Formelsammlung
diskrete Strukturen I

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 27.05.2005 - Version: 1.0.0
Erhältlich unter http://privat.macrolab.de

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung “Diskrete Strukturen 1 für Informatiker” von Dr. Markus Wessler an der Universität Kassel im Sommersemester 2004.

Inhaltsverzeichnis

Die hinter den Überschriften angegebenen Nummern beziehen sich auf die Seitenzahlen des Buches “Diskrete Mathematik” von Martin Aigner (5. Auflage).

Grundlagen der Logik und der Mengenlehre sind in meiner “Formelsammlung Mathe I/II für Informatiker” nach zuschlagen.

1 Grundlagen

1.1 Logik & Aussagen

Eine *Aussage* ist ein Sprachkonstrukt, das entweder wahr oder falsch ist. Für zwei Aussagen A und B exisiteren Verknüpfungen.

1.1.1 Verknüpfungen

- Negation
  $\neg a$: nicht a
- Implikation
  $a \Rightarrow b$: aus a folgt b
- Äquivalenz
  $a \Longleftrightarrow b$: a und b sind äquivalent (gleichwertig)
- Konjunktion
  $a \wedge b$: a und b
- Disjunktion
  $a \vee b$: a oder b
- Antivalenz (XOR)
  $a \dot{\vee} b$: entweder a oder b

1.1.2 Rechenregeln

- Kommutativgesetz
  $a \wedge b = b \wedge a$
  $a \vee b = b \vee a$
- Assoziativgesetz
  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
- Distributivgesetz
  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- De Morgan
  $\neg (a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
  $\neg (a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$
- doppelte Negation
  $\neg (\neg a) = a$
- neutrales Element
  $a \vee \mathrm{f} = a$
  $a \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}$
  $a \vee \mathrm{w} = \mathrm{w}$
  $a \wedge \mathrm{w} = a$

- inverses Element
  $a \vee (\neg a) = \mathrm{w}$
  $a \wedge (\neg a) = \mathrm{f}$

1.1.3 Quantoren

- Allquantor $\forall x : \varphi(x)$
  für alle x gilt $\varphi(x)$.
  z.B. $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \in \mathbb{N} = \forall^x_{\mathbb{N}} : x^2 \in \mathbb{N}$
- Existenzquantor $\exists x : \varphi(x)$
  es gibt (mindestens) ein x für das $\varphi(x)$ gilt.
  z.B. $\exists x \in \mathbb{N} : \varphi(x) = \exists^x_{\mathbb{N}} : \varphi(x)$
- $\exists! x : \varphi(x)$ oder $\exists^1 x : \varphi(x)$
  es gibt genau ein x für das $\varphi(x)$ gilt.
- Negation $\forall x : H(x) \Leftrightarrow \neg \exists x : \neg H(x)$
  Es gilt für alle x, $H(x) \Leftrightarrow$ Es gibt nicht ein x, für das $H(x)$ nicht gilt.

1.1.4 Eigenschaften von Aussagen

Widerspruch (Symbol: Blitz (\lightning)) heißt eine zusammengesetzte Aussage, wenn sie *immer falsch* ist.
z.B. $A \wedge \neg A$

Tautologie heißt eine Aussage, wenn sie *immer wahr* ist.
z.B. $A \vee \neg A$

1.2 Mengen

Eine *Menge* ist die Gesamtheit einer Zahl von Objekten unserer Anschauung oder Intuition (nach dem Mathematiker Cantor)). Die Objekte heißen Elemente und wir schreiben $a \in M$ (a ist Element der Menge A) bzw. $a \notin A \Leftrightarrow \neg (a \in M)$.

1.2.1 Beschreibung

Aufzählung $W = \{Montag, Dienstag, \ldots\}$

Beschreibung $\mathbb{Z}$ =Menge der ganzen Zahlen

Auswahl $M = \{x \in \mathbb{Z} | x \textit{ ist gerade}\}$

- | mit der Eigenschaft

1.2.2 Standardmengen

- Leere Menge
  $\emptyset = \{\}$
- Natürlichen Zahlen
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
  - Natürlichen Zahlen mit 0
    $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Ganzen Zahlen
  $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Rationalen Zahlen
  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$
- Reellen Zahlen
  $\mathbb{R} = \{$jeder Punkt auf dem Zahlenstrahl$\}$
  - positiven reellen Zahlen
    $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
- Komplexen Zahlen
  $\mathbb{Z} = \left\{ x + iy | x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1} \right\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.2.3 Intervalle

