Formelsammlung
Mathe I/II für Informatiker & E-Techniker

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 27.05.2005 - Version: 1.0.1
Erhältlich unter http://privat.macrolab.de

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung "Mathematik 1/2 für Elektrotechniker" von Prof. Dr. Gunter Malle an der Universität Kassel im Wintersemester 2003/04 und Sommersemester 2004.

Inhaltsverzeichnis

Die hinter den Überschriften angegebenen Nummern beziehen sich auf die Bücher “Höhere Mathematik mit Mathematika I-II” von W. Strampp. Die römische Ziffer gibt die Buchnummer, und die arabische die Seitenzahl an. Z.B. II.45 bedeutet Band II Seite 45.

1 Begriffe

1.1 Logik

1.1.1 Verknüpfungen

- Negation
  $\neg a$: nicht a
- Implikation
  $a \Rightarrow b$: aus a folgt b
- Äquivalenz
  $a \Longleftrightarrow b$: a und b sind äquivalent (gleichwertig)
- Konjunktion
  $a \wedge b$: a und b
- Disjunktion
  $a \vee b$: a oder b

1.1.2 Rechenregeln

- Kommutativgesetz
  $a \wedge b = b \wedge a$
  $a \vee b = b \vee a$
- Assoziativgesetz
  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
- Distributivgesetz
  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- De Morgan
  $\neg (a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
  $\neg (a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$
- doppelte Negation
  $\neg (\neg a) = a$
- neutrales Element
  $a \vee \mathrm{f} = a$
  $a \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}$
  $a \vee \mathrm{w} = \mathrm{w}$
  $a \wedge \mathrm{w} = a$
- inverses Element
  $a \vee (\neg a) = \mathrm{w}$
  $a \wedge (\neg a) = \mathrm{f}$

1.1.3 Quantoren

- Allquantor $\forall x : \varphi(x)$
  für alle x gilt $\varphi(x)$.
  z.B. $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \in \mathbb{N} = \forall^x_{\mathbb{N}} : x^2 \in \mathbb{N}$
- Existenzquantor $\exists x : \varphi(x)$
  es gibt (mindestens) ein x für das $\varphi(x)$ gilt.
  z.B. $\exists x \in \mathbb{N} : \varphi(x) = \exists^x_{\mathbb{N}} : \varphi(x)$
- $\exists ! x : \varphi(x)$ oder $\exists^1 x : \varphi(x)$
  es gibt genau ein x für das $\varphi(x)$ gilt.
- Negation $\forall x : H(x) \Leftrightarrow \neg \exists x : \neg H(x)$
  Es gilt für alle x, $H(x) \Leftrightarrow$ Es gibt nicht ein x, für das $H(x)$ nicht gilt.

1.1.4 Eigenschaften von Aussagen

Widerspruch heißt eine zusammengesetzte Aussage, wenn sie *immer falsch* ist.
z.B. $A \wedge \neg A$

Tautologie (Symbol: Blitz) heißt eine Aussage, wenn sie *immer wahr* ist.
z.B. $A \vee \neg A$

1.2 Abbildungen

Mengen $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$
f : Urmenge $\to$ Bildmenge

Elemente von Mengen $a \mapsto f(a)$
f : Urbild $\mapsto$ Bild

1.2.1 injektiv

wenn es zu jedem unterschiedlichen Urbild auch unterschiedliche Bilder gibt.

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

1.2.2 surjektiv

heißt eine Abbildung $f : A \to B$, wenn es zu jedem Element aus dem Bildraum auch mindestens ein passendes Urbild gibt.

$$\forall_B^b : \exists_A^a : f(a) = b$$

1.2.3 bijektiv

ist eine Abbildung f, wenn sie surjektiv und injektiv ist. Dies sind 1:1 - Abbildungen.

- Bei endlichen Mengen:
  $f : A \to B$ bijektiv $\Rightarrow |A| = |B|$

2 Mengen

2.1 Beschreibung

Die Menge A enthält alle grade Zahlen größer als 0:
$A = \{x | x$ ist grade Zahl und größer als Null$\}$
$A = \left\{x | \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\right\}$

a ist ein Element der Menge A:
$a \in A$

2.2 Standardmengen

- Leere Menge
  $\emptyset = \{\}$
- Natürlichen Zahlen
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
  - Natürlichen Zahlen mit 0
    $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Ganzen Zahlen
  $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Rationalen Zahlen
  $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\right\}$
- Reellen Zahlen
  $\mathbb{R} = \{$jeder Punkt auf dem Zahlenstrahl$\}$
  - positiven reellen Zahlen
    $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
- Komplexen Zahlen
  $\mathbb{Z} = \left\{x + iy | x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\right\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2.3 Intervalle

- offenes Intervall
  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- halboffenes Intervall
  $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ bzw. $(a, b($
  $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ bzw. $)a, b)$
- abgeschlossenes Intervall
  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ bzw. $)a, b($

2.4 Operationen

- Gleichheit
  $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$
- Teilmenge
  $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
- echte Teilmenge
  $A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$
- Vereinigung
  $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- Schnitt
  $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- Ohne (Differenz)
  $A \backslash B = \{x | x \in A \vee x \notin B\}$
- symmetrische Differenz
  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- geordnete Paare
  $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$
- Potenzmenge
  $\mathcal{P}(M) = \{A | A \subseteq M\}$
- Komplementärmenge
  für $A \subseteq M$ ist $\bar{A} = \{x \in M | x \notin A\}$
- Anzahl der Elemente
  $|M|$ =Anzahl der Elemente von M

2.5 Rechenregeln

- Kommutativgesetz
  $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$
  $A \Delta B = B \Delta A$
- Assoziativgesetz
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- Distributivgesetz
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- De Morgan
  $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$
  $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

- doppelt invers
$\overline{\overline{A}} = A$

- neutrales Element
$A \cup \emptyset = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$

- inverses Element
$A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup \overline{A} =$Grundmenge

2.6 Schranken I.29

- Untere-/Obere Schranke (s bzw S)
$\forall x \in M \subseteq \mathbb{R} : s \leq x \quad x \leq S$

- beschränkt
$\forall x \in M \subseteq \mathbb{R} : |x| \leq S_B$

- Infimum / Supremum kleinste untere- / obere Schranke
$\inf(M)$; $\sup(M)$

- Minimum/ Maximum
$\min(M) := \inf(M)$ wenn $\inf(M) \in M$ bzw. $\max(M) := \sup(M)$ wenn $\sup(M) \in M$

- (offene) ε-Umgebung
$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | \, |x - a| < \varepsilon\}$

2.7 Häufungspunkt I.33

- a heißt Häufungspunkt von M wenn

$$\forall \varepsilon > 0, x_\varepsilon \neq a \in M : |x_\varepsilon - a| < \varepsilon$$

- Satz von Bolzano-Weierstraß
Jede unendliche, beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt

2.8 Ordnungsregeln

Eine Relation (Platzhalter $\sim$) zwischen den Mengen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$.
$a \sim b$ falls $(a, b) \in A \times B$.

2.8.1 Eigenschaften von Relationen

- reflexiv
$\forall a : a \sim a$

- symmetrisch
$a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$

- antisymmetrisch
$a \sim b \wedge b \sim a \Rightarrow a = b$

- transitiv
$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

2.8.2 Typen von Relationen

- Äquivalenzrelationen
heißen Relationen die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind.
z.B. Gleichheit; $a \sim b$ mit $a, b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - b$ ist gerade

- Ordnungsrelationen
heißen Relationen die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv sind.
z.B. $\leq$; $\geq$; “a steht vor b im Lexikon”. ($<$; $>$ sind keine Ordnungsrelationen, da nur 4)

2.9 Körper

Eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit den Rechenoperationen + und * heißt Körper wenn folgendes gilt:

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind beispielsweise Körper.

2.9.1 Addition

$\forall_{\mathbb{K}}^{a,b}$

- Abgeschlossenheit
$a + b \in \mathbb{K}$

- Kommutativgesetz
$a + b = b + a$

- Assoziativgesetz
$(a + b) + c = a + (b + c)$

- Neutrales Element
$\exists 0 \in \mathbb{K}$:a+0=a

- Inverses Element
$\exists -a \in \mathbb{K} : a + (-a) = 0$

2.9.2 Multiplikation

$\forall_{\mathbb{K}}^{a,b,c}$

- Abgeschlossenheit
$ab \in \mathbb{K}$

- Kommutativgesetz
$ab = ba$

- Assoziativgesetz
$a(bc) = (ab)c$

- Neutrales Element
$\exists 1 \in \mathbb{K} : 1a = a$

- Inverses Element
$\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \exists a^{-1} \in \mathbb{K} : aa^{-1} = 1$

2.9.3 Distributivgesetz

$\forall_{\mathbb{K}}^{a,b,c}$

- $a(b+c) = ab + ac$

2.10 Angeordnete Körper

Ein Körper auf dem die Relation $<$ definiert ist, wird als *angeordneter Körper* bezeichnet. Die unter 2.2 auf Seite 7 aufgeführten Mengen sind angeordnete Körper.

3 Beweisverfahren

3.1 direkter Beweis

Diesen Beweis erhält man durch gezielte Umformung der Aussagen bzw. durch logisches Schließen (Implikation).

3.2 indirekter Beweis

Auch Widerspruchsbeweis genannt. Hier versuch man die Gleichwertigkeit von

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge (\neg B)) \Rightarrow Falsch)$$

auszunutzen.

z.B.: "Wenn es regnet ist die Straße nass." $\Leftrightarrow$ "Es regnet und die Straße ist nicht nass, ist ein Widerspruch."

3.3 Kontraposition

Hier wird versucht die Aussage umzudrehen (beruht auf Tautologie).

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

z.B.: "Wenn es Regnet ist die Straße nass." $\Leftrightarrow$ "Wenn die Straße nicht nass ist, kann es nicht geregnet haben."

3.4 Vollständige Induktion I.33

$A(n)$ Aussage für natürliche Zahlen

1. Induktionsanfang: $A(1)$ gilt
2. Induktionsannahme: für jedes n gilt $A(n)$
3. Induktionsschritt: Zeige: aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$. (bzw. $A(n+1)$ lässt sich mit Hilfe der Annahme $A(n)$ beweisen)

4 Rechenregeln

4.1 Summen I.13

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \quad 1 \leq m \leq n$$

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=a}^{b} g_k = \sum_{k=a+c}^{b+c} g_{k-c}$$

4.2 Ungleichungen

- $a < b \Leftrightarrow -a > -b$
- $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$
- $a < b \wedge 0 < ab \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
- $|ab| = |a|\,|b|$
- (Umgekehrte-) Dreiecksungleichung I.25
  $||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$
- Cauchy-Schwarze-Ungleichung I.19
  $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$
- Bernullische Ungleichung I.34
  $(1+h)^n > 1 + nh, \quad n \geq 2$

4.3 Fakultät I.38

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-n) \cdot n$$

$$e! = 1 \quad 1! = 1 \quad 0! = 1$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

4.4 Binomialkoeffizient I.39

$k \leq n, n \geq 0, k \geq 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

- Binomischer Satz
  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$$

5 Trigonometrie

Siehe Sieber; Mathematische Formelsammlung für Gymnasien; Klett.

Es macht meiner Meinung nach keinen Sinn, eine so gute Übersicht noch einmal “abzuschreiben”.

Kreisfunktionen Seite 15

Winkelsätze Seite 16

Arkusfunktionen Seite 16

Ableitungen Seite 33

Stammfunktionen Seite 35

Hyperbel- und Areafunktionen Seite 37

6 Komplexe Zahlen I.44

6.1 Definition

Die komplexen Zahlen bilden zusammen mit den Rechenregeln für $+, \cdot$ einen Körper dessen Elemente wie folgt definiert sind

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$z = (x,y) = x + iy \in \mathbb{C}$$

$x = \Re(z)$ (Re) Realteil, $y = \Im(z)$ (Im) Imaginärteil

$i = \sqrt{-1}$ wird als Imaginäre Einheit bezeichnet.

6.1.1 Rechenregeln I.45

- Addition
  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Multiplikation
  $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- Division

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{Z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \\ &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \\ &= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \end{aligned}$$

- Neutrales Element der Addition
  z=$(0,0)$
- Neutrales Element der Multiplikation
  z=$(1,0)$
- $i = \sqrt{-1}$

6.2 Komplex Konjungierte Zahl I.53

Die komplex konjungierte Zahl von $z = x + iy$ heißt:

$$\bar{z} = x - iy \, (= z^*)$$

(Spiegelung an der reellen Achse)

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- $\Im(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\frac{1}{(\bar{z})} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $z\bar{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$
- Bei Matrizen mit Komplexen Einträgen:
  $\overline{\det(A)} = \det\left(\bar{A}\right)$

6.3 Betrag einer Komplexen Zahl I.58

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| \geq 0$
- $|z|^2 = z\bar{z}$ (also $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$)
- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
- $|z_1 z_2| = |z_1| \, |z_2|$
- Dreiecksungleichung
  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

6.4 Polarkoordinaten I.60

$$z = x + iy = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

- $\Re(z) = x = r\cos\varphi$
- $\Im(z) = y = r\sin\varphi$
- φ =Winkel des Komplexen Zeigers mit positiver Reeller Achse (Argument von z)

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

- $|z| = |e^{i\varphi}| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$
- $|z| = |re^{i\varphi}| = |r|\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = |r|$
- $z = e^{i\varphi} \Leftrightarrow \overline{z} = e^{-i\varphi}$
- $r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
- $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{i\varphi n}$
- Formel von Moivre
  $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$
- $\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
- $z_k = \sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{r_0} e^{i\left(\frac{\varphi_0}{n}+\frac{k}{n}2\pi\right)}$
  $0 \leq k \leq (n-1)$
- a, b sind rechtwinklig zueinander
  $\left|\frac{a}{b}\right| = r\ i \Leftrightarrow a \perp b$

6.5 Fundamentalsatz der Algebra I.71

Zu jedem Polynom vom Grad $n \geq 1$

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$$

gibt es n (nicht zwangsläufig unterschiedliche) komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n$, so dass

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. $z_1, \ldots, z_n$ sind die Nullstellen des Polynoms. Diese Umformung nennt sich *Faktorisieren* in *Linearfaktoren*.

