' = \chi + c$ ist äquivalent

Helmholtz Satz die Stromdichte $\vec{j} = \vec{j}_L + \vec{j}_T$ lässt sich in einen longitudinalen und einen tranversalen Anteil aufspalten

$$\begin{aligned}\vec{j}_L &= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r\int_V d^3r'\,\frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{j}\,(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \vec{j}_T &= \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r\times\int_V d^3r'\,\frac{\vec{\nabla}_{r'}\times\vec{j}\,(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\end{aligned}$$

Coulomb-Eichung bzw. *transversal Eichung*: wähle χ so, das

$$\vec{\nabla}\vec{A} = 0$$

dadurch gilt direkt

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \\ \phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r'\,\frac{\varrho\,(\vec{r},t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\end{aligned}$$

es bleibt nur noch zu lösen

$$\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}_T$$

- χ ist *nicht* Lorenzinvariant!
- Wahl von χ

$$\begin{aligned}a\,(\vec{r},t) &= \vec{\nabla}\vec{A} \\ \Delta\chi &= -a\,(\vec{r},t) \\ \chi &= \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{a\,(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\end{aligned}$$

Lorentzeichung wähle χ so, das

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0$$

dadurch gilt direkt

$$\begin{aligned}\Box\vec{A} &= -\mu_0\vec{j} \\ \Box\phi &= -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

- Wahl von χ

$$\begin{aligned}a\,(\vec{r},t) &= \vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} \\ \Box\chi &= -a\,(\vec{r},t)\end{aligned}$$

- vollständige Entkopplung von $\vec{A}$ und ϕ
- χ ist lorenztinvariant / in jedem Inertialsystem gleich.
- χ ist nicht eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned}\Box\Lambda\,(\vec{r},t) &= 0 \\ \chi' &= \chi + \Lambda\end{aligned}$$

3.6 Energie & Impulssatz in der Elektrodynamik

Energiesatz

- Gegeben sei $\vec{E}\,(\vec{r},t)$ und $\vec{B}\,(\vec{r},t)$ und ein Teilchem mit der Ladung q in diesen Feldern mit $\vec{v}$ bewegt
- $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = q\vec{E}\vec{v}$$

Kraftdichte $\vec{f}\,(\vec{r},t) = \varrho\,(\vec{r},t)\left[\vec{E}\,(\vec{r},t) + \vec{v}\,(\vec{r},t)\times\vec{B}\,(\vec{r},t)\right]$

- $\vec{v}$ ist das Geschwindigkeitsfeld mit dem ϱ strömt
- $\vec{f}\vec{v} = \vec{j}\vec{E}$

$$\begin{aligned}\frac{dW_V}{dt} &=_{mech} \int_V d^3r\,\vec{j}\vec{E} \\ &= \int_V d^3r\left[-\vec{H}\dot{\vec{B}} - \vec{E}\dot{\vec{D}} - \vec{\nabla}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\right] \\ &=_{elekt} -\int_V\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{S}\right)\end{aligned}$$

Pointingvektor $\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)$

- $\frac{dW_v^{Strahlung}}{dt} = \int_{\partial V} d\vec{f}\vec{S}$
- $\frac{dW_v^{Feld}}{dt} = \int_V d^3r \frac{\partial w}{\partial t}$
- Achtung, i.A. ist das zeitliche Mittel verlangt → steht hier nicht direkt!

Energiestromdichte $\left|\vec{S}\right|$

- in Richtung $\frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}$

Energiedichte $w(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left[\vec{H}\vec{B} + \vec{E}\vec{D}\right]$

- Achtung, i.A. ist das zeitliche Mittel verlangt → steht hier nicht direkt!

Koninuitätsgleichung Energie

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{Feld} + \underbrace{\vec{\nabla}\vec{S}}_{Strahlung} + \underbrace{\vec{j}\vec{E}}_{mechanisch} = 0$$

- Pointingsches Theorem
- entspricht Energieerhaltung

Feldimpuls $\vec{p}^{Feld} = \int_V d^3r\vec{D} \times \vec{B}$

- $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

Maxwellscher Spannungstensor T

$$T_{ij} = \varepsilon_r\varepsilon_0 E_iE_j + \frac{1}{\mu_r\mu_0}B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\varepsilon_r\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2 + \frac{1}{\mu_r\mu_0}\left|\vec{B}\right|^2\right)$$

- $\vec{T}_i = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_V^{mech} + \vec{p}_V^{Feld}\right)_i \\ &= \int_V d^3r\,\vec{\nabla}\vec{T}_i \\ &= \int_{\partial V} d\vec{f}\vec{T}_i \end{aligned}$$

- *Impulsfluss* $d\vec{f}\vec{T}_i$ durch die Oberfläche $d\vec{f}_i$
- $\vec{F}$ gesamte auf das System in V wirkende Kraft
- $\vec{p}_V^{mech}$ ist der zusätzliche mechanische Impuls (hier im meistens $= 0$)

3.7 Elektromagnetische Wellen

homogenes Medium sei gegeben, und damit

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_r\mu_0\vec{H} \\ \vec{D} &= \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} \end{aligned}$$

Annahme $\varrho(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r},t) = 0$

Wellengleichung folgen aus den mit den Annahmen modifizierten Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \Box\vec{E} &= \vec{0} \\ \Box\vec{B} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Geschwindigkeit $u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}$

Lichtgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

Brechungsindex $n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$

Lösungsweg $\Psi(\vec{r},t)$ sei eine der Komponenten von $\vec{E}$ oder $\vec{B}$