- offenes Intervall
  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- halboffenes Intervall
  $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ bzw. $(a, b($
  $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ bzw. $)a, b)$
- abgeschlossenes Intervall
  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ bzw. $)a, b($

1.2.4 Operationen

- Gleichheit
  $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
- Teilmenge
  $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
- echte Teilmenge
  $A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$
- Vereinigung
  $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- Disjunkte Vereinigung
  $A \mathbin{\dot{\cup}} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- Schnitt
  $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- Ohne (Differenz)
  $A \backslash B = \{x | x \in A \vee x \notin B\}$
- symmetrische Differenz
  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- geordnete Paare
  $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$
- Potenzmenge
  $\mathcal{P}(M) = \{A | A \subseteq M\}$
- Komplementärmenge
  für $A \subseteq M$ ist $\bar{A} = \{x \in M | x \notin A\}$
- Anzahl der Elemente
  $|M|$ =Anzahl der Elemente von M

1.2.5 Rechenregeln

- Kommutativgesetz
  $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$
  $A \Delta B = B \Delta A$
- Assoziativgesetz
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- Distributivgesetz
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- De Morgan
  $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$
  $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$
- doppelt invers
  $\overline{\overline{A}} = A$
- neutrales Element
  $A \cup \emptyset = A$
  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- inverses Element
  $A \cap \overline{A} = \emptyset$
  $A \cup \overline{A} =$Grundmenge

1.3 Beweisverfahren

1.3.1 direkter Beweis

Diesen Beweis erhält man durch gezielte Umformung der Aussagen bzw. durch logisches Schließen (Implikation).

1.3.2 indirekter Beweis

Auch Widerspruchsbeweis genannt. Hier versuch man die Gleichwertigkeit von

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge (\neg B)) \Rightarrow Falsch)$$

auszunutzen.

z.B.: "Wenn es regnet ist die Straße nass." ⇔ "Es regnet und die Straße ist nicht nass, ist ein Widerspruch."

1.3.3 Kontraposition

Hier wird versucht die Aussage umzudrehen (beruht auf Tautologie).

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

z.B.: "Wenn es Regnet ist die Straße nass." ⇔ "Wenn die Straße nicht nass ist, kann es nicht geregnet haben."

1.3.4 Vollständige Induktion I.33

$A(n)$ Aussage für natürliche Zahlen

1. Induktionsanfang: $A(1)$ gilt
2. Induktionsannahme: für jedes n gilt $A(n)$
3. Induktionsschritt: Zeige: aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$. (bzw. $A(n+1)$ lässt sich mit Hilfe der Annahme $A(n)$ beweisen)

1.4 Abbildungen

Eine Abbildung ist eine eindeutige Zuordnung, d.h. zu jedem Urbild wird genau ein Bild zugeordnet.

Mengen $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$
f : Urmenge $\to$ Bildmenge

Elemente von Mengen $a \mapsto f(a)$
f : Urbild $\mapsto$ Bild

1.4.1 injektiv

wenn es zu jedem unterschiedlichen Urbild auch unterschiedliche Bilder gibt.

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

- f injektiv $\Leftrightarrow f^{-1}(f(a)) = a$
- $f : A \to B$ injektiv $\Rightarrow |A| \leq |B|$
  - durch Einschränken von B kann f bijektiv gemacht werden

1.4.2 surjektiv

heißt eine Abbildung $f : A \to B$, wenn es zu jedem Element aus dem Bildraum auch mindestens ein passendes Urbild gibt.

$$\forall_B^b : \exists_A^a : f(a) = b$$

- f surjektiv $\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(b)\right) = b$
- $f : A \to B$ surjektiv $\Rightarrow |A| \geq |B|$

1.4.3 bijektiv

ist eine Abbildung f, wenn sie surjektiv und injektiv ist. Dies sind 1:1 - Abbildungen.

- Bei endlichen Mengen:
  $f : A \to B$ bijektiv (surjektiv & injektiv) $\Rightarrow |A| = |B|$
- es existiert bei bijektiven Abbildungen eine Umkehrabbildung.