Es lässt sich auch nur ein Linearfaktor abspalten. Dann erhält man einen Linearfaktor und ein Restpolynom vom einem um 1 verringerten Grad.

$$p(z) = (z - z^*)\, r(z)$$

6.6 Vietascher Wurzelsatz I.72

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} &= -a_{n-1} \\
\sum_{k_1,k_2=1,k_1\leq k_2}^{n} &= a_{n-2} \\
\sum_{k_1,k_2,k_3=1,k_1\leq k_2\leq k_3}^{n} &= -a_{n-3} \\
&\vdots \\
\prod_{k=1}^{n} z_k &= (-1)^n a_0
\end{aligned}$$

7 Folgen II.3

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ist eine Zuordnung, die jedem Index $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_n$zuordnet. Index $\mapsto$ Folgenglied. $n \mapsto a_n$.

$\langle a_n \rangle = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \quad (n \in \mathbb{N})$

Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung $a_n = f(n)$ (explizit) oder rekursiv $a_{n+1} = f(a_n)$.

7.1 Monotonie II.6

- monoton fallend $a_{n+1} \leq a_n$
- streng monoton fallend $a_{n+1} < a_n$
- monoton steigend $a_{n+1} \geq a_n$
- streng monoton steigend $a_{n+1} > a_n$

7.2 Teilfolge II.6

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$eine Folge, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$eine streng monoton wachsende Folge mit $n_k$$\in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$$

Teilfolge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Man nehme als Index der einen Folge die Folgenglieder einer anderen Folge, so dass man nur spezielle Elemente erhält, z.B. jedes Zweite.

7.3 Konvergenz II.8

Der Wert den eine Folge im Unendlichen annimmt, wird *Grenzwert* genannt. Wenn sie einen Grenzwert besitzt wird sie *konvergent* genannt, ansonsten *divergent*.

$$\forall \varepsilon > 0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

7.4 Nullfolge II.11

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- z.B. die geometrische Reihe:

$$\forall\, |q| < 1 : \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

7.5 Konvergenzkriterien

7.5.1 Teilfolgen

$\{a_n\}$ konvergent wenn jede ihrer Teilfolgen konvergent. II.13

7.5.2 Sandwitchtheorem II.15

Wenn: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \lim_{n\to\infty} b_n = a$
$a_n \le c_n \le b_n$
dann folgt: $\lim_{n\to\infty} c_n = a$

7.5.3 Monotonie / beschränkt II.16

Jede monoton wachsende (monoton fallende) nach oben (nach unten) beschränkte Folge $\{a_n\}$ ist konvergent.
$a = \sup\{a_n\}$ (bzw. $a = \inf\{a_n\}$)

7.5.4 Cauchy-Folge II.20

Jede Cauchy-Folge ist konvergent.
$\forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N} : |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$ definiert eine Cauchy-Folge

7.5.5 Häufungspunkt

Wenn bei einer beschränkten Folge der kleinste Häufungspunkt (Limes inferior: lim inf) gleich dem Größten (Limes superior: lim sup) ist, ist dies der Grenzwert der Folge II.21

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

7.6 Grenzwert Rechenregeln II.14

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad b \neq 0$$

- Im Allgemeinen lassen sich zwei Grenzwertbildungen nicht in der Reihenfolge vertauschen!

7.6.1 Unbestimmte Formen

Unbestimmte Formen siehe Tabelle 1. Diese lassen sich alle bis auf $x = (\infty - \infty)$ lösen mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital (siehe 10.4.8 auf Seite 18).

8 Reihen II.22

Eine Reihe (s_n) ist eine Folge von Teilsummen einer anderen Folge (a_n).

$$s_n = \sum_{v=1}^{n} a_v$$

Tabelle 1: unbestimmte Formen

$\lim f$	$\lim g$	unbestimmt
$+\infty$	$-\infty$	$\lim(f+g)$
0	$+\infty$	$\lim(f \cdot g)$
0	$-\infty$	$\lim(f \cdot g)$
0	0	$\lim \frac{f}{g}$
$+\infty$	$+\infty$	$\lim \frac{f}{g}$
$-\infty$	$-\infty$	$\lim \frac{f}{g}$
$+\infty$	$-\infty$	$\lim \frac{f}{g}$
$-\infty$	$+\infty$	$\lim \frac{f}{g}$

8.1 Konvergenz II.22

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{v=1}^{n} a_v = \sum_{v=1}^{\infty} a_v = a$$

Die Reihen $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ und $\sum_{v=1}^{\infty} b_v$ seien konvergent, dann gilt: II.23

$$\sum_{v=1}^{\infty} c a_v = ca, \quad \sum_{v=1}^{\infty} (a_v + b_v) = a + b$$

8.1.1 Sätze über Konvergente Reihen

Wenn eine Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergiert, dann ist a_v eine Nullfolge $(a = 0)$ II.24

- Cauchy-Konvergenzkriterium für Reihen $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergent, wenn $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m > n_\varepsilon : \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

8.2 absolut / bedingt konvergent II.163

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, bedingt konvergent, falls zwar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ aber divergiert.

- Wenn eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch bedingt.
- Wenn eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.
- Die Summe $(\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k))$ zweier absolut konvergenter Reihen $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k)$ ist die auch absolut konvergent.

8.2.1 Doppelreihe II.167

Durch $\sum_{v,\mu=0}^{\infty} a_{v\mu}$ wird eine Doppelreihe gegeben.

8.2.2 Umordnung II.164

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe und $\pi : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$$

eine Umordnung der Ausgangsreihe.

- Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist ebenfalls (gegen den gleichen Wert) konvergent.
- Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent. Dann gibt es zu jedem $-\infty \leq s \leq \infty$ eine Umordnung sie bedingt gegen s konvergiert: $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi_s(k)} = s$

8.2.3 Großer Umordnungssatz II.167

Ordnet man die Doppelreihe in beliebiger Reihenfolge zu einer einfachen Reihe an, so entsteht eine stets mit der gleichen Summe s absolut konvergente Reihe. Alle Zeilensummen $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{v\mu}$ sowie alle Spaltensummen $\sum_{v=0}^{\infty} a_{v\mu}$ sind absolut konvergent. Die Reihe der Spaltensummen bzw. Reihensummen konvergiert absolut gegen s:

$$\sum_{v,\mu=0}^{\infty} a_{v\mu} = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{v\mu} \right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^{\infty} a_{v\mu} \right) = s$$

- gilt sinngemäß auch für Mehrfachreihen $\sum_{v_1,\ldots,v_m=0}^{\infty} a_{v_1,\ldots,v_m}$

8.2.4 Produkt von Reihen II.165

Wenn zwei Reihen absolut konvergieren, dann konvergiert die Reihe der Produkte (bei beliebiger Anordnung) ebenfalls absolut, und es gilt:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_k &= \textstyle\sum_{\substack{k=1\\j=1}}^{\infty} (a_k b_j) = \sum_{k,j=0}^{\infty} (a_k b_j) \\ &= \textstyle(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k) = ab \end{aligned}$$

8.2.5 Cauchy-Produkt II.166

Das Cauchy-Produkt ist absolut konvergent:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{v} a_\mu b_{v-\mu} \right) = \left(\sum_{v=0}^{\infty} a_v \right) \left(\sum_{v=0}^{\infty} b_v \right)$$

8.3 Konvergenzkriterien II.168

8.3.1 Majoranten- oder Vergleichskriterium II.168

$\forall v \geq v_0 \geq 0 : \ 0 \leq a_v \leq b_v$.

Wenn die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} b_v$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$, und es gilt: $\sum_{v=0}^{\infty} a_v \leq \sum_{v=0}^{\infty} b_v$.

Wenn die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} b_v$ divergiert, dann divergiert auch die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$.

8.3.2 Quotientenkriterium II.169

Sei $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ eine Reihe mit $a_v \neq$ für alle $v \in \mathbb{N}$ und

$$\limsup_{v\to\infty} \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right| = \bar{g} \text{ und } \liminf_{v\to\infty} \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right| = \underline{g}$$

Dann gilt:

- Ist $\bar{g} < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ absolut.
- Ist $\underline{g} > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$.
- Für jeweils $= 1$ gibt das Kriterium keinen Aufschluss.
- siehe Wurzelkriterum (ist stärker als Quotientenkriterium)

8.3.3 Wurzelkriterium II.171

Sei $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ eine Reihe mit

$$\limsup_{v\to\infty} \sqrt[v]{|a_v|} = \bar{g}$$

- Ist $\bar{g} < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.
- Ist $\bar{g} > 1$, so divergiert die Reihe.
- Für $\bar{g} = 1$ gibt das Kriterium keinen Aufschluss.
- $\limsup_{v\to\infty} \sqrt[v]{|a_v|} \leq \limsup_{v\to\infty} \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right|$
  $\liminf_{v\to\infty} \sqrt[v]{|a_v|} \geq \liminf_{v\to\infty} \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right|$
  - Bezug zum Quotientenkriterium.
  - Wenn erster Grenzwert existiert, dann existiert auch der zweite.
  - Das Wurzelkriertum ist stärker als das Quotientenkriterium.

8.3.4 Leibnizsches Kriterium II.174

Sei $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ eine Nullfolge mit $\forall v : \ a_v \geq 0, \ a_v \geq a_{v+1}$.
Dann ist die Reihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} a_v$$

konvergent. Für die n-te Teilsumme gilt die Abschätzung:

$$\left| \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} a_v - \sum_{v=1}^{n} (-1)^{v+1} a_v \right| \leq a_{n+1}$$

8.3.5 Integralkriterium II.175

Sei $\forall^{x}_{[1,\infty)}: \ f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)\leq 0$ monoton fallend, und die Folge $a_v = f(v), v\in\mathbb{N}$ eine Nullfolge. Dann gilt:

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_{x=1}^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergiert}$$

8.4 Besondere Reihen

- Weitere Reihen siehe 9.5 auf der nächsten Seite
- geometrische Reihe II.25
  $\sum_{v=0}^{n} q^v = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
  (konvergent wenn $|q|<1$)
- harmonische Reihe II.27
  $\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v}$ (divergent)
- alternierende harmonische Reihe II.28
  $\sum_{v=1}^{\infty}(-1)^{v+1}\frac{1}{v}$ (konvergent)
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$
- $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

8.4.1 Eulersche Zahl e II.34

Folgende Reihen sind absolut Konvergent gegen e.

$$\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{v!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

9 Funktionsfolgen und Funktionsreihen

9.1 Konvergenz

9.1.1 Punktweise Konvergenz II.178

Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n=1}^{\infty},\ f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ konvergiert punktweise, wenn $\forall^{x}_{[a,b]}: (f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Die durch $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ in $[a,b]$ erklärte Funktion heißt Grenzfunktion.

Man schreibt

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{pktw.}{\longrightarrow}} f(x)$$

9.1.2 Gleichmäßige Konvergenz II.178

Die Funktion $f_n:[a,b]\to\mathbb{R},\ (n\geq 1)$, und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ seien beschränkt. Die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f, wenn die folgende Beziehung gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| = 0$$

Man schreibt

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{glm.}{\longrightarrow}} f(x)$$

- jede gleichmäßig konvergente Folge ist auch punktweise Konvergent.
- wenn alle $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ stetig $\Rightarrow f$ ist stetig in $[a,b]$
- man kann in jedem Punkt zwei Grenzprozesse vertauschen:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{x\to\infty} f_n(x)\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} f_n(x_0) \end{aligned}$$

9.2 Vertauschen von Grenzwerten

9.2.1 Integration II.180

Die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ von stetigen Funktionen konvergiere gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right) \end{aligned}$$

9.2.2 Differenziation II.180

Die Folge von stetig differenzierbaren Funktionen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiere in $[a,b]$ punktweise gegen f. Die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ konvergiere gleichmäßig in $[a,b]$. Dann ist f stetig diffbar, und

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

9.2.3 Funktionsreihen Integrieren II.182

Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ stetig auf $[a,b]$. Die Reihe $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiere gleichmäßig auf $[a,b]$. Dann ist die Grenzwertfunktion f stetig in $[a,b]$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{v=1}^{\infty} f_v(x)\right) dx = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_v(x)\,dx\right)$$

9.2.4 Funktionsreihen Differenzieren II.182

Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ stetig differenzierbar auf $[a,b]$. Die Reihe $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiere punktweise gegen f, und $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konvergiere gleichmäßig auf $[a,b]$. Dann ist $f(x)$stetig differenzierbar und

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{v=1}^{\infty} f_v(x)\right) = \sum_{v=1}^{\infty} f_v'(x)$$

9.3 Konvergenzkriterien

9.3.1 Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz II.178

Eine Folge $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $(n \geq 1)$ beschränkter Funktionen konvergiert genau dann gleichmäßig gegen die beschränkte Grenzfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_\epsilon : \forall n, m > n_\epsilon :$$
$$\max_{x \in [a,b]} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

9.3.2 Majorantenkriterium II.182

Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ auf $[a,b]$ beschränkt, und $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Zahlenfolge mit $|f_n(x)| \leq c_n$ für alle $x \in [a,b]$. Konvergiert $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

9.4 Potenzreihen II.185

Sei $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

heißt Potenzreihe mit Koeffizienten a_k und Entwicklungspunkt x_0 (z.B. Taylorreihe).