- DGL
  $\Box\Psi(\vec{r},t) = 0$
- Lösungsansatz
  $\Psi(\vec{r},t) = f_-\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right) + f_+\left(\vec{k}\vec{r} + \omega t\right)$
- Phase:
  $\varphi_\pm = \vec{k}\vec{r} \pm \omega t$
  o.B.d.A. $\omega > 0$
- DGL mit Ansatz $f_\pm$:
  $\Delta\Psi(\vec{r},t) = k^2\Psi''$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\vec{r},t) = \omega^2\Psi''$
- Lösung mit beliebigen $f_\pm$ mit
  $\omega = uk$
- Physikalische Interpretation
  - → Betrachte Flächen mit gleichem f_+ bzw f_- Wert $\Rightarrow \varphi = \varphi_0 = const$
  - → diese wandern mit t senkrecht zu $\vec{k}$

  $$r_{||} = \frac{\vec{r}\vec{k}}{k} = \frac{\varphi_0}{k} \mp \frac{\omega}{k}t$$

  - → f_- bewegt sich in $\vec{k}$ Richtung
    f_+ bewegt sich in $-\vec{k}$ Richtung

Phasengeschwindigkeit $\frac{dr_{||}}{dt} = \frac{\omega}{k} = u$

Wellenvektor $\vec{k}$

- auch Ausbreitungsvektor genannt

Allgemeine Lösung ist eine Überlagerung (da Gleichungen linear) von

$$\begin{aligned} f_-(\vec{r},t) &= Ae^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)} \\ f_+(\vec{r},t) &= Be^{i\left(\vec{k}\vec{r} + \omega t\right)} \end{aligned}$$

- bei festen t sind Ebenen konstanter Phase äquidistant

Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

- $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$
- $\nu = \frac{1}{\tau}$
- $u = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{k} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{\tau}$

Felder ergeben sich entsprechend zu

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}_0 e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\end{aligned}$$

- $f_+ = 0$ da nur Propabation in eine Richtung betrachtet wird.
- mit Überlagerungen von $\omega \in (-\infty, \infty)$ wird f_+ dadurch wieder aufgenommen (negative ω).
- Diese Wellen werden auch als *ebene Wellen* bezeichnet, da Ihre Wellenfronten parallele Ebnen senkrecht zu $\vec{k}$ bilden.
- $\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0$
- $\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{u^2}\vec{E}_0$
- $\vec{k}\vec{E}_0 = 0$
- $\vec{k}\vec{B}_0 = 0$
- $\left|\vec{B}_0\right|^2 = \frac{1}{u^2}\left|\vec{E}_0\right|^2$
- $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechstsystem
- um Phasenverschiebungen zu realisiernen: $\vec{E}_0, \vec{B}_0 \in \mathbb{C}^3$
- Physikalische $\vec{B}, \vec{E}$ Felder sind Realteile dieser Felder!!

Polarisation O.b.d.A $\vec{k} = k\vec{e}_z$ damit gilt:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \left(E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y\right) e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{1}{u}\left(-E_{0y}\vec{e}_x + E_{0x}\vec{e}_y\right) e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\end{aligned}$$

- Betrachte nur $\vec{E}$ Feld, $\vec{B}$ analog
- Durch Realteilbildung und umschreiben

$$\begin{aligned}E_x &= |E_{0x}|\cos\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi\right)\\ E_y &= |E_{0y}|\cos\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi+\delta\right)\end{aligned}$$

linear $\delta = n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi\right)$$

zirkular $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ und $|E_{0x}| = |E_{oy}| = E$

$$\vec{E} = E\begin{pmatrix}\cos\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi\right)\\ \mp\sin\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi\right)\\ 0\end{pmatrix}$$

→ $\delta = +\frac{\pi}{2}$ ist rechtszirkular (gegen den Uhrzeigersinn)

→ $\delta = -\frac{\pi}{2}$ ist linkszirkular (mit dem Uhrzeigersinn)

Elliptisch $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ und $|E_{0x}| \neq |E_{oy}|$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix}|E_{0x}|\cos\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi\right)\\ \mp|E_{0y}|\sin\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi\right)\\ 0\end{pmatrix}$$

→ $\left(\frac{E_x}{|E_{0x}|}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|}\right)^2 = 1$

Allgemein handelt es sich um eine Ellipse, die in der x, y Ebene um einen gewissen Winkel verkippt ist

Wellenpakete sind die allgemeinsten Lösungen, also eine Überlagerungen von den vorherigen Lösungen

$$F_\pm(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, a(k)\, f_\pm(kz \pm \omega t)$$

- $a(k)$ ist die Gewichtungsfunktion
- ist Physikalisch relevant, da Welle meist mit über ein ganzes "Frequenzband" verteilt ist
- Es gilt meist $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega)$

  dispersives Medium $\omega = uk \Rightarrow \omega = \omega(k)$

  Gruppengeschwindigkeit $v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}$ ist Teil der Taylorentwicklung von $\omega(k)$

$$\omega(k) = \omega_0 + (k-k_0)\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} + \ldots$$

→ i.a. $u \neq v_g$

Wellenpaket ist Näherungslösung mit Abbruch der Entwicklung von $\omega(k)$ nach ersten Glied

$$\begin{aligned}H_\pm(z,t) &= e^{(k_0 z \pm \omega_0 t)}\hat{H}_\pm(z \pm v_g t)\\ \hat{H}_\pm(z \pm v_g t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dq\, b(k_0+q)\, e^{iq(z \pm v_g t)}\end{aligned}$$

- $\hat{H}_\pm$ ist die Einhüllende des Wellenpaketes, das sich mit v_g vorwärts bewegt

Kugelwellen sind Lösungen in der Basis der Kugelkoordinaten

- $\Box$ lässt sich in den Kugelkoordinaten als Summe schreiben
- Lösung
$\Psi_{\pm} = \frac{A_{\pm}}{r} e^{i(kr \pm \omega t)}$
- gleiche Wellenlänge wie ebene Wellen
- Es gibt mit $\pm$ wieder ein und auslaufende Wellen

3.7.1 Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Fourier-Transformation allgemein in einer Dimension

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k)\, e^{+ikx}\end{aligned}$$