1.4.4 isomorph

Eine Abbildung f heißt *isomorph*, wenn sie bijektiv und linear ist. (entspricht Umbenennung der Elemente)

1.5 Sonstiges

1.5.1 Ganzzahliger Anteil

Der *ganzzahlige Abteil* einer Zahl x kann wie folgt dargestellt werden (Abrunden):

$$\lfloor x \rfloor := \max \{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$$

2 Kombinatorik

2.1 Elementare Zählprinzipien

2.1.1 Auswahlen

Wir betrachten eine Menge M mit n Elementen. Wie viele Auswahlen von k Elementen aus M gibt es:

1. Variationen
   (a) mit Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge
   $$n^k$$
   (b) ohne Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge (speziell für $k = n$ Permutation)
   $$\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!$$
2. Kombinationen
   (a) mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
   $$\binom{n-1+k}{k}$$
   (b) ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
   $$\binom{n}{k}$$

2.1.2 Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

- $$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k} \end{aligned}$$
- Entwicklung des Pascalschen Dreiecks $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$
- Binomalentwicklung $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$
- $\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}$
- $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n\,(n-1)\,2^{n-2}$
- $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{r}{k} \binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n}$

2.1.3 Summenregel

$S = \dot\bigcup_{i=1,\ldots,n} S_i \Rightarrow |S| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|$

Man klassifiziere Elemente von S in sich gegenseitig ausschließende Eigenschaften.

2.1.4 Produktregel

$S = S_1 \times \ldots \times S_n \Rightarrow |S| = \prod_{i=1}^{n} |S_i|$

2.1.5 Gleichheit

S, T endliche Mengen. Falls es eine bijektive Abbildung von $f : S \to T$ gibt, so gilt $|S| = |T|$

2.1.6 Doppeltes Abzählen

S, T endliche Mengen, $R \subseteq S \times T$. Für $a \in S$ bezeichnet $l\,(a)$ die Zahl der Elemente $b \in T$ mit $(a, b) \in R$ und entsprechend für $b \in T$ sei $r\,(b)$ die Zahl der Elemente $a \in S$ mit $(a, b) \in R$. Dann

$$|R| = \sum_{a \in S} l\,(a) = \sum_{b \in T} r\,(b)$$

2.1.7 Schubfachprinzip

S, T endliche Mengen, $f : S \to T$ Abbildung. Falls $|S| > |T|$, so ist f nicht injektiv.

2.2 Permutationen

2.2.1 Definition

Eine Permutation ist eine Auswahl von n Elementen aus einer n-elementigen Menge mit Berücksichtigung der Reihenfolge.

Eine Permutation ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$. Die Menge aller solchen Permutationen heißt *symmetrische Gruppe* und wir bezeichnen sie mit S_n

- $|S_n| = n!$

2.2.2 Zyklus

Ein *Zyklus* $(i_1,\ldots,i_t)$ der Länge t einer Permutation σ ist ein Tupel mit $\sigma(i_j) = i_{j+1}$, $\sigma(i_t) = i_1$.

- Jede Permutation lässt sich aus Zyklen zusammensetzen, wo jede Ziffer insgesamt nur einmal vorkommt
- Ein Zweierzyklus wird auch Transposition genannt.
- Ein Zyklus der Länge t kann man auf t verschiedene weisen schreiben, die wir aber miteinander Identifizieren
- Ein Zyklus ist eine Art "Ring-Rechtsshift" der dazugehörigen Einträge in der Permutation
- Zyklen sind elementfremd, wenn sie keine Ziffer gemeinsam haben
- elementfremde Zyklen lassen sich in ihrer Reihenfolge vertauschen
- Einerzykel (enthalten nur eine Ziffer) ändern nicht die Reihenfolge, und müssen nicht hingeschrieben werden, wohl aber mitgezählt
- z.B: eine 6er Permutation aus 3 Zyklen

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= (1,2)(3,5,4)(6)\end{aligned}$$

2.2.3 Stirlingzahl

Die Anzahl $s_{n,k}$ von Permutationen $\sigma \in S_n$, die aus genau k Zyklen besteht, heißt *Stirlingzahl* 1.Art (jede Ziffer taucht nur einmal auf / Zyklen sind elementfremd)

- $s_{n,n} = 1$
  nur identische Abbildung möglich $\sigma = (1)(2)\ldots(n)$
- Für $n,k \in \mathbb{N}\,(n \geq k)$ gilt:
  $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)\, s_{n-1,k}$
- $\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} x^k = \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!}$

3 Rekursionen

3.1 Lineare Rekursionsgleichungen

3.1.1 Definition

Eine Gleichung der Form

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + b_k \,(n \geq k)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots\ ,\ a_{k-1} = b_{k-1}$$

heißt lineare Rekursionsgleichung (RG) k-ter Ordnung. Für $b_k = 0$ heißt die Gleichung homogen, sonst inhomogen. Ziel ist es einen geschlossenen Ausdruck zu finden.