9.4.1 Konvergenz / Konvergenzradius II.185

Sei $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe, die an der Stelle $\tilde{x}$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig in jedem Intervall $|x - x_0| \leq c$ für jedes $c < |\tilde{x} - x_0|$. Divergiert f in $\tilde{x}$, so divergiert f für alle x mit $|x - x_0| > |\tilde{x} - x_0|$.

Wenn $D := \{x | f(x) \text{ konvergiert}\}$ der Definitionsbereich von f ist, heißt $\rho := \sup_{x \in D} |x - x_0|$ der Konvergenzradius von f.

- In $\mathbb{C}$ bildet ρ einen Kreis um x_0
- über Punkte $x = x_0 \pm \rho$ kann nichts ausgesagt werden
- $\rho = 0$ Konvergenz nur bei x_0
- $\rho = \infty$ Konvergenz für alle x
- eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzradius stets eine stetige Funktion.

9.4.2 Konvergenzradius II.186

Sei $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe. Dann ist

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k \to \infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

der Konvergenzradius. Die erste Formel ist die Hadamasche Formel (gilt immer). Die Zweite Formel gilt nur, wenn dieser Grenzwert auch existiert.

9.4.3 Integrieren / Differenzieren II.190

Sei $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann gilt

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} (x - x_0)^k$$

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} (x - x_0)^k$$

haben ebenfalls den Konvergenzradius ρ und $g(x) = f'(x)$, $h\left(x = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)$.

9.4.4 Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen II.191

Wenn zwei Potenzreihen in einem beliebig kleinen Intervall $\epsilon > 0$ absolut konvergieren und übereinstimmen, sind sie bereits identisch ($\forall_{\mathbb{N}}^{k} : a_k = b_k$).

9.5 wichtige Reihen II.154 / II.192

- Weitere Reihen siehe 8.4 auf der vorherigen Seite
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

- $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
- geometrische Reihe ($|x| < 1$)
  $\frac{1}{1 \pm x} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mp 1)^k x^k$
- abgeleitete geometrische Reihe ($|x| < 1$)
  $\frac{1}{(1 \pm x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mp 1)^k (k+1) x^k$
- $\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

10 Funktionen I.116

10.1 Definition I.116

- D = Definitionsbereich, W = Wertebereich. Die Zuordnungsvorschrift f ordnet jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y = f(x) \in W$ zu. Man sagt, f bildet D auf W ab. x = Urbild, $f(x)$ = Bild

$$f : D_f \to W_f, \quad x \mapsto f(x)$$

- Gleichheit
  $D_g = D_f \quad f(x) = g(x)$
- Restriktion
  $D_g \subseteq D_f$ lässt sich das wie folgt schreiben $g = f|_{D_g}$
  d.h. f gilt nur für Teilmenge D_g

10.2 Stetige Funktionen II.38

- $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt x_0, wenn

$$\forall \varepsilon > 0, x \in D : \exists \delta_\varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- Stetig in D
  falls f in in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.
- gleichmäßig Stetig

$$\forall \varepsilon > 0, x, x_0 \in D : \exists \delta_\varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

  (Die Steigung ist in D endlich, z.B. $y = \sin(x)$. $y = x^2$ ist in $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig).

10.2.1 Kriterien für Stetigkeit

- Folgenkriterium II.40
  f ist stetig im Punkt $x_0 \subset D$, wenn die zu irgendeiner gegen x_0 konvergenten Folge$\{\tilde{x}_n\} \subset D$ gehörigen Folge von Funktionswerten $\{f(\tilde{x}_n)\}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = f(x_0)$$

  $\Rightarrow f$ stetig in x_0.
- Ableitung II.68
  Wenn eine Funktion in x_0 differenzierbar ist, ist sie dort auch stetig.

10.3 Sätze über stetige Funktionen

10.3.1 Hauptsätze II.41

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Dann sind auch folgende Funktionen stetig:

- $f + g : D \to \mathbb{R}$
- $fg : D \to \mathbb{R}$
- $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ falls $g(x_n) \neq 0$

10.3.2 Verkettung II.42

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, $g : f(D) \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$. Dann gilt:

Verkettung $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig.
bzw. $x \mapsto g(f(x))$ stetig in x_0

- $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$

10.3.3 Umkehrfunktion II.43

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine streng monotone, in $x_0 \in [a,b]$ stetige Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f([a,b]) \to \mathbb{R}$ in $f(x_0) \in f([a,b])$ stetig.

- Entspricht einer Spiegelung der Funktion an der Geraden $y = x$
- $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$
- Nur !!! bei stetigen, streng monotonen Funktionen möglich. Anderenfalls Definitionsbereich passend einschränken.

10.3.4 Min-/Maximum II.43

Eine Funktion hat ein (absolutes) Minimum bzw. Maximum x_0, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ bzw. $f(x) \leq f(x_0)$.

$$\min f(x) = \underline{x} \quad \text{bzw.} \quad \max f(x) = \overline{x}$$

Bei einem beschränkten Wertebereich muss eine stetige Funktion ein absolutes Minimum und ein absolutes Maximum besitzen.

Dies ist relativ, falls dies nur in einer Umgebung um x_0 gilt.

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = \underline{x} \quad \text{bzw.} \quad \max_{x\in[a,b]} f(x) = \overline{x}$$

10.3.5 Zwischenwertsatz II.44

Bei einer stetigen, beschränkten Funktion wird jeder Wert zwischen dem Minimum und dem Maximum als Funktionswert angenommen.

10.3.6 gerade / ungerade Funktionen

- Eine Funktion $g(x)$ ist gerade, wenn $g(-x) = g(x)$
  - sind Spiegelsymmetrisch zur Y-Achse
  - z.B. Polynome in denen nur gerade Exponenten auftauchen ($p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}x^{2k}$)
  - z.B. $\cos(x)$
- Eine Funktion $u(x)$ ist ungerade, wenn $u(-x) = -u(x)$
  - sind Punktsymmetrisch zum Ursprung
  - z.B. Polynome in denen nur ungerade Exponenten Auftauchen ($p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}x^{2k+1}$)
  - z.B. $\sin(x)$
- Der (un)gerade Anteil einer beliebigen Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch
  - gerade: $g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$
  - ungerade: $u(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$
  - $f(x) = g(x) + u(x)$
  - z.B. $f(x) = e^x$
    $g(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$
    $u(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh(x)$

10.4 Grenzwert von Funktionen

10.4.1 Definition II.46

$D = (a,b) \backslash \{x_0\}$
$f: D \to \mathbb{R}$ hat den Grenzwert y, falls für jede gegen x_0 konvergente Folge,
(x_n); $x_n \in D$; $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ folgendes gilt:
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$
y ist die stetige Fortsetzung von f in x_0.
Somit wäre $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ y & x = x_0 \end{cases}$ stetig.

10.4.2 Linksseitiger Grenzwert II.46

Die Funktion $f: (a, x_0) \to \mathbb{R}$ besitzt in x_0 den linksseitigen Grenzwert y, mit Zuhilfenahme einer gegen x_0 konvergenten Folge:

$$\lim_{x\to x^-} f(x) = y$$

10.4.3 Rechtsseitiger Grenzwert II.47

Die Funktion $f: (x_0, b) \to \mathbb{R}$ besitzt in x_0 den rechtsseitigen Grenzwert y, mit Zuhilfenahme einer gegen x_0 konvergenten Folge:

$$\lim_{x\to x^+} f(x) = y$$

10.4.4 Grenzwert im Punkt II.47

Eine Funktion besitzt in einem Punkt x_0 dann einen Grenzwert y, wenn ihr links-/rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = y$$

10.4.5 Grenzwert im Unendlichen II.49

Eine Funktion kann im Unendlichen einen Grenzwert besitzen. Z.B. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

10.4.6 Sprungstelle II.50

Eine Funktion besitzt eine Sprungstelle im Punkt x_0, wenn:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

10.4.7 hebbare Unstetigkeit

Eine Funktion $f:(a,b)\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ hat in x_0 eine hebbare Unstetigkeit, falls:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = y$$

existieren und übereinstimmen. Die Funktion $\overline{f}:(a,b)\to\mathbb{R}$, $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x\neq x_0 \\ y & x = x_0 \end{cases}$ heißt stetige Fortsetzung von f.

10.4.8 Regeln von de l'Hosptial II.86

Wenn $\lim_{x\to a^\pm}\frac{f(x)}{g(x)}$ zu $\frac{\pm 0}{\pm 0}$ oder $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ führt, dann lässt sich der Ausdurch an der Stelle a durch die Ableitung von f und g ersetzen.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Um einen Ausdruck, der zu $0\cdot\infty$ führt zu ersetzen, müssen die Funktionen einfach angepasst werden. So wird aus $f\cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$. Hier muss nur beachtet werden, dass hier $\left(\frac{1}{f}\right)'$ abgeleitet wird.

10.4.9 Grenzwertbildung mithilfe des Taylorpolynoms

Wenn $\lim_{x\to 0^\pm}\frac{f(x)}{g(x)}$ zu $\frac{\pm 0}{\pm 0}$ führt, lässt sich dies häufig durch eine Taylorentwicklung von Teilen von $\frac{f(x)}{g(x)}$ (z.B. Teile des Nenners und des Zählers) umgehen. Dabei reicht es zumeist, die ersten 3 bis 5 Glieder des Polynoms hinzuschreiben. Anschließend muss versucht werden, x so zu kürzen, das die Therme höherer Potenz durch den Grenzübergang wegfallen, und nur noch ein (einfacher) Bruch übrig bleibt.

- Achtung, nur für Grenzübergang gegen 0.

10.4.10 wichtige Grenzwerte

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0, \quad n\geq 0$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n} = 0, \quad n > 0$
- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x} = 1$

10.5 Logarithmus- und Exponentialfunktion II.55

10.5.1 Denfinition II.56

(eigentlich über Potenzreihen definiert)

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} 2^n\left(\sqrt[2^n]{x} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} 2^n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[2^n]{x}}\right)$$

$\ln(x)$ ist eine stetige, streng monoton wachsende Funktion auf $\mathbb{R}_{>0}$ (II.57).

10.5.2 $\ln(x)$-Rechenregeln II.57

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(x_1x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$
- $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$
- $\ln(x^r) = r\ln(x) \quad r\in\mathbb{Q}$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

10.5.3 e-Funktion II.59

Umkehrfunkton von $\ln(x)$ heißt

$$e^x := \exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$$

$f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R} \quad f: x\to\ln(x)$
$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0} \quad f^{-1}: x\to\exp(x)$

e^x stetig und streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

10.5.4 e^x-Rechenregeln II.59

- $\forall^x_{\mathbb{R}_{>0}} : e^{\ln x} = x$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$
- $\forall x < 1 : e^x \leq \frac{1}{1-x}$
- $1 + x \leq e^x$
- $(e^{ax})' = ae^{ax}$
- Wachstumsverhalten der Exponentialfunktion $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0, \quad n\geq 0$

10.5.5 Allgemeine Exp. Funktion / Logarithmus II.62

$\forall a > 0 : a^x = e^{\ln(a)x}$ bzw. $\forall x > 0 : x^b = e^{b\ln(x)}$

$\forall a > 0, a\neq 1, x > 0 : \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

10.6 Differenzierbare Funktionen II.64

10.6.1 Definition II.64

Eine Funktion $f: I\to\mathbb{R}$ heißt differenzierbar im inneren Punkt $x_0\in I$, wenn der Grenzwert

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx}f(x_0) \end{aligned}$$

existiert.

Ist x_0 ein Randpunkt des Intervalls I mit $x_0 \in I$, so heißt f in x_0 links-/ bzw. rechtsseitig differenzierbar, wenn der links-/ bzw. rechtsseitige Grenzwert existiert. $f'(x_0)$ gibt die Steigung einer Tangenten von f in $x_0$wieder. Die Prozedur des Ableiten ist eine lineare Abbildung $f : P(x) \to P'(x)$.

10.6.2 Kriterium für Differenzierbarkeit II.67

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar im Punkt $x_o \in I$, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ und eine auf einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0) \subset I$ erklärte Funktion $r(x)$ gibt, so daß

$$\lim_{x\to x_o} r(x) = 0$$

und

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)\,|x - x_0|$$

gilt.

10.6.3 Tangente II.68

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

10.6.4 Ableitung II.69

- 1-te Ableitung
  $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
- n-te Ableitung
  $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$

10.6.5 Ableitungsregeln II.72

- Summenregel II.72
  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Produktregel II.72
  $(f\ g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Quotientenregel II.72
  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- Kettenregel II.75
  $(g \circ f)'(x) = g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$

10.6.6 Ableitung der Umkehrfunktion II.78

Die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei streng monoton und in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$ in $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bzw.

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Ist f stetig differenzierbar, dann ist auch f^{-1} stetig differenzierbar.

- Möglichst f in der Ableitung f' wieder vorkommen lassen, da dies sich anschließend mit Hilfe der Umkehrfunktion gegenseitig aufhebt. Z.B. $\tan(x)' = 1 + \tan^2(x)$.

10.6.7 Ableitung von wichtigen Funktionen

Alle Ableitungen nach x ($\frac{d}{dx} f(x)$).