- In n Dimensionen muss diese Transformation für jede Komponente des Vektors durchgeführt werden
- $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$

dreidimensional für Wellen

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{\Psi}\left(\vec{k}, \omega\right) e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)} \\ \tilde{\Psi}\left(\vec{k}, \omega\right) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \Psi(\vec{r}, t) e^{-i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)}\end{aligned}$$

Gegeben sind

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}) &= \Psi(\vec{r}, t = 0) \\ v_0(\vec{r}) &= \dot{\Psi}(\vec{r}, t = 0)\end{aligned}$$

- bzw. entsprechend Vektor $\vec{E}, \vec{B}$

Ansatz mit Fourier-Transformation

$$\begin{aligned}\Box\Psi(\vec{r}, t) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \underbrace{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{u^2}\right)}_{=0} \tilde{\Psi}\left(\vec{k}, \omega\right) &= 0\end{aligned}$$

liefert den Ansatz

$$\tilde{\Psi}\left(\vec{k}, \omega\right) = a_+\left(\vec{k}\right) \delta(\omega + uk) + a_-\left(\vec{k}\right) \delta(\omega - uk)$$

$$a_{\pm}\left(\vec{k}\right) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r e^{-\vec{k}\vec{r}} \left(\Psi_0(\vec{r}) \mp \frac{i}{ku} v_0(\vec{r})\right)$$

und damit durch Rücktransformation und einsetzen das resultierende Feld

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3r \int d^3r' e^{i\vec{k}\left(\vec{r} - \vec{r}'\right)} \\ &\cdot \left[e^{ikut} \left(\Psi_0(\vec{r}') - \frac{i}{ku} v_0(\vec{r}')\right) \right. \\ &\left. + e^{-ikut} \left(\Psi_0(\vec{r}') + \frac{i}{ku} v_0(\vec{r}')\right)\right] \\ &= \int d^3r' \left(\dot{D}\left(\vec{r} - \vec{r}', t\right) \Psi_0\left(\vec{r}'\right) + D\left(\vec{r} - \vec{r}', t\right) v_0\left(\vec{r}'\right)\right)\end{aligned}$$

- Integraldarstellung von $\Box\Psi(\vec{r}, t) = 0$ mit Randbedingungen von oben

Abkürzung

$$\begin{aligned}D(\vec{r}, t) &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{ku} e^{i\vec{k}\vec{r}} \left(e^{ikut} - e^{-ikut}\right) \\ &= \frac{-1}{2(2\pi)^3 ur} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(e^{ik(r+ut)} - e^{ik(r-ut)}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi ur} \left[\delta(r + ut) - \delta(r - ut)\right] \\ &= \frac{1}{4\pi ur} \begin{cases} \delta(r - ut) & t > 0 \\ -\delta(r + ut) & t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

3.7.2 Energietransport in Wellen

Rechenregeln zur Realteilmittelung von komplexen Funktionen

- $\vec{a}(\vec{r}, t) = a_0(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$
- $\vec{b}(\vec{r}, t) = b_0(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$
- Mittelung
$\overline{A}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} A(t)\, dt$
- $\overline{\Re(\vec{a}) \cdot \Re\left(\vec{b}\right)} = \frac{1}{2}\Re\left(\vec{a}_0^* \cdot \vec{b}_0\right) = \frac{1}{2}\Re\left(\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^*\right)$
- $\overline{\Re(\vec{a}) \times \Re\left(\vec{b}\right)} = \frac{1}{2}\Re\left(\vec{a}_0^* \times \vec{b}_0\right) = \frac{1}{2}\Re\left(\vec{a}_0 \times \vec{b}_0^*\right)$

Annahmen sind, dass $\vec{E}, \vec{B}$ folgende Gestalt haben

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)}\end{aligned}$$

Energiedichte $\overline{w}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4}\Re\left(\underbrace{\vec{H}_0\vec{B}_0^*}_{magnetisch} + \underbrace{\vec{E}_0\vec{D}_0^*}_{elektrisch}\right)$

Pointingvektor $\overline{\vec{S}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\Re\left(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*\right)$

Spezialfall mit $\varepsilon_r, \mu_r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\overline{w}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r |E_0|^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0\mu_r} |B_0|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\vec{S}}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}} \left|\vec{E}_0\right|^2 \vec{e}_k \\ &= u\overline{w}(\vec{r}, t)\, \vec{e}_k\end{aligned}$$

- $\vec{e}_k = \frac{\vec{k}}{k}$

3.7.3 Wellenausbreitung in elektrischen Leitern

Leiterstrom ist zu berücksichtigen (Ohmsches Gesetz)

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

Satz $\varrho(\vec{r}, t=0) = 0 \Rightarrow \forall t : \varrho(\vec{r}, t) = 0$

Telegraphengleichung ist resultierende aus Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu_0\mu_r\sigma\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{E}(\vec{r}, t) &= 0\\ \left(\Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu_0\mu_r\sigma\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{B}(\vec{r}, t) &= 0\end{aligned}$$

komplexe Dielektrizitätskonstante $\overline{\varepsilon}_r = \varepsilon_r + i\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\omega}$

komplexe Geschwindigkeit $\overline{u} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\overline{\varepsilon}_r\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\overline{\varepsilon}_r}}$

Lösung der Telegraphengleichung

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i\left(\overline{\vec{k}}\vec{r} - \omega t\right)}\\ &= \vec{E}_0 e^{-\frac{\gamma\omega}{c}z}\exp\left(i\omega\underbrace{\left(\frac{\overline{n}}{c}z - t\right)}_{t_{ret}}\right)\end{aligned}$$

mit

$$\overline{\vec{k}} = \frac{\omega}{\overline{u}}\vec{e}_k$$

Extinktionskoeffizient γ sorgt für

- einen kontinuierlichen Abfall der Amplitude im Medium
- Phasenverschiebung zwischen $\vec{B}$ und $\vec{E}$