3.1.2 lineare Rekursionsgleichung 1. Ordnung

Eine (inhomogene) lineare RG 1.Ordnung

$$a_0 = b_0,\ a_n = c_1 a_{n-1} + b_1 \quad (n \geq 1)$$

hat die Lösung

$$a_n = \begin{cases} c_1^n b_0 & (b_1 = 0) \\ b_0 + n b_1 & (c_1 = 1) \\ c_1^n b_0 + \frac{c_1^n - 1}{c_1 - 1} b_1 & (sonst) \end{cases}$$

3.1.3 lineare Rekursionsgleichung 2. Ordnung

Eine *homogene* lineare RG 2. Ordnung hat

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \,(n \geq 2)$$

- bei $c_1^2 + 4c_2 > 0$ die Reelle Lösung:

  $$a_n = A\alpha^n - B\beta^n$$

  wobei α, β die zwei (verschiedenen) Lösungen der Gleichung
  $t^2 - c_1 t - c_2 = 0$ sind

  $$\alpha = \frac{c_1}{2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4} + c_2} \quad \beta = \frac{c_1}{2} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4} + c_2}$$

  und

  $$A = \frac{b_1 - b_0\beta}{\alpha - \beta} \quad B = \frac{b_1 - b_0\alpha}{\alpha - \beta}$$

- bei $c_1^2 + 4c_2 = 0$ die Reelle Lösung:

  $$a_n = (nb_1 - (n-1)\,\alpha b_0)\,\alpha^{n-1} \quad \alpha = \frac{c_1}{2}$$

- bei $c_1^2 + 4c_2 < 0$ die komplexe Lösungen. Formeln siehe bei $c_1^2 + 4c_2 > 0$.

3.1.4 Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,(n \geq 2)$$

hat die Lösung:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$
- $F_{2n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2$
- $F_{2n} = F_n\left(2F_{n-1} + F_n\right)$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1)$

3.2 Erzeugende Funktionen

3.2.1 Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge. Die formale Potenzreihe

$$A(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

heißt *erzeugende Funktion* zur Folge (a_n).

3.2.2 Rechenregeln

Sind $(a_n), (b_n)$ zwei Folgen mit entsprechenden Funktionen $A(x), B(x)$, dann:

Summe $(c_n) := (a_n + b_n)$
Hat erzeugende Funktion $C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ und wir schreiben $C(x) = A(x) + B(x)$

Produkt $(c_n) := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$
Hat erzeugende Funktion $C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ und wir schreiben $C(x) = A(x)\,B(x)$

- Erzeugende Funktionen lassen sich gliedweise Integrieren und Differenzieren, um so neue erzeugende Funktionen zu konstruieren.

3.2.3 Inverse

Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ erzeugende Funktion zu (a_n). Dann heißt die erzeugende Funktion $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ *invers zu* $A(x)$, falls $A(x)\,B(x) = 1$

- Hier ist 1 die erzeugende Funktion zur Folge $(1, 0, 0, \ldots)$
- Die erzeugende Funktion $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ hat eine inverse erzeugende Funktion (auch: $A(x)$ ist invertierbar) genau dann, wenn $a_0 \neq 0$

3.2.4 Wichtige Erzeugende Funktionen

- geometrische Reihe
  $\sum_{n\geq 0} (\alpha x)^n = \frac{1}{1-\alpha x}$
- $\sum_{n\geq 0} (n)\, x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$
- $\sum_{n\geq 0} (n+1)\, x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$
- $\sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$
- $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$
- $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ die Folgen zu den erzeugenden Funktionen $A(x), B(x)$
  $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$

3.2.5 Lösen von linearen Rekursionsgleichungen durch erzeugende Funktionen

Gegeben ist eine lineare Rekursionsgleichung k-ter Ordnung

$$a_0{=}b_0, \ldots, a_{k-1}{=}b_{k-1} \qquad a_n{=}\sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i} \ (n{\geq}k)$$

Ansatz (Siehe Algorithmus 1 auf der nächsten Seite) Hierbei ersetzt man $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ durch die Rekursionsdefinition. Dabei entstehen Terme die wieder nur ein a_n mit verschobenen Summationsbereich enthalten. Hier kann man nun durch Umformung das ganze wieder in ein Polynom plus $A(x)$ bringen.