- $a' = 0$
- $\left(ax^b\right)' = abx^{b-1}$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $\left(e^{bx}\right)' = be^{bx}$
- $\forall a > 0 :\ (a^x)' = \ln(a)a^x$
- $\left(v(x)^{u(x)}\right)' = v(x)^{u(x)} \left(v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\,\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$
- $\sin(x)' = \cos(x)$
- $\cos(x)' = -\sin(x)$
- $\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $\forall -1 < x < 1 : \arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\operatorname{arsinh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

10.6.8 Relatives Extremum II.80

Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$. Dies ist aber nicht hinreichend (nicht immer in umgekehrter Richtung gültig), da es sich auch um einen Sattelpunkt handeln könnte.

10.6.9 Satz von Rolle / Mittelwertsatz II.80

Die Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und in (a, b) differenzierbar.

- Satz von Rolle (wenn $a = b$)
  $\exists \xi \in (a, b) :\ f'(\xi) = 0$
- Mittelwertsatz
  $\exists \xi \in (a, b) :\ f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- Verallgemeinerter Mittelwertsatz (wenn $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$) II.84
  $\exists \xi \in (a, b) :\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

10.6.10 Charakteristika von Funktionen II.82

- konstante Funktion
  Es gilt: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$
  $\Rightarrow f(x) = f(a)$
- beliebige Funktionen
  Es gilt: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $f'(x) = g'(x)$
  $\Rightarrow f(x) = g(x) + f(a) - g(a)$

10.6.11 Monotoniekriterium II.84

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in (a, b) differenzierbar. Wenn für alle $x \in (a, b)$:

- $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend
- $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ ist monoton steigend
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend
- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton steigend

10.7 Kurvendiskussion Papula I.378

Bei einer Kurvendiskussion wird versucht möglichst viel über eine Funktion in Erfahrung zu bringen. Dabei kann man z.B. wie folgt folgendes Schema abarbeiten[1]. Hier wird die Funktion $f(x)$ diskutiert.

10.7.1 Definitionsbereich / Definitionslücken

Angabe des Definitionsbereiches D. Auf Definitionslücken (z.B. wenn der Nenner eines Bruches Null wird) achten!!

10.7.2 Symmetrie

Angeben ob es sich um eine gerade oder ungerade Funktion handelt (siehe 10.3.6 auf Seite 17).

10.7.3 Nullstellen

Alle x_k Werte, bei der die Funktion den Wert Null annimmt $f(x_k) = 0$. Hierzu die Funktion am besten in Linearfaktoren (siehe 6.5 auf Seite 11) zerlegen, da hier die Nullstellen leichter abgelesen werden können. Eine Funktion vom Grad n kann bis zu n Nullstellen besitzen.

10.7.4 Y-Achsenabschnitt

Der Wert von $f(0)$ wird Y-Achsenabschnitt genannt.

[1]entnommen aus: Lothar Papula; Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure Band 1; Abschnitt 3.5 (in 10. Auflage Seite 378)

10.7.5 Pole

Alle x_k Werte, an denen die Funktion den Wert $\pm\infty$ besitzt ($f(x_k) = \pm\infty$) werden *Polstellen* genannt. Wenn der Links-/Rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen

$$\lim_{x \to x_k^-} f(x) = \lim_{x \to x_k^+} f(x) = \pm\infty,$$

handelt es sich um einen Pol ohne Vorzeichenwechsel, wenn nicht um einen mit Vorzeichenwechsel. Pole sind also Unstetigkeitsstellen, bzw. Definitionslücken, und lassen sich so auch finden (z.B. wenn der Nenner eines Bruches Null wird).

10.7.6 Ableitungen

Auflistung der (in der Regel die ersten drei) Ableitungen $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$

10.7.7 Relative Extremwerte (Maxima und Minima)

Ein relatives Extremum an der Stelle $(x_k, f(x_k))$ liegt vor, wenn
$f'(x_k) = 0$ und die erste Ableitung die nicht verschwindet (alle Ableitungen von 1 bis $n-1$ sind 0) eine geradzahlige Ableitung ist ($f^{(n)}(x_k) \neq 0$).

Sonderfall
$f'(x_k) = 0$ und $f''(x_k) \neq 0$

- relatives Minimum (Tiefpunkt) mit $f^{(n)}(x_k) > 0$.
- relatives Maximum (Hochpunkt) mit $f^{(n)}(x_k) < 0$.
- Die Extremwerte sind Absolut, wenn es in der Funktion kein größeren / kleineren Wert gibt. Siehe Wertebereich.

10.7.8 Wendepunkte, Sattelpunkte

Ein Wendepunkt kann als Extremwert der 1. Ableitung (die Steigung ändert ihr Vorzeichen) interpretiert werden. Er liegt an der Stelle $(x_k, f(x_k))$ liegt vor, wenn die 2. Ableitung 0, und die 1. Ableitung die daraufhin nicht verschwindet eine ungerade ist
$f''(x_k) = 0$ und $f^{(n+1)}(x_k) \neq 0$.

Sonderfall:
$f''(x_k) = 0$ und $f'''(x_k) \neq 0$.

10.7.9 Krümmung II.160

- konvexe (Linkskurve) Funktion, wenn stets: $f''(x_k) \geq 0$
- konkave (Rechtskurve) Funktion, wenn stets: $f''(x_k) \leq 0$

10.7.10 Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen

Das Verhalten von Funktionen im Unendlichen, wird von der Funktion $g(x)$ beschrieben, die der vorgegebenen Funktion $f(x)$ im Unendlichen immer ähnlicher wird.

- bei ganzrationalen Funktionen ist $g(x) = f(x)$
- bei gebrochenrationalen Funktion entspricht $g(x)$ dem ganzrationalen Anteil von $f(x)$ (Ergebnis einer Polynomdivision)
- bei echtgebrochenen Funktionen (Nennerpolynom von $f(x)$ hat einen höheren Grad als das Zählerpolynom) ist $g(x) = 0$

Asymptote im Unendlichen (bzw. an den Intervallgrenzen) sind die Werte die $f(x)$ an den Grenzen des Definitionsbereichs annimmt ($\pm\infty$, 0)

10.7.11 Wertebereich der Funktion

Hier wird das Intervall verlangt, in dem die Werte der Funktion liegen können. Hier kann man sich an den Werten der Asymptoten im Unendlichen und den Extremwerten orientieren.

10.7.12 Zeichnung der Funktion in einem geeigneten Maßstab

Hier wird eine Zeichnung verlangt, die alle Extremwerte, Pole, Wende- und Sattelpunkte beinhaltet. Der Verlauf zwischen diesen Punkten kann intuitiv aus dem Handgelenk ergänzt werden. Wenn es sich um eine periodische Funktion handelt, recht es 2 - 3 Perioden zu zeichnen.

11 Integralrechnung II.92

Mithilfe der Integralrechnung lässt sich der Flächeninhalt unter einer Kurve bestimmen.

11.1 Ober- und Untersummen II.92

11.1.1 Zerlegung (Partition) II.92

Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dann bildet die Menge der $n + 1$ reellen Zahlen

$$P = \{x_0, \ldots, x_n\}$$

eine Partition von $[a, b]$.

$$\|P\| = \max_{1\le k\le n} \{x_k - x_{k-1}\}$$

heißt Feinheit von P.

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$

Eine *äquidistante Zerlegung* ist wie folgt definiert

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + \frac{k\,(b-a)}{n}$$

11.1.2 Riemann-Summe II.103

Sei $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Dann heißt

$$S(f, P) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

eine Riemann-Summe.

- linke Riemann-Summe
  für $\xi_k = x_{k-1}$
  bei äuquidistanter Zerlegung
  $$S(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(a + \frac{k\,(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}\right)$$
- rechte Riemann-Summe
  für $\xi_k = x_k$
  bei äuquidistanter Zerlegung
  $$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(a + \frac{k\,(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}\right)$$
- untere Riemann-Summe
  für $m_k := \inf\{f(x)\,|x_{k-1} \le x \le x_k\}$
  $$\underline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \delta x_k$$
- obere Riemann-Summe
  für $M_k := \sup\{f(x)\,|x_{k-1} \le x \le x_k\}$
  $$\bar{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \delta x_k$$

11.2 Riemann Integral II.100

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ wenn folgende Grenzwerte existieren und miteinander Übereinstimmen. Für diesen Grenzwert schreibt man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \bar{S}(f,P)$$

Im folgenden wird mit integrierbar immer Riemann-integrierbar gemeint (es gibt noch andere Integrierbarkeitsbegriffe).

Folgende Funktionen sind (Riemann) integrierbar

- monotone, beschränke Funktionen
- stetige Funktionen

11.3 Eigenschaften von Integralen II.99

Sei $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$

- integrieren entspricht einer linearen Abbildung: $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx =$ $\alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$
- "Dreiecksungleichung" $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$
- $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$
- $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$
- Sei $\forall x \in [a, b] : m \le f(x) \le M$. Dann folgt $m \le \int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx \le M$
- Mittelwertsatz der Integralrechnung $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b - a)$
- Das Integrieren ist eine lineare Abbildung $f : P(x) \to \int P(x)$
- $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,(b - a)$

11.4 Flächen- und Stammfunktion / unbestimmtes Integral II.103

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar

Flächenfunktion
$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt \;\; (x \in [a, b])$

unbestimmtes Integral
$F(x) := \int_c^x f(t)\, dt \;\; (x, c \in [a, b])$

Stammfunktion
$F'(x) := f(x) \;\; (x \in [a, b])$

- Alle drei Begriffe sind bis auf Feinheiten gleichwertig.
- Es gibt mehrere verschiedene $F(x)$ zu einer gegebenen $f(x)$ die sich nur durch eine Konstante unterscheiden
- Stammfunktionen sind in $[a, b]$ gleichmäßig stetig
- $\int_a^b f(t)\, dt) = F(b) - F(a)$
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

  - Integrieren ist Umkehroperation des Differenzieren und umgekehrt

11.4.1 partielle Integration / Produktintegration II.123

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx =$$

$$f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

- g und f auf jeden Fall incl. Ableitungen herausschreiben
  - auf jeden Fall Probe (Ableiten) machen, man vertut sich sehr schnell
  - $p(x)\, e^x$ bzw. $p(x) \sin(x)$, ... sind auf diese Weise behandelbar
- Auf jeden Fall Probe!!!

11.4.2 Partialbruchzerlegung

Durch Partialbruchzerlegung lassen sich rationale Funktionen so schreiben, dass sie sich leichter integrieren lassen. Dabei kann folgendes Schema angewandt werden.

1. Polynomdivision, und die Funktion in der Form $\frac{z(x)}{n(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{n(x)}$ schreiben.
2. Den Rest $r(x)$ durch Partialbruchzerlegung vereinfachen, dazu $n(x)$ in Linearfaktoren $\frac{z(x)}{n(x)} = g(x) + \frac{A_1}{n_1(x)} + \ldots + \frac{A_k}{n_k(x)}$ zerlegen. Jeder dieser Linearfaktoren wird zu einem Nenner eines Partialbruchs.
   - Falls ein Linearfaktor $m > 1$ mal vorkommt, muss man ihn in mehrfach als Nenner verwenden, und zwar so, das er als ganzen in den Potenzen 1 bis m vorkommt.
   - Falls sich ein Nenner vom Rang m (im Reellen) nicht mehr weiter Zerlegen lässt, ist es möglich ihn als ganzes beizubehalten. Dafür muss im Zähler ein Polynom vom Grad $m - 1$ angenommen Werden, d.h. m Unbekannte stehen vor den jeweiligen x Potenzen auf dem Bruchstrich.
3. Jedem Partialbruch eine Unbekannte $A_k \in \mathbb{K}$ zuordnen.
4. Hauptnenner des Partialbruchs bilden und ausmultipizieren
5. Nach gleichen Potenzen von x sortieren.
6. Unbekannte durch Koeffizientenvergleich bestimmen.
   - mit Hilfe lin. Gleichungssystem oder

- durch Einsetzen passender Werte für x, so das immer alles bis auf eine Therm den Faktor 0 hat, und so wegfällt. So lässt sich dieser Therm dann direkt auswerten.

7. Kontrolle!!!
8. Stammfunktion der Umgeformten Gleichung bestimmen. Fertig!!

11.4.3 Substitution II.126

$$\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(x)\ dt = \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=\phi(t)}$$

$$\int f(x)\ dx = \left(\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\ dt\right)_{t=\phi^{-1}(x)}$$

1. Gebrauchsanweisung
   (a) Eine passende Ersetzung suchen
      i. $t = g(x)$
      ii. diese Ableiten $\frac{dt}{dx} = g'(t) = \ldots$
      iii. umstellen $dx = \frac{dt}{g'(t)} = \ldots$
   (b) Im Integral Substituieren mit Hilfe von (a).i (bzw. $x = g^{-1}(t) = \ldots$) und (a).iii
   (c) Versuchen Stammfunktion zu bilden
      i. wenn es nicht klappt, evtl. andere Substitution versuchen
      ii. evtl. passend klammern, um bekannte Integrale zu Nutzen
   (d) Im Ergebnis (Stammfunktion) zurücksubstituieren mit (a).i
2. Gebrauchsanweisung
   (a) Eine passende Ersetzung suchen
      i. $x = \phi(t)$
      ii. diese Ableiten $\frac{dx}{dt} = \phi'(t) = \ldots$
      iii. umstellen $dx = \phi'(t)\,dt = \ldots$
   (b) Umkehrfunktion bilden $t = \phi^{-1}(x)$
   (c) Im Integral Subtituieren mit Hilfe von (a).i und (a).iii
   (d) Versuchen Stammfunktion zu bilden
      i. wenn es nicht klappt, evtl. andere Substitution versuchen
      ii. evtl. passend klammern, um bekannte Integrale zu Nutzen
   (e) Im Ergebnis (Stammfunktion) zurücksubstituieren mit (a).i

- Beide Methoden äquivalent durch Regel der Ableitung der Umkehrfunktion.
- In der Tabelle 2 auf der nächsten Seite hat man eine Übersicht von geeigneten Substitutionen.
- So Klammern und Substituieren, das es auf etwas bekanntes (z.B. Ableitungen von Trigonometrischen-, Hyperbolischen- oder Areafunktioen) zurückführen lässt.
- Auf jeden Fall Probe!!!