Brechungsindex $\sqrt{\overline{\varepsilon}_r\mu_r} = \overline{n} + i\gamma$

- mit $\overline{n}, \gamma \in \mathbb{R}$
- Wie gehabt $n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \in \mathbb{R}$
- $\overline{n}^2 - \gamma^2 = n^2$
- $2\gamma\overline{n} = \frac{\sigma\mu_r}{\varepsilon_0\omega}$
- $\overline{n}^2 = \frac{n^2}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)^2}\right]$
  $\gamma^2 = \frac{n^2}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)^2}\right]$
- Im Grenzwert $\sigma \to 0$ gilt:
  $\overline{n} = n$
  $\gamma = 0$

Eindringtiefe $\delta = \frac{c}{\gamma\omega} = \frac{\lambda_0}{2\pi\gamma}$

- Strecke, nach der die Amplitude auf $\frac{1}{e}$ abgesunken ist
- λ_0 Wellenlänge im Vakuum

Wellenzahl $\overline{\vec{k}}$ ist komplex mit $\overline{k} = k_0 + ik_1$

- $k_0 = \frac{\omega}{c}\overline{n}$
  $k_1 = \frac{\omega}{c}\gamma$
- $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-k_1 z}e^{i(k_0 z - \omega t)}$

Phasengeschwindigkeit $u_p = \frac{\omega}{k_0} = \frac{c}{\overline{n}} < \frac{c}{n}$

Wellenlänge $\overline{\lambda} = \frac{2\pi}{k_0} = \lambda\frac{n}{\overline{n}} < \lambda$

- λ Wellenlänge im Isolator

Phasenlage von $\vec{B}$ und $\vec{E}$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{c}(\overline{n} + i\gamma)\left(\vec{e}_k \times \vec{E}\right)\\ &= \frac{1}{c}\sqrt{\overline{n}^2 + \gamma^2}e^{i\varphi}\left(\vec{e}_k \times \vec{E}\right)\end{aligned}$$

- $\varphi = \arctan\left(\frac{\gamma}{\overline{n}}\right)$ ist die Phasenverschiebung zwischen $\vec{B}$ und $\vec{E}$

Energiestromdichte (zeitgemittelt)

$$\begin{aligned}\overline{S}(\vec{r}) &= \frac{|E_0|^2}{2\mu_0\mu_r u_p}e^{-2\gamma\frac{\omega}{c}z}\vec{e}_{\vec{E}_0\times\vec{B}_0}\\ &= u_p\overline{w}(\vec{r})\,\vec{e}_{\vec{E}_0\times\vec{B}_0}\end{aligned}$$

zeitgemittelte Energiedichte ist gegeben durch

$$\overline{w}(\vec{r}) = \frac{|E_0|^2}{2\mu_0\mu_r u_p^2}e^{-2\gamma\frac{\omega}{c}z}$$

3.8 Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen am Isolator

3.8.1 Feldverhalten an Grenzflächen

Normalkomponenten $\vec{n}$ =Normeleneinheitsvektor

$$\begin{aligned}\vec{n}\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) &= \sigma_F\\ \vec{n}\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) &= 0\end{aligned}$$

- σ_F ist die Flächenladungsdichte

Tangentialkomponenten

$$\begin{aligned}\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) &= \vec{j}_F\\ \vec{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{B}_1\right) &= 0\end{aligned}$$

- $\vec{j}_F$ ist die Flächenstromdichte

3.8.2 Brechungs- und Reflexionsgesetz

Randbedingung sind

- $\sigma_F = 0$
- $\vec{j}_F = \vec{0}$
- es handelt sich um ebene Wellen

Einfallende Welle

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{01} e^{i\left(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_1 t\right)} \\ \vec{B}_1 &= \frac{1}{\omega_1}\left(\vec{k}_1 \times \vec{E}_1\right) \\ &= \frac{1}{u_1}\left(\vec{e}_{k_1} \times \vec{E}_1\right)\end{aligned}$$

- $\vartheta_1 = \measuredangle\left(\vec{k}_1, \vec{n}\right)$

Reflektiert wird

$$\begin{aligned}\vec{E}_{1r} &= \vec{E}_{01r} e^{i\left(\vec{k}_{1r} \vec{r} - \omega_{1r} t\right)} \\ \vec{B}_1 &= \frac{1}{\omega_{1r}}\left(\vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r}\right) \\ &= \frac{1}{u_{1r}}\left(\vec{e}_{k_{1r}} \times \vec{E}_{1r}\right)\end{aligned}$$

- $\vec{k}_{1r}$ liegt in $\left(\vec{k}_1, \vec{n}\right)$-Ebene
- $\vartheta_{1r} = \vartheta_1 = \measuredangle\left(\vec{k}_{1r}, \vec{n}\right)$
- $k_{1r} = k_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r^{(1)} \varepsilon_r^{(1)}}$

Transmittiert wird

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \vec{E}_{02} e^{i\left(\vec{k}_{21} \vec{r} - \omega_2 t\right)} \\ \vec{B}_2 &= \frac{1}{\omega_2}\left(\vec{k}_2 \times \vec{E}_2\right) \\ &= \frac{1}{u_2}\left(\vec{e}_{k_2} \times \vec{E}_2\right)\end{aligned}$$

- $\vec{k}_2$ liegt in $\left(\vec{k}_1, \vec{n}\right)$-Ebene
- $k_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r^{(2)} \varepsilon_r^{(2)}}$
- $\vartheta_2 = \measuredangle\left(\vec{k}_2, \vec{n}\right)$

Snellius'sches-Brechungsgesetz $\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1}$

3.8.3 Intensität bei Reflexion und Brechung

Fall 1 $\vec{E}_1$ $\perp$Einfallsebene polarisiert

- $E_{02} = E_{01} + E_{01r}$
- $\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_\perp = \frac{2 n_1 \cos\vartheta_1}{n_1 \cos\vartheta_1 + \frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\vartheta_1}}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_\perp = \frac{n_1 \cos\vartheta_1 - \frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\vartheta_1}}{n_1 \cos\vartheta_1 + \frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\vartheta_1}}$

Fall 2 $\vec{E}_1 ||$ Einfallsebene polarisiert

- $E_{02}\cos\vartheta_2 = (E_{01} - E_{01r})\cos\vartheta_1$
- $\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_{||} = \frac{2 n_1 n_2 \cos\vartheta_1}{\frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}} n_2^2 \cos\vartheta_1 + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\vartheta_1}}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{||} = \frac{\frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}} n_2^2 \cos\vartheta_1 - n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\vartheta_1}}{\frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}} n_2^2 \cos\vartheta_1 + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\vartheta_1}}$

3.8.4 Fresnel'sche Formeln

Bedingung ist
$$\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)}$$
was in guter Näherung für fast alle Materialien erfüllt ist.