Koeffizienten Zusammenfassen (aus letzter Gleichung) zu d_i

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{i=0}^{k-1} d_i x^i + A(x) \sum_{i=1}^{k} \left(c_i x^i\right) \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{k-1} d_i x^i}{1 - \sum_{i=1}^{k} \left(c_i x^i\right)} \end{aligned}$$

Faktorisieren des Nenners (Bestimmen von α_i und m_i)

$$1 - \sum_{i=1}^{k} \left(c_i x^i\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \alpha_i x\right)^{m_i}$$

Partialbruchbruchzerlegung (Bestimmen von $g_i(x)$)
$A(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{g_i(x)}{(1-\alpha_i x)^{m_i}}$
$g_i(x)$ wird von x unabhängig, wenn beim Faktorisieren des Nenners komplexe Lösungen zugelassen werden. Dies erleichtert die Anwendung des nächsten Punktes.

Erstellen von Erzeugenden Funktion für $A(x)$

Algorithm 1 : Ansatz zum Lösen von LRG mit erzeugenden Funktionen

Ansatz $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$

Startwerte einsetzten $A(x) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i + \sum_{n\geq k} a_n x^n$

Rekursion einsetzten $A(x) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i + \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{n\geq k} c_i a_{n-i} x^n\right)$

Index verschieben $A(x) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i + \sum_{i=1}^{k} \left(c_i x^i \sum_{n\geq k-i} a_n x^n\right)$

Ergänzen und $A(x)$ ersetzen
$A(x) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i + \sum_{i=1}^{k-1} \left(c_i x^i \left(A(x) - \sum_{n=0}^{k-i-1} a_n x^n\right)\right) + c_k x^k A(x)$

$$A(x)=\sum_{n\geq 0}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{r}\left(g_i(x)\begin{pmatrix} m_i-1+n \\ n\end{pmatrix}\alpha_i^n\right)}_{f} x^n\right)$$

Koeffizientenvergleich
Wenn alle g_i nicht von x abhängig sind, so ist $f = a_n$, wenn nicht muss diese Formel noch etwas umgestellt werden. Hiermit wäre ein geschlossener Ausdruck für a_n gefunden.

4 Graphentheorie

4.1 Grundlagen

4.1.1 Definition Graph

Ein *schlichter Graph* ist ein Paar $G = (E, K)$, wobei $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine endliche nicht leere Menge von *Ecken* und $K \subseteq \{\{v_i, v_j\} \mid i \neq j\}$ eine Menge von *Kanten* ist.

Ein *Graph* (manchmal auch "*Multipgraph*" genannt) erlaubt zusätzlich *Schleifen* (d.h. $\{v_i, v_i\}$) und auch *Mehrfachkanten* (d.h.

$\{v_i, v_j\}_n$ hat eine Vielfachheit von n) mit einer gewissen Vielfachheit.

- G schlicht und $|E| = n \Rightarrow |k| \leq \binom{n}{2}$
- $V_n =$ *vollständiger (schlichter) Graph*. D.h. das alle Ecken über kanten mit jeder anderen Ecke verbunden sind.
  - V_{2n+1} ist eulersch
  - V_n ist $(n-1)$-regulär
  - V_n ist mit $n \geq 5$ nicht plättbar
- *Hyperwürfel*
  - der 0-dimensionale Hyperwürfel hat eine Ecke, und keine Kante
  - jeder Hyperwürfel ist hamiltonisch
  - Hat der d-dimensionale Hyperwürfel (E, K) die Ecken $v_1, \dots, v_{2^d}$, so hat der $(d+1)$-dimensionale Hyperwürfel die Ecken $w_1, \dots, w_{2^d}, w'_1, \dots, w'_{2^d}$ und die Kanten

$$\{\{w_i,w_j\},\{w_i,w_j\} \mid i\neq j \wedge \{v_i,v_j\}\in K\} \\ \cup\left\{\left\{w_i,w'_i\right\} \mid 1\leq i\leq 2^d\right\}$$

  - ein d-dimensionaler Hyperwürfel ist d-regulär
  - ein $2n$-dimensionaler Hyperwürfel ist ist eulersch

4.1.2 Grad & Gradfolge

Sei $G = (E, K)$ ein Graph mit $E = \{v_1, \dots, v_n\}$. Der *Grad* der Ecke v ist

$$\deg(v) = |\{z \in G \mid v \in z\}|$$

Schleifen müssen hierbei doppelt gezählt werden! Der Grad gibt die Anzahl der Kanten an, die v als Ecke haben.