11.5 Uneigentliche Integrale II.131

Unter uneigentlichen Integralen versteht man uneingeschränkte Integrale (z.B. $\int_{-\infty}^{+\infty}$) oder Integrale über uneingeschränkte Funktionen (z.B. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\ dx$).

Sei $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Für alle Teilintervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b)$ existiert das Riemannsche Integral. Die Funktion heißt *uneigentlich integrierbar* auf $[a, b)$, wenn

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

existiert. Entsprechend $-\infty \leq a < b < \infty$:

$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Wenn beide Grenzen unbeschränkt sind, lässt sich dies durch Zerlegung des Integrationsbereiches lösen.

11.5.1 Majorrantenkriterium II.133

$\forall_{[a,b)}^{x} 0 \leq f(x) \leq g(x)$: Konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\ dx$, so auch $\int_a^b f(x)\ dx$ und es gilt

$$0 \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

- Hilft beim abschätzen, ob es eine Lösung geben kann, und in welchen Intervall sie liegen wird.

11.5.2 Betragskriterium II.134

Wenn $\int_a^b |f(x)|\ dx$ konvergiert $\Rightarrow$ Konvergenz von $\int_a^b f(x)\ dx$ und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

12 Taylorentwicklung II.141

Idee: approximiere Funktionen durch geeignete Polynome $\Rightarrow$ einfacher zu differenzieren / integrieren.

Tabelle 2: Substitution zur unbestimmten Integration (R ist eine rationale Funktion in x, y)

Funktion	Methode	t	x
$R(x)$	Polynomdivision + Partialbruchzerlegung		
$R\left(x, \sqrt[k]{ax+b}\right)$	Substitution	$t = \sqrt[k]{ax+b}$	$x = \frac{t^k}{a} - \frac{b}{a}$
$R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$	Substitution	$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	$x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a}$
$R(\sin(ax), \cos(ax))$	Substitution	$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$x = 2\arctan(t)$
$R(e^{ax}, e^{-ax})$	Substitution	$t = e^{ax}$	$x = \frac{\ln(t)}{a}$
$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$	Substitution	$t = \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$ bzw. $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$	

12.1 Satz von Taylor II.141

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei in $[a, b]$ n-mal stetig differenzierbar und im offenen Intervall (a, b) $(n+1)$-mal differenzierbar. Sei $x_0 \in [a, b]$. Dann gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ ein ξ mit $x_0 < \xi < x$ oder $x < \xi < x_0$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

12.1.1 Taylorpolynom / Restglied II.141

- Allgemein gilt

$$f(x) = T_n(f, x, x_0) + R_n(f, x, x_0)$$

- Taylorpolynom der Funktion f vom Grad n um den Entwicklungspunkt x_0.

$$T_n(f, x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)$$

- Restglied in Lagrangeform

$$R_n(f, x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

  mit $\xi \in [x_0, x] \cup [x, x_0]$

- Restglied in Integralform

$$R_n(f, x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$$

- wichtige Reihen siehe 8.4 auf Seite 14 und 9.5 auf Seite 15.

12.2 Taylorreihe II.152

Sei $f[a, b] \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, und $x \in [a, b]$. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

heißt Taylorreihe von f um x_0. Sie konvergiert an x genau dann gegen $f(x)$ wenn

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f, x, x_0) = 0$$

- Nicht jede Taylorreihe konvergiert
- Konvergenz kann evt. nur für Intervalle bestehen
- wichtige Reihen siehe 8.4 auf Seite 14 und 9.5 auf Seite 15.

13 Funktionen mehrerer Veränderlicher II.199

13.1 Grundbegriffe II.199

13.1.1 Euklidische Norm II.199

Sei $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2}$ die euklidische Norm von $\vec{x}$.

- in $\mathbb{R}^2$ über Pythagoras
- Abstand erfüllt Dreiecksungleichung
- Punkte konstanter Norm ergeben Kugeloberfläche (in $\mathbb{R}^3$)
- Auch andere Abstände denkbar: z.B: $\|\vec{x}\|_{max} := \max_{j=1,\ldots,n} \{|x_j|\}$
  - auch hier Dreiecksungleichung
  - ergibt die selbe Analysis ($\|\vec{x}\|_{max} \leq \|\vec{x}\| \leq \sqrt{n}\,\|\vec{x}\|_{max}$)
- Abstand zweier Punkte über Differenz: $\|\vec{x} - \vec{y}\|$

13.1.2 Konvergenz II.202

Eine Folge $(\vec{a}_k) \in \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen den Grenzwert $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, wenn jede Komponentenfolge $(a_{kj})\quad (j = 1, \ldots, n)$ gegen a_j konvergiert.

- Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist, d.h. wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ einen $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\forall k, l > k_0 : \|\vec{a}_k - \vec{a}_l\| < \epsilon$

13.1.3 Randpunkt / Häufungspunkt II.200

Ein $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Randpunkt* von $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn für jede ϵ-Umgebung $U_\epsilon(\vec{a}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \, \|\vec{x} - \vec{a}\| < \epsilon\}$ sowohl $U_\epsilon(\vec{a}) \cap M \neq \emptyset$ als auch $U_\epsilon(\vec{a}) \cap (\mathbb{R}^n \backslash M) \neq \emptyset$ gilt.

Ein $\vec{a}$ heißt *Häufungspunkt* von M, falls es zu jeder ϵ-Umgebung $U_\epsilon(\vec{a})$ ein Element $\vec{x}_\epsilon \neq \vec{a}$ von M mit $\vec{x}_\epsilon \in U_\epsilon(\vec{a})$ gibt.

Ein $\vec{a} \in M$ heißt *innerer Punkt* $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ kein *Randpunkt* von M.

- Jede unendliche beschränkte Menge $M \in \mathbb{R}^n$besitzt mindestens einen Häufungspunkt (Satz von Bolzano-Weierstraß).

13.1.4 Abgeschlossen / Kompakt

M heißt *abgeschlossen*, wenn jeder Randpunkt von M zu M gehört.

M heißt *kompakt*, falls M beschränkt und abgeschlossen ist.

13.2 Stetigkeit und Grenzwert II.203

13.2.1 Stetigkeit II.203

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, heißt *stetig in* $\vec{x}_0 \in D$, wenn für jede Folge $(\vec{x}_n)$, mit $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$ gilt: $f(\vec{x}_n) \to f(\vec{x}_0)$.

Sie heißt *gleichmäßig stetig*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ gibt, so daß

$$\forall_D^{\vec{x},\vec{x}_0} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta :\Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$$

Eine Funktion $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ heißt stetig in $\vec{x}_0 \in D$, falls jede Komponente $f_j : D \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, n)$ stetig ist. $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_1(\vec{x}) \end{pmatrix}$

- Folgenkriterium aus $\mathbb{R}^1$ anwendbar.
- wenn f und g stetig $\to$folgende Funktionen sind stetig
  - $f + g$
  - fg
  - $\frac{f}{g}$ falls $g(\vec{x}_0) \neq 0$
  - $g \circ f$ bzw. $f \circ g$ falls Definitions- und Wertebereiche passen
- Sei $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ injektiv, in $\vec{x}_0 \in D$ stetig mit kompakten Definitionsbereich D. Dann ist die Umkehrfunktion $\vec{f}^{-1} : \vec{f}(D) \to D$ in $\vec{f}(\vec{x}_0) \in \vec{f}(D)$ stetig.
- $\vec{f} : D \to \mathbb{R}$ habe kompakten Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei stetig $\Rightarrow$
  - $\vec{f}$ gleichmäßig stetig auf D
  - $\vec{f}(D)$ kompakt

13.2.2 Grenzwert II.205

$f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$, hat in $\vec{x}_0 \in D$ den Grenzwert g, falls für jede Folge $(\vec{x}_k)$ mit $\vec{x}_k \to \vec{x}_0$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = g$$

Wir schreiben auch $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = g$

- wenn der Grenzwert existiert, so ist die Funktion
$$\tilde{f}(\vec{x}) := \begin{cases} f(\vec{x}) & \vec{x} \in D, \vec{x} \neq \vec{x}_0 \\ g & \vec{x} = \vec{x}_0 \end{cases}$$
stetig an $\vec{x}_0$.

13.2.3 (relative) Maxi-/Minima II.207

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ hat in $\vec{x}_0 \in D$ ein *relatives Minimum* (*Maximum*), wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ gibt, so daß $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ $(f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0))$ für alle $\vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_0)$.

$\vec{x}_0 \in D$ heißt *absolutes Minimum* (*Maximum*), wenn $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ $(f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0))$ für alle $\vec{x} \in D$.

- Wenn f stetig, und D kompakt $\Rightarrow$ es existiert mindestens ein Maximum und ein Minimum auf D (an den Rändern).

13.3 Partielle Ableitung II.208

13.3.1 Partielle Differenzierbarkeit II.208

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ eine Funktion und $\vec{x} \in D$. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_j) - f(\vec{x})}{h} = f_{x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})$$

für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ existiert, so heißt f in $\vec{x}$ *partiell* nach x_j *differenzierbar*.

13.3.2 Gradient II.210

$f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ sei in $\vec{x} \in D$ nach allen x_j $(j = 1, \ldots, n)$ partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\mathrm{grad} f(\vec{x}_0) := \nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

der Gradient von f im Punkt $\vec{x}_0$.

- ∇ wird nabla gesprochen (ist kein echter griechischer Buchstabe)
- Der Gradient gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f in $\vec{x}_0$ an

13.3.3 Richtungsableitung II.213

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$, $\vec{x} \in D$, $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ Einheitsvektor. Falls

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}) - f(\vec{x})}{h} = \nabla f(\vec{x})\,\vec{e}$$

existiert, heißt f in $\vec{x}$ *differenzierbar in Richtung* $\vec{e}$ und $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x})$ heißt *Richtungsableitung* von f *in Richtung* $\vec{e}$.

- Partielle Ableitung $\widehat{=}$ Richtungsableitung in Richtung der j-ten Koordinate

13.3.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung II.215

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ sei nach der Variablen x_k partiell differenzierbar. Im Punkt $x_0 \in D$ existiert die partielle Ableitung der Funktion $f_{x_k} : D \to \mathbb{R}$ nach x_j. Dann bezeichnet man

$$\frac{\partial f_{x_k}}{\partial x_j}(x_0) = f_{x_k k_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)$$

als partielle Ableitung zweiter Ordnung der Funktion f nach den Variablen x_k und x_j. Entsprechend werden partielle Ableitungen höherer Ordnung erklärt.

13.3.5 Hessematrix Q_A II.238

Die *Hessematrix* ist wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} H(\vec{x}_0) &= \left(f_{x_j x_k}(x)\right)_{j,k=1,\ldots,n} \\ &= \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \ldots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \ldots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- ist symmetrisch, falls $f \in C^2(D)$ ist

13.3.6 Differenzierbarkeitsklassen II.230

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$. Wir schreiben

$$f \in C^j(D)$$

(f gehört zu Klasse C^j) falls sämtliche partiellen Ableitungen bis zur j-ten Ordnung existieren und stetig sind.

13.3.7 Satz von Schwarz / Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen II.230

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f \in C^j(D)$. Dann gilt: Die mehrfache Ableitung $f_{x_{k_1},\ldots,x_{k_j}}$ ist von der Reihenfolge der partiellen Ableitungen unabhängig, d.h. für jede Permutation der Indizes ergibt sich das selbe Resultat.

13.3.8 Parameterabhängige Integrale II.216

Sei $f(x,t)$in $D := [a,b] \times [\alpha, \beta]$ stetige, reellwertige Funktion mit stetiger partieller Ableitung $f_t(x,t)$. Dann ist für beliebige $x_0 \in [a,b]$ die Funktion $F(y,t) := \int_{x_0}^{y} f(x,t)\,dx$ stetig und besitzt partielle Ableitungen $F_y(y,t) = f(y,t)$ und $F_t = \int_{x_0}^{x} f_t(x,t)\,dt$.

- eine art. Vertauschbarkeit von Grenzwerten

14 Differenzierbare Funktionen im $\mathbb{R}^n$ II.219

14.1 Der Differenzierbarkeitsbegriff II.219

14.1.1 Definition für $\dim(Bild) = 1$ II.219

Sei $f : D \to \mathbb{R}, (D \subseteq \mathbb{R}^n), x_0 \in D$ ein innerer Punkt von D. f heißt *differenzierbar in* $\vec{x}_0$, wenn es ein $\vec{c} \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ und eine Funktion $r : U_\varepsilon(\vec{x}_0) \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} r(\vec{x}) = 0$$

und

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{c}(\vec{x} - \vec{x}_0) + r(\vec{x})\,\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

gilt. Dies entspricht einer *linearen Approximierbarkeit* von f.