- $\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_\perp = \frac{2\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_\perp = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
- $\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_{||} = \frac{2\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{||} = \frac{\tan(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\tan(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
- Keine Brechung bei $\frac{\pi}{2}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_\perp < 0 \Rightarrow$ Phasensprung um π
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{||} > 0$ für $\vartheta_1 + \vartheta_2 \leq \pi \Rightarrow$ Phasensprung um π für $\vartheta_1 + \vartheta_2 > \frac{\pi}{2}$
- *Brewster-Winkel*
  $\tan\vartheta_B = \frac{n_2}{n_1}$
  Reflektierte Welle ist linear ($\perp$) polarisiert!!

3.8.5 Senkrechter Fall

- Einfallsebene nicht definiert
  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$
- $\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_\perp = \left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)_{||} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_\perp = -\left(\frac{E_{01r}}{E_{02}}\right)_{||} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$

3.8.6 Energietransport

Reflexionskoeffizient $R = \left|\frac{\overline{\vec{S}_{1r}\vec{n}}}{\overline{\vec{S}_1\vec{n}}}\right| = \left|\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right|^2$

Transmissionskoeffizient $T = \left|\frac{\overline{\vec{S}_2\vec{n}}}{\overline{\vec{S}_1\vec{n}}}\right| = \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(2)}\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}\mu_r^{(2)}}\frac{\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta_1}}\left|\frac{E_{02}}{E_{01}}\right|^2$

- $R + T = 1$

3.8.7 Totalreflexion

Bedingung $n_1 > n_2$

Grenzwinkel $\sin\vartheta_G = \frac{n_2}{n_1}$

- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{||} = e^{-i2\varphi}$
  $\tan\varphi = \frac{1}{\sin^2\vartheta_G}\frac{\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_G}}{\cos\vartheta_1}$
- $\left(\frac{E_{01r}}{E_{01}}\right)_{\perp} = e^{-i2\Psi}$
  $\tan\Psi = \frac{\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_G}}{\cos\vartheta_1}$
- Phasenverschiebung - i.A. $\varphi \neq \Psi$
- im Medium 2 exponentielle Dämpfung
  $\cos\vartheta_2 = i\sqrt{\left(\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_G}\right)^2 - 1}$
  $\overline{\vec{S}_2\vec{n}} = 0$

3.9 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

3.9.1 Inhomogene Wellengleichung

Ziel ist für gegebene

$$\varrho(\vec{r},t)$$
$$\vec{j}(\vec{r},t)$$

passende Potentiale

$$\phi(\vec{r},t)$$
$$\vec{A}(\vec{r},t)$$

zu finden

Lorentzeichung formt uns die zu Lösenden inhomogenen DGL um in

$$\begin{aligned}\Box\phi(\vec{r},t) &= -\frac{\varrho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\\ \Box\vec{A}(\vec{r},t) &= -\mu_r\mu_0\vec{j}(\vec{r},t)\end{aligned}$$

Problemstellung ist also 4mal eine Gleichung der Form

$$\Box\Psi(\vec{r},t) = \sigma(\vec{r},t)$$

zu lösen, wobei σ hier als *Quellfunktion* bezeichnet wird.

Greensche Funktion ist die Lösung der Inhomogenen DGL

$$\begin{aligned}\Box G(\vec{r}-\vec{r}',t-t') &= -\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')\\ \Psi(\vec{r},t) &= \int d^3r' \int dt'\, G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\sigma(\vec{r}',t')\end{aligned}$$

- $G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')$ beschreibt Ausbreitung einer Störung in $(\vec{r}',t')$ zur Zeit t am Ort $\vec{r}$.
- Kausalität fordert $t > t'$. Dies führt zur retadierten Lösung:

$$G_0^{ret}(\vec{r}-\vec{r}',t-t') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left(t' - \underbrace{\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{u}\right)}_{t_{ret}}\right)$$

mit der reterdierten Zeit $t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{u}$

- Theoretisch gibt es noch zusätzlich eine nichtkausale, die sogenannte avancierten Lösung:

$$G_0^{avan}(\vec{r}-\vec{r}',t-t') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left(t' - \underbrace{\left(t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{u}\right)}_{t_{avan}}\right)$$

mit der anancierten Zeit $t_{avan} = t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{u}$

- Allgemeine Lösung ist Greensche Funktion *plus Lösung der homogenen DGL* wie in 3.7.1 auf Seite 16 hergeleitet.

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \text{hom. Lsg}\\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \text{hom. Lsg}\end{aligned}$$

- Forminvariant zur E-statik und M-statik aber mit t_{ret}!
- Lorentzeichung ist erfüllt!

3.9.2 Zeitlich oszillierende Quellen

Einfachheitshalber können wir hier Dank der Linearität der Maxwellgleichungen anstatt

$$\begin{aligned}\varrho(\vec{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega\, \varrho_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\\ \vec{j}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega\, \vec{j}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

nur

$$\begin{aligned}\varrho(\vec{r},t) &= \varrho_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\\ \vec{j}(\vec{r},t) &= \vec{j}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

betrachten und hinterher wieder aufintegrieren.