Das n-Tupel $(\deg(v_1), \dots \deg(v_n))$ heißt *Gradfolge* von G.

- $\sum_{v\in E} \deg(v) = 2|K|$
- Die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad ist gerade
- Es gibt einen schlichten Graphen G mit der Gradfolge $(d_1, \dots, d_n)$ mit $d_1 \geq \dots \geq d_n$ genau dann, wenn es einen Graphen mit der Gradfolge $(d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ gibt.

4.1.3 Regulär

Der Graph $G = (E, K)$ heißt *k-regulär*, falls alle Ecken von G den selben Grad k haben.

- V_n ist $(n-1)$-regulär

4.2 Eulersche und hamiltonische Graphen

4.2.1 Weg & Eigenschaften

Sei $G = (E, K)$ ein Graph, und $v, e \in E$.

Ein *Weg* von v nach w ist eine Folge von Ecken $(v = v_1, v_2, \ldots, v_m = w)$ mit der Eigenschaft, dass alle $\{v_i, v_{i+1}\} \in K$ (Kanten von G) sind. Der Weg heißt *geschlossen* (bzw. *offen*), falls $v = w$ (bzw. $v \neq w$).

Der Weg heißt *(Kanten-)einfach*, falls alle Kanten $\{v_i, v_{i+1}\}$ paarweise verschieden sind.

Der Weg heißt *eckeneinfach*, falls alle Ecken v_i paarweise verschieden sind (für $i = 1, \ldots, m-1$).

Die *Länge* eines Weges, ist die Anzahl der Kanten, die er enthält.

- eckeneinfach $\Rightarrow$ kanteneinfach

4.2.2 Abstand & Durchmesser

Bei einem zusammenhängenden Graphen ist der *Abstand* zweier Ecken die Länge des kürzesten Weges, der diese Ecken verbindet.

Der *Durchmesser* ist der maximale Abstand zweier Ecken.

4.2.3 eulerscher Graph

G heißt *eulerscher Graph*, falls es in G einen geschlossenen (Kanten-)einfachen Weg gibt, der jede Kante von G enthält. Diesen Weg nennen wir *eulersche Linie*.

- G ist eulerscher Graph $\Leftrightarrow$ jede Ecke von G hat geraden Grad und G ist zusammenhängend
- Problem der Königsberger Brücken

4.2.4 zusammenhängend

Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, falls je 2 verschiedene Ecken durch einen (offenen) eckeneinfachen Weg verbunden werden können.

4.2.5 Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph. Ein geschlossener eckeneinfacher Weg in G heißt *Kreis*.

4.2.6 Teilgraph

Sei $G = (E_G, K_G)$ ein Graph. Ein Graph $H = (E_H, K_H)$ heißt *Teilgraph* von G, falls $E_H \subseteq E_G$ und $K_H \subseteq K_G$.

4.2.7 hamiltonischer Graph

Sei G ein Graph. Falls es in G einen Kreis gibt, der alle Ecken von G enthält, so heißt G ein *hamiltonischer Graph* und der Kreis heißt *Hamiltonkreis*.

- Ist G ein hamiltonischer Graph, so besitzt G einen Teilgraphen H mit:
  - $E_H = E_G$
  - H ist zusammenhängend
  - $|E_H| = |K_H|$
- Traveling Salesman Problem

4.2.8 Adjazenzmatrix

Die *Adjazenzmatrix* zu einem Graphen mit $v_1, \ldots, v_n$ ist die $n \times n$-Martix $M = (a_{ij})$, wobei a_{ij}die Anzahl der Kanten zwischen der Ecke v_i und v_j ist. $M^k = (b_{ij})$ gibt mit b_{ij} an, wie viele Wege der Länge k es zwischen i und j gibt.

4.3 Bipartite Graphen

4.3.1 bipartit & Matching

Ein Graph $G = (E, K)$ heißt *bipartit*, falls $E = E_1 \dot\cup E_2$ und K nur aus Knoten besteht, die jeweils eine Ecke aus E_1 mit einer aus E_2 verbinden.

Eine Teilmenge $K' \subseteq K$ heißt *Matching*, falls keine zwei Kanten aus K' eine gemeinsame Ecke besitzen. Ein Matching heißt *perfekt*, falls $|K'| = |E_1|$ oder $|K'| = |E_2|$.