- Wenn eine Funktion f im inneren Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist, dann ist sie dort auch stetig.
- f differenzierbar in $\vec{x}_0 \Rightarrow$ es existieren alle partiellen Ableitungen von f in $\vec{x}_0$, und es gilt $\vec{c} = \mathrm{grad} f(\vec{x}_0)$
- Existieren alle partiellen Ableitungen $f_{x_j}(\vec{x})$ und sind stetig in $\vec{x}_0 \Rightarrow f$ ist differenzierbar in $\vec{x}_0$
- Differenzierbar ist Erweiterung der Existenz des Gradienten um die Bedingung der Stetigkeit
- Gleichung der *Tangentialebene*: $x_{n+1} = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$
  - Ebene befindet sich in einem Raum mit der Dimension $n+1$
  - *Normalenvektor* der Ebene: $\vec{n}(\vec{x}_0) = (f_{x_1}(\vec{x}_0), \ldots, f_{x_n}(\vec{x}_0), -1)$

14.1.2 Funktionalmatrix oder Jacobimatrix II.223

Sei $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ eine Funktion, $\vec{x}_0 \in D$ ein innerer Punkt. $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ heißt in $\vec{x}_0$ differenzierbar, falls alle Komponentenfunktionen f_j differenzierbar sind.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0) &= J_{\vec{f}} \\ &= \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x}_0) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_k(\vec{x}_0)}{\partial x_j}\right)_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}\end{aligned}$$

heißt *Funktionalmatrix* oder *Jacobimatrix* von $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$.

- Zeilen der Jacobimatrix = Gradienten der Komponentenfunktionen.

Differenzierbarkeit mehrdimensionaler Funktion $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$wenn:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{r}(\vec{x})\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

14.1.3 Kettenregel II.225

Sei $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$, $\vec{g}: \vec{f}(D) \to \mathbb{R}^p$, $\vec{x}_0 \in D$ innerer Punkt, $\vec{f}(\vec{x}_0) \in \vec{f}(D)$ innerer Punkt. Sind f in $\vec{x}_0$ und $\vec{g}$ in $\vec{f}(\vec{x}_0)$ differenzierbar, so ist die Verkettung $\vec{g} \circ \vec{f}$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar mit

$$\frac{d\left(\vec{g} \circ \vec{f}\right)}{d\vec{x}}(\vec{x}_0) = \frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\left(\vec{f}(\vec{x}_0)\right)\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0)$$

14.2 Lokale Extrema

14.2.1 Notwendige Bedingung für lokale Extrema II.238

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$ differenzierbar und besitzt f in D ein *relatives* Extrema in $\vec{x}_0$, dann gilt $\nabla f'(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

14.2.2 Quadratische Form / Definit II.239

Eine *quadratische Form* auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$Q_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ Q_A(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

für eine symmetrische $n \times n$-Matrix A.

Q_A heißt *positiv definit* (bzw. *negativ definit*), wenn

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}: Q_A(\vec{x}) > 0$$

(bzw. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}: Q_A(\vec{x}) < 0$) gilt.

Q_A heißt *indefinit*, falls

$$\exists \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}: Q_A(\vec{x}) < 0, Q_A(\vec{y}) > 0$$

gilt.

- $\frac{dQ_A(\vec{x})}{d\vec{x}} = 2A\vec{x}$

14.2.3 Hinreichende Bedingungen für lokale Extremstellen II.240

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ gehört zu Klasse $C^2(D)$. Im Punkt $\vec{x}_0 \in D$ gelte $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Dann besitzt f in $\vec{x}_0$ ein relatives Maximum (bzw. Minimum), falls die Hesse-Matrix $H(\vec{x}_0)$ negativ definit (bzw. positiv definit) ist. Ist $H(\vec{x}_0)$ indefinit, so kann f in $\vec{x}_0$ keine Extremalstelle besitzen.

- $H(\vec{x}_0)$ positiv (negativ) definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von $H(\vec{x}_0)$ positiv (negativ) sind
- $H(\vec{x}_0)$ indefinit $\Leftrightarrow$ Es gibt sowohl positive, als auch negative Eigenwerte von $H(\vec{x}_0)$

14.2.4 Sonderfall für $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ $\left(D \subseteq \mathbb{R}^2\right)$ sei in Klasse $C^2(D)$ und es gelte $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$. Dann gilt mit

$$d = \left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)(x_0, y_0)$$

- Ist $d > 0$ und $f_{xx} > 0 \Rightarrow f$ hat relatives Minimum an (x_0, y_0)
- Ist $d > 0$ und $f_{xx} < 0 \Rightarrow f$ hat relatives Maximum an (x_0, y_0)
- Ist $d < 0 \Rightarrow f$ hat kein Extremum an (x_0, y_0)

14.3 Implizite Funktionen II.242

14.3.1 Extremwerte unter Nebenbedingungen / Lagrange-Multiplikation II.250

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $\vec{g}: D \to \mathbb{R}^l$ (l-Nebenbedingungsfunktionen zu Vektor zusammengefasst) mit $l < n$ seien in $C^1(D)$. Sei $\vec{x}_0 \in D$ mit $\vec{g}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ und Rang $\left(\frac{d\vec{g}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0)\right) = l$ (Rang maximal). Weiter sei $f(\vec{x}_0)$ ein relatives Extremum der Menge $\left\{f(\vec{x})\,|\vec{x} \in D, \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$ dann gibt es l-Lagrange Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall k \in [1, n]: f_{x_k}(\vec{x}_0) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j (g_j)_{x_k}(\vec{x}_0) = 0$$

(Also $\nabla L = \vec{0}$,wobei $L = f(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(\vec{x})$)

14.3.2 Implizite Funktionen auf $\mathbb{R}^2$

Sei $F: D \to \mathbb{R}$, ($D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen), stetig und $F(x_0, y_0) = 0$, weiter sei F streng monoton wachsend (oder fallend) bezgl. y (für jedes feste x). Dann gibt es ein Rechteck

$$R = I \times J = [x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0] \times [y_0 - \beta_0, y_0 + \beta_0]$$

und eine auf I stetige Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ mit $F(x, g(x)) = 0$ für $x \in I$, und $F(x, y) \neq 0$ sonst auf $\mathbb{R}$.

Ist F stetig differenzierbar aus D, so ist auch $g(x)$ stetig differenzierbar in I mit

$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$$

14.3.3 Satz über implizite Funktionen II.247

Seien $D_n \subseteq \mathbb{R}^n$ und $D_m \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Die Funktionen $\vec{f} : D_n \times D_m \to \mathbb{R}^m$ gehören der Klasse $C_1(D_n \times D_m)$ an. Sei $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in D_n \times D_m$ mit $\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$ und $\det\left(\left((f_k)_{y_j}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)\right)_{k,j=1...,m}\right) \neq 0$ (Jacobi Matrix). Dann gibt es offene Umgebungen $U_{\varepsilon_n}(\vec{x}_0)$ und $U_{\varepsilon_m}(\vec{y}_0)$, so dass für jeden Punkt $\vec{x} \in U_{\varepsilon_n}(\vec{x}_0)$ genau ein $\vec{g}(\vec{x}) \in U_{\varepsilon_m}(\vec{y}_0)$ mit $\vec{f}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$ existiert.

- Die Ableitung von $\vec{g}(\vec{x})$ lässt sich berechnen, indem man $\vec{f}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x}))$ mithilfe der Kettenregel ableitet, und dann nach $\vec{g}'(\vec{x})$ umstellt.

15 Integration im $\mathbb{R}^n$ II.256

15.1 Riemann-Integrale über Intervallen

15.1.1 Zerlegung / Feinheit

Der Grundbereich über dem die Integration stattfinden soll heiße $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Dieser hat die *Zerlegung* Z_k der Intervalle $[a_k, b_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Die *Feinheit* der Zerlegung ist gegeben durch $\|Z\| = \max_{k=1,...,n} \|Z_k\|$. Zur Zerlegung Z von Q bezeichnen wir mit $Q_1, \ldots, Q_N$ die Teile von Q, also $Q = \cup_{l=1}^N Q_l$

15.1.2 Definition Integral

Für $f : Q \to \mathbb{R}^n$, definiere Integral

$$\int_Q f(\vec{x})\ d\vec{x} := \lim_{\|Z\| \to 0} \sum_{l=1}^N |Q_l|\, f\left(\vec{\xi}_l\right)$$

mit $\vec{\xi}_l \in Q_l$ $(l = 1, \ldots, N)$. Wobei $|Q_l|$= “Volumen” von Q_l bezeichnet, also bei $Q_l = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_n, d_n] \Rightarrow |Q_l| = \prod_{l=1}^n |d_1 - c_1|$. Falls der Grenzwert existiert, so heißt f *Riemann-integrierbar.*

15.1.3 Eigenschaften von Integralen

- Linearität
  $\int_Q (f + g)\ d\vec{x} = \int_Q f\ d\vec{x} + \int_Q g\ d\vec{x}$
  $\int_Q c\ f\ d\vec{x} = c \int_Q f\ d\vec{x}$
- Additivität
  $\int_{[a,b]\times[c,d]} f\ d\vec{x} =$
  $\int_{[a,l]\times[c,d]} f\ d\vec{x} + \int_{[l,b]\times[c,d]} f\ d\vec{x}$
- stetige Funktionen sind integrierbar
- wenn f, g integrierbar $\Rightarrow$
  - $|f|$ integrierbar
  - $f\ g$ integrierbar
  - $\frac{f}{g}$ integrierbar (falls $g \neq 0$)
  - $\max(f, g)$ integrierbar
  - $\min(f, g)$ integrierbar
- Monotonie
  $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$ auf $Q \Rightarrow$
  $\int_Q f(\vec{x})\ d\vec{x} \leq \int_Q g(\vec{x})\ d\vec{x}$
- $\int_Q 1\ d\vec{x} = |Q|$
- Mittelwertsatz
  f integrierbar auf Q, $m \leq f(\vec{x}) \leq M$ auf Q
  $\Rightarrow m\,|Q| \leq \int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} \leq M\,|Q|$
- Dreiecksungleichung
  $\left|\int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x}\right| \leq \int_Q |f(\vec{x})\, d\vec{x}| \leq \|f\|_Q\, |Q|$
  wobei $\|f\|_Q := \sup\{|f(\vec{x})|\, \vec{x} \in Q\}$

15.2 Integrierte Integrale über Intervallen II.263

15.2.1 Satz von Fubini II.263

Sei $f : Q \to R$, $Q := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = \times_{k=1}^n [a_k, b_k]$ ein *Quader*.

Existiert für jedes x_k

$$h(x_k) := \int_{I_k} f(x_1, ..., x_n)\, d(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n)$$

wobei

$$I_k = \{(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)\, | a_j \leq x_j \leq b_j\}$$

dann existiert das Integral

$$\int_{a_k}^{b_k} h(x_k)\, dx_k$$

und es gilt $\int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{a_k}^{b_k} h(x_k)\, dx_k$ bzw. $\int_Q f = \int_{a_k}^{b_k} \left(\int_{I_k} f\right)$.

Existiert für jedes $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in I_k$ das Integral $g(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \int_{a_k}^{b_k} f(\vec{x})$ dann existiert das integrierte Integral

$$\int_{I_k} g(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n)\, d(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n)$$

und ist gleich $\int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x}$. Es gilt auch $\int_Q f = \int_{I_k} \left(\int_{a_k}^{b_k} f\right)$

- speziell für $n = 2$
  $Q = [a, b] \times [c, d]$
  Existiert für $x \in [a, b]$ das Integral $h(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy \Rightarrow \int_Q f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$
  Existiert für $y \in [c, d]$ das Integral $h(x) = \int_a^b f(x, y)\, dx \Rightarrow \int_Q f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$

15.2.2 Charakteristische Funktion

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mit $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\chi_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in A \\ 0 & \vec{x} \notin A \end{cases}$ bezeichnen wir die *charakteristische Funktion* von A.

15.3 Riemann Integrale über beschränkte Mengen

15.3.1 Volumen einer Menge II.269

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge. Es existiere $\int_D 1dx = \int_D dx$. Dann heißt $V(D) = \int_D dx$ das *Volumen der Menge D*. In diesem Fall heißt D *messbar*. Ist $V(D) = 0$, so heißt D eine *Nullmenge*.

Sei $Q = \times_{j=1}^n [a_j, b_j]$ein Quader, $D \subseteq Q$. Kennt man das $n-1$ dimensionale Volumen $V(x_n)$für jedes x_n, so gilt $V(D) = \int_{a_n}^{b_n} V(x_n)\, dx_n$ (Prinzip von Cavalieri).

15.3.2 Riemannsche Integral

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion. Sei Q ein Quader mit $D \subseteq Q$. Dann heißt

$$\int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_Q f(\vec{x})\, \chi_D(\vec{x})\, d\vec{x}$$

das *Riemannsche Integral* von f über D.

- Additivität
  $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, und $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{R}$
  $\int_{D_1 \cup D_2} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{D_1} f(\vec{x})\, d\vec{x} + \int_{D_2} f(\vec{x})\, d\vec{x}$

15.3.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, messbar, f integrierbar. Dann gibt es eine Zahl $\eta \in [\inf_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}), \sup_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})]$ mit $\int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} = \eta V(D)$.

- $V(D) = 0 \Rightarrow \int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} = 0$

15.3.4 Zylindermengen II.275

Folgendes sind *Zylindermengen.*

Sei $D = \{(x, y) \,|a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ dann folgt hieraus $\int_D f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$.

Sei $D = \{(x,y,z) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)\}$ dann folgt hieraus $\int_D f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$.

15.3.5 Substitutionsregel II.278

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar. Sei Q ein Quader mit $D \cup \text{Rand}(D) \subseteq Q$ und $\vec{g} : Q \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, die auf D umkehrbar ist.