Gegeben sei eine Stromverteilung der Form

$$\vec{j}(\vec{r},t_{ret}) = \vec{j}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{u}|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

- $\vec{A}(\vec{r})$ hängt nur über $k = \frac{\omega}{u}$ von ω ab
- $\vec{A}(\vec{r}, t)$ oszilliert mit gleicher Frequenz wie Quelle
- $\vec{r}$ außerhalb Quellenbereich ($|r| \gg d$)
  $\vec{E} = i\frac{u^2}{\omega} e^{-i\omega t} \nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$
- $\vec{E}$ bestimmt durch $\vec{A} \to \varphi$ nicht nötig!
- Lösung i.A. nicht analytisch integrierbar
- d ist die Ausdehnung der Stromverteilung

kleine Quellen $d \ll r, \lambda$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &\approx \tfrac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \tfrac{e^{ikr}}{r} \textstyle\int d^3r' \vec{j}\big(\vec{r}'\big) + \\ & \tfrac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \big(\tfrac{1}{r} - ik\big) \tfrac{e^{ikr}}{r} \textstyle\int d^3r' \vec{j}(\vec{r},t)(\vec{e}_r - \vec{r}) \end{aligned}$$

Elektrische Dipolstrahlung ist der erste Term

$$\begin{aligned} \vec{A}_1(\vec{r}) &= \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r'\, \vec{j}(\vec{r}') \\ &= -i\omega \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p} \end{aligned}$$

- $\vec{p} = \int d^3r \varrho(\vec{r}, t)$ ist das Dipolmoment der Ladungsverteilung
- Die dazugehörigen Felder sind

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(\vec{r}) &= \tfrac{\mu_0\mu_r}{4\pi} uk^2 \tfrac{e^{ikr}}{r} \big(1 - \tfrac{1}{ikr}\big)(\vec{e}_r \times \vec{p}) \\ \vec{E}_1(\vec{r}) &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \tfrac{e^{ikr}}{r} \big[k^2 (\vec{e}_r \times \vec{p}) \times \vec{e}_r \\ &+ \tfrac{1}{r} \big(\tfrac{1}{r} - ik\big)(3\vec{e}_r(\vec{e}_r\vec{p}) - \vec{p})\big] \end{aligned}$$

- 2.te Term = $\vec{A}_2$: Mag. Dipolstrahlun + el. Quadropolstrahlung

$$\vec{A}_2(\vec{r}) = \vec{A}_2^{mD}(\vec{r}) + \vec{A}_2^{eQ}(\vec{r})$$

Magnetische Dipolstrahlung ist

$$\vec{A}_2^{mD}(\vec{r}) = ik\frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e}_r \times \vec{m})$$

→ Magnetisches Dipolmoment
$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r'\, \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$

→ Die dazugehörigen Felder sind

$$\begin{aligned} \vec{B}_2^{mD}(\vec{r}) &= \tfrac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \tfrac{e^{ikr}}{r} \big[k^2 (\vec{e}_r \times \vec{m}) \times \vec{e}_r \\ &+ \tfrac{1}{r} \big(\tfrac{1}{r} - ik\big)(3\vec{e}_r(\vec{e}_r\vec{m}) - \vec{m})\big] \\ \vec{E}_2^{mD}(\vec{r}) &= -\tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \tfrac{k^2}{u} \tfrac{e^{ikr}}{r} \big(1 - \tfrac{1}{ikr}\big)(\vec{e}_r \times \vec{m}) \end{aligned}$$

→ durch Vergleich mit el. Dipolstrahlung gewonnen

→ Strahlungsleistung pro Raumwinkel
$\frac{dP_s^{(2)}}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{k^4 m^2}{u} \sin^2 \vartheta$

Elektrische Quadrupolstrahlung ist

$$\begin{aligned} \vec{A}_2^{eQ}(\vec{r}) &= -\omega k \tfrac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \big(1 - \tfrac{1}{ikr}\big) \tfrac{e^{ikr}}{r} \vec{I}(\vartheta, \varphi) \\ &= -uk^2 \tfrac{e^{ikr}}{r} \big(1 - \tfrac{1}{ikr}\big) \tfrac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \\ &\cdot \big(\vec{Q}(\vec{e}_r) + \vec{e}_r \textstyle\int d^3r'\, r'^2 \varrho\big(\vec{r}'\big)\big) \end{aligned}$$

→ Elektrischer Quadrupolterm

$$\begin{aligned} \vec{I}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2} \int d^3r'\, \vec{r}'\, (\vec{e}_r \vec{r}')\, \varrho(\vec{r}') \\ &= \tfrac{1}{3} \big(\vec{Q}(\vec{e}_r) + \vec{e}_r \textstyle\int d^3r'\, r'^2 \varrho\big(\vec{r}'\big)\big) \\ I_j(\vartheta, \varphi) &= \tfrac{1}{3} \textstyle\sum_{i=1}^3 (\vec{e}_r)_i \big(\int d^3r' Q_{ij}(\vec{r}') + \int d^3r'\, r'^2 \varrho(\vec{r}')\big) \end{aligned}$$

→ Quadropoltensor
$\underline{Q} = Q_{ij}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \left(3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}\right)$

→ $\vec{Q}(\vec{e}_r) = \underline{Q}\vec{e}_r$

Strahlungszone $r \gg d$ oder auch *Fernzone* genannt

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \int d^3r'\, \vec{j}(\vec{r}')\, e^{-ik\vec{e}_r\vec{r}'}$$

mit zusätzlich $\lambda \gg d$ gilt $kr' \ll 1$ und damit das endgültige Fernfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \int d^3r'\, \vec{j}(\vec{r}')$$

- es handelt sich hierbei um eine Kugelwelle mit Winkelabhängigen Koeffizienten
- Die zugehörigen Felder sind

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(\vec{r}) &= \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} uk^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e}_r \times \vec{p}) \\ \vec{E}_1(\vec{r}) &= u\left(\vec{B}_1 \times \vec{e}_r\right) \end{aligned}$$