- ein bipartiter Graph $G_{m,n}$ (mit $|E_1| = n$ und $|E_2| = m$), heißt *vollständig*, wenn je zwei Ecken aus verschiedenen Ecken durch eine Kante verbunden sind.
  - für n, m gerade $\Leftrightarrow G_{m,n}$ ist eulersch
  - für $n = m \geq 2 \Leftrightarrow G_{m,n}$ hamiltonisch
  - GEW-Graph: $n = 3$ $m = 3$
  - für $n, m \geq 3$ ist $G_{m,n}$ nicht plättbar

4.3.2 Heiratssatz / Existenz eines perfekten Matching

Sei $G = (E_1 \dot\cup E_2, K)$ ein bipartiter Graph. Für jede Teilmenge $U \subseteq E_1$ definieren wir $\deg(U) :=$ Anzahl der Ecken aus E_2, die mit einer Ecke aus U verbunden sind. Dann gilt:

U besitzt ein perfektes Matching, genau dann wenn $\forall U \subseteq E_1 : \deg(U) \geq |U|$.

- $\deg(U) \leq \sum_{v \in U} \deg(v)$

- jeder bipartite k-reguläre Graph hat ein perfektes Matching
- Wenn $|E_1| \neq |E_2| \Rightarrow$ Kanten weglassen und Teilgraph betrachten

4.4 Bäume

4.4.1 Baum & Blätter

Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreis.

Die Ecken vom Grad 1 heißen *Blätter*.

- Jeder Baum mit mehr als einer Ecke, hat (mindestens) ein Blatt
- Jeder zusammenhängende Graph G mit n Ecken ist genau dann ein Baum, wenn er $n-1$ Kanten hat.

4.4.2 aufspannender Baum

Sei $G = (E, K)$ ein Graph. Ein Teilgraph von G heißt *aufspannender Baum von* G, falls es ein Baum ist, der alle Ecken von G enthält.

- jeder zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Baum

4.5 Eulerscher Satz

4.5.1 Äquivalenz von Graphen / ebene Graphen

Ein zusammenhängender Graph heißt *eben*, falls sich keine Kanten kreuzen.

Zwei Graphen $G = (E, K)$ und $G' = (E', K')$ heißen *äquivalent*, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi : E \to E'$ gibt, so dass $\{v, w\}$ eine Kante von G ist, genau dann wenn $\{\varphi(v), \varphi(w)\}$ eine Kante von G' ist.

Ein Graph, der zu einem ebenen Graphen äquivalent ist, heißt *plättbar*.

4.5.2 Eulerscher Satz

In einem Graphen mit e Ecken, k Kanten und f Flächen (von den Kanten abgetrennt) gilt stets

$$e - k + f = 2$$

- Maximale Kantenanzahl bei einem plättbaren Graphen mit n (≥ 3) Ecken.

$$k(n) = 3(n-2)$$

4.5.3 Satz von Kuratowski

Ein Graph ist genau dann nicht plättbar, wenn er V_5 oder GEW als Teilgraphen enthält.

- Der GEW-Graph (der vollständige bipartite 3-Graph, $G_{3,3}$) ist nicht plättbar
  - Problem 3 Häuser mit 3 Versorgern (*G*aß, *E*lektrizität, *W*asser) kreuzungsfrei zu verbinden.
- V_5 ist nicht plättbar

5 Wahrscheinlichkeitstheorie

5.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

5.1.1 Definitionen

Sei Ω eine höchstens abzählbare Menge (d.h. es gibt eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \Omega$) und sei $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ (P von Probability = Wahrscheinlichkeit) eine Abbildung mit den Eigenschaften:

- $P(\Omega) = 1$
- P ist additiv auf disjunkten Mengen: $P\left(\dot\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \sum_{n\geq 0} P(A_n)$

Dann heißt (Ω, P) ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* (*endlicher Wahrscheinlichkeitsraum*, falls Ω endlich), und P heißt die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* auf Ω. $P(A)$ nennen wir die *Wahrscheinlichkeit* von A.

Wir nennen $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ein *Ereignis in* Ω, und falls $|A| = 1$, *Elementarereignis.*

$\bar{A} = \Omega \backslash A$ heißt *Gegenereignis* zu A.