Gilt dann $\det \frac{d\vec{g}}{d\vec{x}}(\vec{x}) \neq \vec{0}$ für alle $\vec{x} \in D$, so gilt für jedes stetige $f : g(D) \cup g(\text{Rand}(D)) \to \mathbb{R}$ die Substitutionsregel:

$$\int_{\vec{g}(D)} f(\vec{y})\, d\vec{y} = \int_D f(\vec{g}(\vec{x})) \left| \det \frac{d\vec{g}}{d\vec{x}}(\vec{x}) \right| d\vec{x}$$

16 Integralsätze II.285

16.1 Kurvenintegrale II.285

16.1.1 glatte Kurve

Sei $\vec{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige differenzierbare Funktion und $f'(t) \neq \vec{0}$für $t \in [a, b]$.

Dann heißt $\vec{f}$ und die Punktmenge $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n | \exists_{[a,b]}^t : \vec{x} = \vec{f}(t) \right\}$ eine *glatte Kurve*. t heißt *Parameter* der Kurve, $[a, b]$ *Parameterintervall.*

f heißt *stückweise glatt*, wenn es in den Teilintervallen einer Zerlegung $[a, b] = [a, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots \cup [t_{n-1}, b]$ glatt ist, und somit stetig.

16.1.2 geschlossene / doppelpunktfreie Kurve II.286

Eine Kurve $\vec{f}(a) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, wenn $\vec{f}(a) = \vec{f}(b)$. Ist $\vec{f}$ injektiv auf $[a, b]$, so heißt $\vec{f}$ *doppelpunktfrei.*

- doppelpunktfrei $\Rightarrow$ Es ex. keine Teilkurve, die geschlossen ist

16.1.3 Äquivalente Parametrisierung einer Kurve II.287

Durch $\vec{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\vec{\tilde{f}} : \left[\tilde{a}, \tilde{b}\right] \to \mathbb{R}^n$ werde jeweils eine stückweise glatte Kurve dargestellt. Weiter existiere eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : [a, b] \to$

$\left[\tilde{a}, \tilde{b}\right]$mit $\psi(a) = \tilde{a}$, $\psi(b) = \tilde{b}$ und $\psi'(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$, und es gelte

$$\forall^t_{[a,b]} : \vec{f}(t) = \vec{\tilde{f}}(\psi(t))$$

Dann heißen $\vec{f}, \vec{\tilde{f}}$ *zueinander äquivalente Darstellungen* der Kurve

$$K = \left\{\vec{x} | \exists^t_{[a,b]} : \vec{x} = \vec{f}(t)\right\} = \left\{\vec{x} | \exists^{\tilde{t}}_{[\tilde{a},\tilde{b}]} : \vec{x} = \vec{\tilde{f}}\left(\tilde{t}\right)\right\}$$

16.1.4 Tangente II.287

Sei K eine Stückweise glatte Kurve, die durch $\vec{f}$: $[a.b] \to \mathbb{R}^n$ dargestellt werde. Der Vektor $\vec{f}'(t)$heißt *Tangentenvektor an K im Punkt* $\vec{f}(t)$,

$$\vec{f_0}'(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\left\|\vec{f}'(t)\right\|}$$

heißt *Tangenteneinheitsvektor* im Punkt $\vec{f}(t)$. Die Gerade

$$\vec{f}(t) + \lambda \vec{f}_0'(t)$$

heißt *Tangente an K im Punkt* $\vec{f}(t)$.

- Die Tangenten sind unabhängig von der Parametrisierung $(\vec{f} = \vec{\tilde{f}} \circ \psi)$
  $\vec{f}_0'(t) = \vec{\tilde{f}}_0'(\psi(t))$

16.1.5 Länge einer Kurve II.288

Durch f werde eine glatte, doppelpunktfreie Kurve K dargestellt. Das Integral

$$L(K) = \int_a^b \left\|\vec{f}'(t)\right\| dt$$

heißt *Länge der Kurve K*.

- Falls Doppelpunkte vorhanden sind $\Rightarrow$ Kurve Auftrennen, bzw. Nullmengen weglassen
- Die Länge einer Kurve ist unabhängig von der Darstellung (Parametrisierung)
  $\int_a^b \left\|\vec{f}'(t)\right\| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\|\vec{\tilde{f}}'\left(\tilde{t}\right)\right\| d\tilde{t}$

16.1.6 Bogenlänge II.291

Sei K eine glatte doppelpunktfreie Kurve, die durch $\vec{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ gegeben sei. Dann heißt die Funktion $s : [a, b] \to [0, L(K)]$, erklärt durch

$$s(t) = \int_a^t \left\|\vec{f}'(\tau)\right\| d\tau$$

die *Bogenlänge* der Kurve K.

- abhängig von Parametrisierung

16.1.7 Konstantes Durchlaufen einer Kurve II.292

Sei K eine glatte doppelpunktfreie Kurve. Die Bogenlänge s ist eine stetige, differenzierbare, streng monoton wachsende Funktion und besitzt eine Umkehrfunktion s^{-1} mit denselben Eigenschaften. Die Parameterdarstellung $\vec{\tilde{f}} : [0, L(K)] \to \mathbb{R}^n$, $\vec{\tilde{f}}\left(\tilde{t}\right) := \vec{f}\left(s^{-1}\left(\tilde{t}\right)\right)$ ist zur gegebenen Darstellung $\vec{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ äquivalent, und es gilt

$$\left\|\vec{\tilde{f}}'(t)\right\| = 1$$

- Bei Parametrisierung durch Bogenlänge durchlaufen wir die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit

16.1.8 Vektorfeld / Skalarfeld II.292

Eine auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ erklärte, stetig differenzierbare Funktion $\vec{V} : D \to \mathbb{R}^n$ nennen wir ein *Vektorfeld*. Entsprechend heißt $P : D \to \mathbb{R}$ ein *Skalarfeld*.

16.1.9 Kurvenintegral II.293

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{V} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Sei K eine durch $\vec{f} : [a, b] \to D$ gegebene stückweise glatte Kurve. Dann heißt

$$\int_K \vec{V} d\vec{s} := \int_a^b \vec{V}\left(\vec{f}(t)\right) \vec{f}'(t)\, dt$$

das *Kurvenintegral von* $\vec{V}$ *längs* K.

- Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung von K

16.1.10 Potentialfeld II.295

Ein Vektorfeld $\vec{V} : D \to \mathbb{R}^n$ heißt *Potentialfeld*, falls es eine Funktion $P : D \to \mathbb{R}$mit $\nabla P(\vec{x}) = \vec{V}(\vec{x})$ gibt.

16.1.11 Konvex

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex* $\Leftrightarrow$ mit je zwei Punkten $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D$ gehört auch die Verbindungsgrade $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \lambda \in [0, 1]\}$ zu D.

16.1.12 Wegunabhängiges Kurvenintegral II.295

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $\vec{V} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann gilt: Das Kurvenintegral $\int_K \vec{V}\, d\vec{s}$ ist wegunabhängig $\Leftrightarrow$ $\vec{V}$ ist ein Potentialfeld.

- Wenn P mit $\nabla P(\vec{x}) = \vec{V}(\vec{x})$ bekannt ist, dann gilt:
  $\int_K \vec{V}\, d\vec{s} = P\left(\vec{f}(b)\right) - P\left(\vec{f}(a)\right)$

16.1.13 Zentralfeld II.297

Sei $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann wird durch $\vec{V}(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|) \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ gegeben. Man bezeichnet solche Felder als *Zentralfeld*.

- Zentralfelder sind immer Potentialfelder mit: $\int_K \vec{V}\ d\vec{s} = \int_{\|\vec{f}(a)\|}^{\|\vec{f}(b)\|} g(t)\ dt$

17 Vektorrechnung in $\mathbb{V}^3$ I.76

17.1 Definition eines Vektors I.76

Vektor $\vec{a}$ ist Element der Menge der geordneten Zahlen Tripple. Er wirkt auf einen Punkt, indem er ihn auf den Koordinatenachsen um die angegebenen Werte verschiebt, deshalb werden Vektoren auch Verschiebungsvektoren genannt.

$$\begin{aligned} \vec{a} \in \mathbb{V}^3 &= \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \,| x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= (x_a, y_a, z_a) \quad \text{Zeilenvektor} \\ &= \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \quad \text{Spaltenvektor} \end{aligned}$$

Zeilen- und Spaltenvektoren sind nur unterschiedliche Schreibweise, haben aber mathematisch die gleiche Bedeutung.

Der Verschiebungsvektor von P nach Q ist wie folgt definiert

$$\vec{PQ} = \vec{a}_{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

17.2 Vektoren als Pfeile

17.2.1 Rechenregeln I.76

- Addition (Komponentenweise)
  $\vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b)$
- Skalarmultiplikation
  $\lambda\vec{a} = (\lambda x_a, \lambda y_a, \lambda z_a)$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ und $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
- $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

17.2.2 Länge eines Vektors I.81

Länge von $\vec{a} = \|\vec{a}\| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$

- $\|\vec{a}\| \geq 0$
- $\left\|\vec{0}\right\| = 0$
- $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\,\|\vec{a}\|$

17.3 Das skalare Produkt I.84

Das skalare Produkt ordnet zwei Vektoren eine reelle Zahl zu.
(geometrisch: Betrag von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$)

$$\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

- $\vec{a}\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$
- $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$
- $(\lambda\vec{a})\,\vec{b} = \lambda\vec{a}\vec{b}$
- (umgekehrte-) Dreiecksungleichung
  $\left|\|\vec{a}\| - \left\|\vec{b}\right\|\right| \leq \left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| \leq \|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\|$
- Cauchy-Schwarze Ungleichung
  $\left|\vec{a}\vec{b}\right| \leq \|\vec{a}\|\,\left\|\vec{b}\right\|$
- $\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

17.3.1 Eingeschlossener Winkel I.86

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen den Winkel α ein.

$$\cos\alpha = \cos\left(\alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\left\|\vec{b}\right\|}$$

für α schreibt man auch $\alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

17.3.2 Einheitsvektor / Renormierung I.88

Ein Einheitsvektor ($\vec{e}$) ist ein Vektor mit beliebiger Richtung und der Länge 1. Man erhält ihn durch Renormierung.

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

- Besondere (auf den Koordinatenachsen): $\vec{e}_x = (1,0,0) \quad \vec{e}_y = (0,1,0) \quad \vec{e}_z = (0,0,1)$

17.3.3 Projektion eines Vektors I.89

$\vec{a'}$ ist die Projektion des Vektors $\vec{a}$ in Richtung $\vec{e}$ ($\|\vec{e}\| = 1$).

$$\vec{a'} = (\vec{a}\vec{e})\,\vec{e}$$

17.3.4 Richtungskosinus I.90

Die Komponenten eines renormierten Vektors $\vec{e}$ geben den Cosinus der Winkel mit den Einheitsvektoren der Koordinatenachsen an.

17.4 Das vektorielle Produkt I.90

Das vektorielle Produkt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ ordnet zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen dritten Vektor $\vec{c}$ zu. Man stelle sich vor, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen im Raum eine Fläche (Parallelogramm) auf. $\vec{c}$ wird auf dieser Fläche senkrecht stehen, und als Länge, den Betrag des Flächeninhalts des Parallelogramms haben. Die genaue Richtung lässt sich mit der 3-Fingerregel überlegen. Daumen $= \vec{a}$; Zeigefinger (ausgestreckt) $= \vec{b}$; Mittelfinger (90° angewinkelt) $= \vec{c}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & a_x & b_x \\ \vec{e}_y & a_y & b_y \\ \vec{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix}$$

- Das vektorielle Produkt ist nur in $\mathbb{V}^3$ definiert.

17.4.1 Rechenregeln I.91

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \vec{a} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times \lambda\vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig
- $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$
- $\sin\left(\alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) = \frac{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$

17.5 Spatprodukt I.95

Das Spatprodukt ordnet drei Vektoren eine reelle Zahl zu. Diese entspricht dem Volumen des von den Vektoren aufgespannten Spats (3-dimensionales Parallelogramm).

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] := \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

- Die Wert entspricht genau dem der Determinante aus den 3 Vektoren.
- Das Spatprodukt ist nur in $\mathbb{V}^3$ definiert.