- Energiedichte

$$\overline{w}_1(\vec{r}) = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{k^4 p^2}{r^2} \sin^2 \vartheta$$

mit $\vartheta = \measuredangle(\vec{e}_r, \vec{p})$

$$\overline{\vec{S}}_1(\vec{r}) = \vec{e}_r u \overline{w}_1(\vec{r})$$

- abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel

$$\begin{aligned} \frac{dP_S}{d\Omega} &= r^2 \overline{\vec{S}}_1(\vec{r})\, \vec{e}_r \\ &= \frac{u}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r} k^4 p^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

- Gesamte Strahlungsleistung

$$P_S = \frac{u}{12\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} k^4 p^2$$

- Quadropol Felder

$$\begin{aligned} \vec{B}^{eQ}(\vec{r}) &\approx -i\frac{\mu_0\mu_r}{24\pi} uk^3 \frac{e^{ikr}}{r} \left(\vec{e}_r \times \vec{Q}\right) \\ \vec{E}^{eQ}(\vec{r}) &\approx -i\frac{k^3}{24\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\left(\vec{e}_r \times \vec{W}\right) \times \vec{e}_r\right) \end{aligned}$$

Nahzone mit $k|\vec{r} - \vec{r}'| \ll 1$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}, t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

was der Magnetostatik entspricht.

- Die zugehörigen Felder sind

$$\begin{aligned}\vec{B}_1(\vec{r}) &= \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} u \frac{ik}{r^2}(\vec{e}_r \times \vec{p}) \\ \vec{E}_1(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{3\vec{e}_r(\vec{e}_r\vec{p}) - \vec{p}}{r^3}\end{aligned}$$

- $\vec{E}$ entspricht einem elektrostatischem Dipolfeld!
- dominant Elektrischer Charakter
- Zeitabhängigkeit über Dipolmoment $\vec{p}$.

3.10 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Inertialsysteme Bezugssysteme mit konstanter Relativgeschwindikeit

Ortsvektor kovariant

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

Norm von Kovarianten Vektoren $a_\mu a^\mu$ ist erhalten bei Lorentztransformation

Summenkonvention für 4-er Vektoren ist, das immer über ein Paar von von Indizes summiert wird, wobei einer unten, und einer oben stehen muss. Beide Vektoren müssen dazu multipliziert geschrieben sein. Summiert wird von 0 bis 3.

Metrischer Tensor bzw. der Indexverschiebungsoperator ist

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$
- $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$
- $g_{\mu\nu}x^\nu = x_\mu$
- $g^{\mu\nu}x_\nu = x^\mu$

Einheitsmatrix für 4-er Vektoren

$$\begin{aligned}\delta_\mu^\nu &= g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$

Eigenzeit τ

Minkowski-Kraft $K^\mu = m\frac{du^\mu}{d\tau} = m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \gamma\left(\frac{\vec{F}\vec{v}}{c}, F_x, F_y, F_z\right)$

Lorenz-Gamma-Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ mit $\beta = \frac{v}{c}$

Lorentztransformation mit der Matrize (hier exemplarisch in z Richtung mit v bewegt)

$$L_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Viererableitung $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

Stromdichte $j^\mu = (c\varrho, j_x, j_y, j_z) = \gamma\varrho_0(c, \vec{v}) = \varrho_0 u^\mu$

- ϱ_0 ist die Ladungsdichte
- $\vec{j} = \vec{v}\varrho_0$

Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$

Wellengleichung $(\partial^\mu\partial_\mu)A^\mu = \mu_0 j^\mu$

- μ_0 Permiabilitätskonstante
- $\partial^\mu\partial_\mu = \Box$
- Gilt nur in Lorentzeichung

Lorentzeichung $\partial_\mu A^\mu = 0$

Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

- Antisymmetrisch
  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$
- Komponenten

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- $F_{\mu\nu}F^{\mu n} = 2\left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2\right)$
  ist eine Lorentzinvariante

imhomogene Maxwellgleichung $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\beta$

Jakobi-Identität $\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$

4-dim Epsilontensor $\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{gerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ -1 & \text{ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ 0 & \text{zwei Indizes gleich} \end{cases}$

Dualrer Feldstärketensor $\overline{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}$

- $\overline{F}^{\mu\nu} = -\overline{F}^{\nu\mu}$

- Komponenten

$$\overline{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{1}{c}E_z & -\frac{1}{c}E_y \\ B_y & -\frac{1}{c}E_z & 0 & \frac{1}{c}E_x \\ B_z & \frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_x & 0 \end{pmatrix}$$

homogene Maxwellgleichung $\partial_\alpha \overline{F}^{\alpha\beta} = 0$

Transformation der Felder erst für den Spezialfall $\vec{v} = v\vec{e}_z$

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma\left(E_x - \beta c B_y\right) \\ E'_y &= \gamma\left(E_y + \beta c B_x\right) \\ E'_z &= E_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_x &= \gamma\left(B_x + \frac{\beta}{c}E_y\right) \\ B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_x\right) \\ B'_z &= B_z \end{aligned}$$

- $\vec{E}\vec{B} = \vec{E}'\vec{B}'$ ist Lorentzinvariante
- allgemeiner Fall mit $\vec{v}$ in beliebiger Richtung

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma\left[\vec{E} + c\left(\vec{\beta} \times \vec{B}\right)\right] - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\vec{E}\right) \\ \vec{B}' &= \gamma\left[\vec{B} - \frac{1}{c}\left(\vec{\beta} \times \vec{E}\right)\right] - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\vec{B}\right) \end{aligned}$$