$\emptyset$ heißt *unmögliches Ereignis* und Ω *sicheres Ereignis.*

- $A \subseteq B \subseteq \Omega$:
  - $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$
  - $P(A) \leq P(B)$
- $P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5.1.2 Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum

(Ω, P) heißt *Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum,* falls $|\Omega| < \infty$ und $\forall^{A}_{\mathcal{P}(\Omega)} : P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

- insbesondere $\forall^{w}_{\Omega} : P(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}$

5.1.3 bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei (Ω, P) ein diskreter W-Raum, $A, B \subseteq \Omega$, $P(B) > 0$.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B)\,P(A)}{P(B)}$$

heißt bedingte W-keit von A bezüglich B (d.h. die W-keit von A, falls man schon weiß, dass B erfüllt ist).

- (Ω, P) ein diskreter W-Raum, $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$, $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$.

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \prod_{i=2}^{n} P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}}(A_i)$$

5.1.4 Formel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit

(Ω, P) ein diskreter W-Raum, $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ mit $\Omega = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup \ldots \dot\cup A_n$, $\mathrm{P}(A_i) > 0$, $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) > 0$. Dann:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P_{A_i}(B)$$

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)\,P_{A_i}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P_{A_i}(B)}$$

- Für $n = 2$:
  $P(B) = P(A)\,P_A(B) + P(\bar{A})\,P_{\bar{A}}(B)$

5.2 Unabhängigkeit und Wahrscheinlichkeitsverteilung

5.2.1 Definition

Sei (Ω, P) ein diskreter W-Raum. Wir nennen zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ *unabhängig voneinander*, falls $P(B) = 0$ oder $P(A) = P_B(A)$. Diese Aussage ist Äquivalent zu $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

Allgemein heißen $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ *unabhängig voneinander*, falls für alle $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $k \geq 2$ gilt:

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right)$$

Eine Verteilungsfunktion $P^n : \Omega^n \to [0,1]$ die jedem $(A_1, \ldots, A_n) \mapsto P^n((A_1, \ldots, A_n)) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$ Tupel von Ereignissen eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.

5.2.2 Binomialverteilung

Wir betrachten $\Omega = \{0, 1\}$ mit $P(0) = p$ und $P(1) = 1 - p$. Die *Binomialverteilung*

$$b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, das bei n-maligen Wiederholen genau k-mal ein Ereigniss mit der Wahrscheinlichkeit p auftritt.

- z.B. 10-maliger Münzwurf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das genau 7 Mal Zahl kommt: $b_{10,\frac{1}{2}}(7)$
- ist bezüglich verschiedenen k disjunkt
- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p) = npq$

5.2.3 Hypergeometrische Verteilung

Situation: Urne mit n Kugeln, davon seien n_1 ausgezeichnet. Wir ziehen r Kugeln ($r \leq n$). Wie viele dieser r Kugeln gehören zu den n_1 ausgezeichnet?

$$h_{n,n_1,r}(k) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n-n_1}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

- ist bezüglich verschiedenen k disjunkt
- Bei großen Zahlen ($r \ll n_1$) lässt sich $h_{n,n_1,r}(k) \approx b_{r,\frac{n_1}{n}}(k)$ annähern
- $E(X) = \frac{n_1}{n} r$

5.3 Erwartungswert und Varianz

5.3.1 Zufallsvariable

Eine *Zufallsvariable* ist eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

5.3.2 Erwartungswert

Sei (Ω, P) ein diskreter W-Raum. Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt den Ausgang eines Zufallsexperiments in Ω an. Sie besitzt die Wertemenge $W = \{X(a) \,|\, a \in \Omega\}$.

Der *Erwartungswert* von X ist

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\text{Werte } x \text{ von } X} x\ P(X \text{ nimmt } x \text{ an}) \\ &= \sum_{x} x\ P(X = x) \\ &= \sum_{x \in W} x\ P\left(X^{-1}(x)\right) \end{aligned}$$

- $E(E(X)) = E(X)$
- $E(aX+b) = aE(X) + b \quad (a \neq 0)$
- $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$
- Wenn X_1, X_2 unabhängig sind:
  $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2)$

5.3.3 Varianz

Sei (Ω, P) ein diskreter W-Raum. Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt den Ausgang eines Zufallsexperiments in Ω an. Sie besitzt die Wertemenge $W = \{X(a) \,|a \in \Omega\}$.

Die *Varianz* von X ist

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

- $V(aX+b) = a^2 V(X) \quad (a \neq 0)$
- Wenn X_1, X_2 unabhängig sind:
  $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$

Index