Index

4-dim Epsilontensor, 21

Anharmonische Schwingungen, 2
Antiferromagnetismus, 12
Aperiodischer Grenzfall, 2
Austauschtransformation, 5

bedingt periodisch, 8, 9
Brechung, 17
Brechungsindex, 14, 17
Brewster-Winkel, 18

Coulomb-Eichung, 12, 13
Curie-Temperatur, 10

D'Alembert-Operator, 13
Deformationspolarisation, 10
Diamagnetismus, 12
Dielektrika, 9
Dielektrische Verschiebung, 10
Dielektrizitätskonstante, 17
Dielektrizitätstensor, 10
Dipolstrahlung, 20
dispersives Medium, 15
Dualrer Feldstärketensor, 21

ebene Wellen, 15
Eichfreiheit, 13
Eichtransformation, 12, 13
Eigenzeit, 21
Eindringtiefe, 17
Einheitsmatrix, 21
Elektrische Dipolstrahlung, 20
Elektrische Quadrupolstrahlung, 20
elektrische Suszeptibilität, 10
Elektrodynamik, 9
Elektromagnetische Wellen, 14
Elektrostatische Energie, 11
Elementardipole, 10
elliptische Polarisation, 15
Energiedichte, 11, 14, 16, 17
Energiesatz, 13
Energiestromdichte, 14, 17
Energietransport in Wellen, 16
Entartung, 9
Epsilontensor, 21
Erzeugende Funktionen, 5
erzeugenden Funktionen, 5
Erzwungene Schwingung, 2
Extinktionskoeffizient, 17

Feldenergie im Dielektrikum, 11
Felder in Medien, 13
Feldimpuls, 14
Feldstärketensor, 21
Fernzone, 20
Ferrimagnetismus, 12
Ferroelektrika, 10
Ferromagnetismus, 12
Flächenladungsdichte, 10
Forminvariant, 5
Fourier-Transformation, 16
Frequenz, 9
Fresnel'sche Formeln, 18
fundamentale Poisson-Klamern, 8

gedämpfter harmonischer Oszillator, 2
Geschwindigkeit, 14
Gleichgeqicht
    neutrales, 3
Gleichgewicht
    labiles, 3
    stabiles, 3
Gleichgewichtspunkte, 3
Greensche Funktion, 19
Grenzflächen, 12
Grenzschichten, 10
Grenzwinkel, 19
Gruppengeschwindigkeit, 4, 15

Hamilton Jakobi Gleichung, 6
Hamilton Jakobi Theorie, 4
Hamilton Jakobi-Theorie, 6
Hamiltonische charakteristische Funktion, 7
Hamiltonische Prinzipialfunktion, 6
Harmonische charakteristische Funktion, 7
Harmonische Oszillator, 2, 6
Helmholtz Satz, 13
homogene Maxwellgleichung, 22

Identische Transformation, 5
imhomogene Maxwellgleichung, 21
Impulsfluss, 14
Inertialsysteme, 21
Integral der Bewegung, 8

Jakobi-Identität, 8, 21

Kanonische Koordinaten, 4
kanonische Transformation, 5
Kanonischer Impuls, 4
Kapazität, 10
Kette, 4
Kollektiver Magnetismus, 12
komplexe Dielektrizitätskonstante, 17
komplexe Geschwindigkeit, 17
Koninuitätsgleichung Energie, 14
Kontinuitätsgleichung, 11, 13, 21
Koordinaten, 4
Kovariante Elektrodynamik, 21
Kraftdichte, 13
Kriechfall, 2
Kugelwellen, 15

Lagrange Funktion, 4
Libration, 8
Lichtgeschwindigkeit, 14
lineare periodische Kette, 4

lineare Polarisation, 15
Lorentzeichung, 13, 21
Lorentztransformation, 21
Lorenz-Gamma-Faktor, 21

Magnetische Dipolstrahlung, 20
magnetische Suszeptibilität, 11
Magnetisierung, 11
Magnetisierungsstromdichte, 11
Magnetostatik, 11
Massentensor, 3
Maxwell Gleichungen, 12
Maxwellgleichung, 21, 22
Maxwellscher Spannungstensor, 14
Medien, 13
Metrischer Tensor, 21
Minkowski-Kraft, 21

Nahzone, 20
Normal Koordinaten, 3

Observable, 8
Ortsvektor, 21

Paraelektrika, 10
Paramagnetismus, 12
periodisch, 8
Periodizität, 8
Permiabilität, 11
Phasengeschwindigkeit, 14, 17
Phasenlage, 17
Phasenraum, 4
Plattenkondensator, 10
Pointingvektor, 14, 16
Poisson-Klammern, 8
Poissonscher Satz, 8
Polarisation, 15
Polarisationsladungsdichte, 10
Polarkoordinaten, 5
Potentiale, 13
Prinzipialfunktion, 6
Punkttransformation, 5

Quadropoltensor, 20
Quadrupolstrahlung, 20
Quellfunktion, 19

Reflexion, 17
Reflexionskoeffizient, 19
relative Permiabilität, 11
Rotation, 8
Ruhelage, 2

Säkulargleichung, 3
schwache Dämpfung, 2
Schwingende Systeme, 3
Schwingungen, 2
Sebstenergiedichte, 11
Seperation der Variablen, 7
Snellius'sches-Brechungsgesetz, 18
Spannungstensor, 14
Strahlungszone, 20
Stromdichte, 11, 21
Summenkonvention, 21
Suszeptibilität
    elektrische, 10
    magnetische, 11

Telegraphengleichung, 17
Totalreflexion, 19
Transmissionskoeffizient, 19

Vektropotential, 11
Verallgemeinerte Orthonormalität, 3
Viererableitung, 21
Vierergeschwindigkeit, 21

Wechselwirkungsanteil, 11
Wellen, 14
Wellenausbreitung in elektrischen Leitern, 17
Wellengleichung, 14, 21
Wellenlänge, 15, 17
Wellenpakete, 15
Wellenvektor, 14
Wellenzahl, 17
Winkelvariable, 8
Wirkung, 4
Wirkungsvariable, 8

zirkulare Polarisation, 15
Zyklische Koordinaten, 4