17.5.1 Rechenregeln I.96

- zyklisches Vertauschen
  $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right]$
- antizyklisches Vertauschen
  $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{c}, b\right]$
- $\left[\vec{a} + \vec{a'}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{a'}, \vec{b}, \vec{c}\right]$
- $\left[\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$
- $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig
- Entwicklungssatz
  $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a}\vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}$
- Lagrande-Identität
  $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{a}\vec{c})\left(\vec{b}\vec{d}\right) - \left(\vec{a}\vec{d}\right)\left(\vec{b}\vec{c}\right)$

17.6 Gerade und Ebene im Raum I.99

17.6.1 Geradengleichung I.99

- Punkt-Richtungsform
  $g : \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}$
  - Ortsvektor $\vec{r}_0 = \vec{OP_o}$
  - Richtungsvektor $\vec{a}$
- Zwei-Punkte-Form
  $g : \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}$
  - Ortsvektor $\vec{r}_0 = \vec{OP_o}$
  - Richtungsvektor $\vec{a} = \vec{P_0P_1}$
- Parameterfreie Darstellung
  $\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}$

17.6.2 Ebenengleichung I.107

- Parameterdarstellung von E :
  $E : \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}$
  - Ortsvektor $\vec{r}_0$
  - Richtungsvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ (müssen linear unabhängig sein!!)
  - Normalenvektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$
  - Aus parameterfreier Darstellung per Festlegung von z.B. y, z als Parameter s, t
    $\vec{r} = \left(\frac{D}{A}, 0, 0\right) + s\left(-\frac{B}{A}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right)$

- Drei-Punkte-Form
  $E: \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}$
  - Ortsvektor $\vec{r}_0 = \vec{OP_o}$
  - Richtungsvektoren
    $\vec{a} = \vec{P_0P_1} \quad \vec{b} = \vec{P_0P_2}$
- Als Skalarprodukt
  $\vec{n}\,(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$
- Als Spatprodukt
  $\left[\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}\right] = 0$
- Parameterfreie Darstellung
  $E: Ax + By + Cz = D$
  $E: \vec{n}\vec{r} = D$
  - Punkt auf der Ebene $\vec{r} = (x, y, z)$
  - A, B, C, D Konstanten
  - Normalenvektor $\vec{n} = (A, B, C)$
  - Aus Parameterdarstellung:
    * per Elimination der Parameter
    * aus der Determinante des Spatprodukts (det $\left[(x, y, z) - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}\right] = 0$)
    * $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$
- Hessesche Normalform der Ebenengleichung I.114
  $E: \vec{e}_n\vec{r} - \vec{e}_n\vec{r}_0 = 0$ (folgt aus $E: \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_0 = D$)
  - Erhält man durch Renormierung $\vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

17.6.3 Lage von Geraden im Raum I.99

$g_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \quad g_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{a}_2$

1. g_1, g_2 parallel zueinander
   - $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = 0$
   - Sonderfall $g_1 = g_2$ wenn zusätzlich $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1$
2. g_1, g_2 schneiden sich in genau einem Punkt
   - $g_1 = g_2 \Rightarrow$ Schnittpunkt
   - $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq 0$
3. g_1, g_2 windschief zueinander (weder parallel noch Schnittpunkt)
   - $g_1 = g_2 \Rightarrow$nicht lösbar
   - $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq 0$
   - z.B. $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

17.6.4 Abstand Gerade Punkt I.105

Gerade: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, Punkt: $\vec{r}_1$, Abstand d

$$d = \frac{\|\vec{a} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\|}{\|\vec{a}\|}$$

17.6.5 Abstand zweier windschiefer Geraden I.106

$g_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \quad g_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{a}_2$

$$d = \frac{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_1]|}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|}$$

17.6.6 Normalenvektor I.108

Jeder auf der Ebene $E: \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}$ senkrecht stehende Vektor $\vec{n}$ wird als Normalenvektor der Ebene E bezeichnet.

$$\vec{n} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right), \quad \lambda \neq 0$$

17.6.7 Lage zweier Ebenen im Raum I.111

$E_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + s\vec{a}_1 + t\vec{b}_1 \quad E_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + s\vec{a}_2 + t\vec{b}_2$

1. $E_1 = E_2$ (sind gleich)
   - $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \quad \left[\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right] = 0$
2. E_1, E_2 sind parallel aber nicht gleich
   - $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \quad \left[\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right] \neq 0$
3. E_1, E_2 schneiden sich in einer Geraden
   - $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0} =$ Richtungsvektor der Schnittgeraden
   - Ortsvektor der Schnittgeraden ist ein beliebiger Punkt der auf E_1 und E_2 liegt.

17.6.8 Schnittpunkt Gerade Ebene I.110

Der Schnittpunkt der Ebene $E: \vec{n} \cdot \vec{r} = D$ und der Gerade $g: \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ hat den Ortsvektor

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_0 + \frac{D - \vec{n}\vec{r}_0}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a}$$

17.6.9 Lot auf Ebene I.111

Die Lotgerade auf der Ebene $E: \vec{n} \cdot \vec{r} = D$ durch den Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\vec{r}_0$ besitzt folgende Gestalt

$$l: \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{n}$$

Der Ortsvektor des Fußpunktes (Durchstoßpunkt mit der Ebene) ergibt sich dann so

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_0 + \frac{D - \vec{n}\vec{r}_0}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$$

17.6.10 Abstand Nullpunkt-Ebende I.113

Der Abstand einer Ebene $E: \vec{n} \cdot \vec{r} = D$ vom Ursprung $d = |\vec{e}_n\vec{r}_0|$

17.6.11 Abstand Punkt-Ebene I.114

Der Abstand einer Ebene $E : \vec{n} \cdot \vec{r} = D$ vom Punkt $\vec{r}_1$
$d = |\vec{e}_n \vec{r}_1 - \vec{e}_n \vec{r}_0|$

18 Vektorräume I.159

18.1 Definition I.159

Sei $\mathbb{V}$ eine Menge und $\mathbb{K}$ ein Körper. Zu je zwei Elementen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus $\mathbb{V}$ gebe es genau ein Element $\vec{a}+\vec{b} \in \mathbb{V}$. Zu jedem λ aus $\mathbb{K}$ und jedem Element $\vec{a}$ aus $\mathbb{V}$ gebe es genau ein Element $\lambda\vec{a} \in \mathbb{V}$. $\mathbb{V}$ heißt *Vektorraum* (VR) über $\mathbb{K}$, wenn die folgenden Grundgesetze gelten.

- Addition in $\mathbb{V}$
  - Kommutativgesetz
    $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
  - Assoziativgesetz
    $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$
  - Neutrales Element
    $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ und $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
  - Inverses Element
    $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- Multiplikation mit Körperelementen
  - Neutrales Element
    $1\vec{a} = \vec{a}$
  - $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
  - $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
  - $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

18.1.1 Untervektorraum I.160

$\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ heißt Untervektorraum (UVR) vom $\mathbb{V}$, wenn für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{U}, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{U}, \lambda\vec{a} \in \mathbb{U}$$

- Untervektorraumkriterium
  $\forall_{\mathbb{U}}^{\vec{a},\vec{b}} : \forall_{\mathbb{K}}^{\lambda,\mu} : \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \in \mathbb{U}$
  oder
  $\forall_{\mathbb{U}}^{\vec{a},\vec{b}} : \forall_{\mathbb{K}}^{\lambda} : \lambda\vec{a} \in \mathbb{U} \wedge \vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{U}$
- Durchschnitt
  $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{V}$
- Vereinigung nicht UVR!!!
  $\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \not\subseteq \mathbb{V}$
- Summe
  $\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 = \{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 | \vec{a}_1 \in \mathbb{U}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{U}_2\} \subset \mathbb{V}$

18.1.2 Linearkombination I.161

$$\vec{b} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$$

$\vec{b}$ ist eine Linearkombination aus $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

18.1.3 Triviale Darstellung des Nullvektors I.162

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j = \vec{0}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$$

18.1.4 Lineare (Un-)Abhängigkeit I.163

Die Vektoren $\vec{a}_j \in \mathbb{V}, j = 1, \ldots, n$ heißen linear unabhängig wenn sich aus ihnen nur mit der trivialen Darstellung der Nullvektor darstellen lässt. Ansonsten sind sie Linear abhängig.

Bei linear abhängigen Vektoren lässt sich mindestens ein Vektor $\vec{a}_j$ als Linearkombination der restlichen Darstellen:

$$\vec{a}_{j_0} = -\sum_{j=1, j\neq j_0}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_{j_0}} \vec{a}_j$$

- Beweis durch Lösen von lin. Gleichungssystem. Wenn eindeutig möglich $\Rightarrow$ linear unabhängig.
- Anzahl der Vektoren muss $\leq \dim(\mathbb{U})$ sein, sonst sind sie zwangsläufig lin. abhängig.
- $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \det\left(\vec{b}_1 | \ldots | \vec{b}_n\right) \neq 0$

18.1.5 Lineare Hülle I.165

Menge aller Linearkombinationen aus gegebenen Vektoren.

$$\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}$$

- Die Lineare Hülle bildet einen Untervektorraum von $\mathbb{V}$
- Wenn $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig, und $\vec{b} \in \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \rangle$ dann ist $\vec{b} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j$ eindeutig.
- Direkte Summe
  $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \bigoplus \mathbb{U}_2 \ldots \bigoplus \mathbb{U}_n$
  Wenn die Untervektorräume linear unabhängig sind

18.2 Endlich-dimensionale Vektorräume I.166

18.2.1 Erzeugendensystem I.166

Wenn $\mathbb{U} = \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \rangle$ bilden $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{U}$.

- Alle Basen sind autom. auch Erzeugendensystem.

18.2.2 Basis I.166

Wenn $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind, und ein Erzeugendensystem von $\mathbb{U}$ sind bilden sie eine *Basis* von $\mathbb{U}$.

- Ein Vektor lässt sich in einer Basis eindeutig darstellen
  $\vec{b} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j$
- Es kann unterschiedliche Basen von $\mathbb{U}$ geben.
- Alle Basen haben die gleiche Anzahl von Vektoren.
- Wenn die Anzahl der Vektoren $= \dim(\mathbb{U})$ und sie lin. unabhängig sind, sind sie autom. ein Basis.

18.2.3 Kanonische Basis / Standardbasis I.169

$$\vec{e}_j^{(n)} = (0, \ldots, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, \ldots, 0), \quad j = 1, \ldots, n$$

- Die Standardbasen sind linear unabhängig
- Sie erzeugen $\mathbb{K}^n$
- ist eine Orthonormale Basis (siehe 18.4.2 auf der nächsten Seite)

18.2.4 Dimension I.167

Die Anzahl von Vektoren von einer Basis wird Dimension genannt: $\dim(\mathbb{U})$

18.2.5 Nullraum I.169

$\mathbb{U} = \left\{\vec{0}\right\} \subseteq \mathbb{V}$ ist ein trivialer Untervektorraum eines jeden Vektorraumes der Dimension 0.

18.2.6 Linearer Teilraum I.169

$\vec{a}$ sei ein fester Vektor

$$\left\{\vec{a} + \vec{b} | \vec{b} \in \mathbb{U}\right\}$$

wird als Linearer Teilraum der $\dim(\mathbb{U}) = n$ bezeichnet.

18.2.7 Darstellung von Vektorräumen I.169

Die Menge aller geordneten n-Tupel(geordnete Menge an Zahlen) von Skalaren aus $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \, | a_j \in \mathbb{K}, j = 1, \ldots, n\}$$

versehen mit der Addition

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

und der Multiplikation mit Skalaren aus $\mathbb{K}$

$$\lambda (a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$$

bilden einen n-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dieser wird mit $\mathbb{K}^n$ abgekürzt.

18.3 Koordinaten I.171

18.3.1 Definition I.171

Ein Vektor $\vec{a}$ lässt sich mit Hilfe der Koordinaten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ bezüglich der Basis $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ wie folgt (eindeutig) darstellen.

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{b}_k$$

- Bezüglich der Kanonischen Basis sind die Koordinaten genau die Komponenten des Vektors $\vec{a}$
- Der Vektor der Koordinaten heißt Koordinatenvektor $\vec{\alpha}$
- Die Rechenregeln für Summe von zwei Koordinatenvektoren der gleichen Basis und die Regeln der Multiplikation mit einem Skalar sind identisch mit den Regeln für Vektoren.
- $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_m$ linear unabhängig

18.3.2 Basiswechsel I.174

Seien $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ und $\vec{\tilde{b}}_1, \ldots, \vec{\tilde{b}}_n$ zwei Basen des n-dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{V}$. Die Basisvektoren haben nun sollen folgende Beziehungen untereinander besitzen

$$\vec{\tilde{b}}_j = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\beta}_{k,j} \vec{b}_k, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\vec{b}_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{k,j} \vec{\tilde{b}}_k, \quad j = 1, \ldots, n$$

Die Koordinatenvektoren $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n$ und $\vec{\tilde{\beta}}_1, \ldots, \vec{\tilde{\beta}}_n$ sind linear unabhängig.

Einen Vektor $\vec{a}$ kann man nun in beiden Basissystemen ausdrücken

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \vec{\tilde{b}}_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{b}_j$$

Zwischen den Koordinatenvektoren $\vec{\tilde{\alpha}}$ und $\vec{\alpha}$ in den jeweiligen Basissystemen besteht der Zusammenhang:

$$\tilde{\alpha}_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{k,j} \alpha_j$$

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\beta}_{k,j} \tilde{\alpha}_j$$

- Für weiteres siehe 20.1.4 auf Seite 40

18.3.3 Kronecker-Symbol I.176

Das Kronecker-Symbol ist wie folgt definiert

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0, & \text{falls } j \neq k \end{cases}$$

18.4 Der unitäre Vektorraum $\mathbb{C}^n$ I.177

Übertragen des Skalarproduktes und des Betrages auf den Vektorraum $\mathbb{C}^n$.

18.4.1 Skalare Produkt / Betrag I.178

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{a}_j} = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$$

Es gelten die selben Regeln wie für Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ (siehe 17.3 auf Seite 31) mit folgenden Ausnahmen bzw. Ergänzungen:

- $\vec{a}\vec{b} = \overline{\vec{b}\vec{a}}$
- $(\lambda\vec{a})\,\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)$
  $\vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right) = \bar{\lambda}\left(\vec{a}\vec{b}\right)$
- Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen orthogonal (senkrecht) zueinander $\left(\vec{a} \perp \vec{b}\right)$, wenn $\vec{a}\vec{b} = 0$
- Vektoren der Länge 1 ($\|\vec{a}\| = 1$) heißen Einheitsvektoren.

18.4.2 Orthogonalsystem / Orthonormalsystem (Basis) I.180

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$, die den Nullvektor nicht enthält und mit $\vec{a}_k\vec{a}_j = 0$ für $k \neq j$ heißt *Orthogonalsystem* (alle Vektoren sind senkrecht zueinander).

Sind zudem alle $\vec{a}_j$ normiert (Länge 1) so heißen sie *Orthonormalsystem*.

- Die Vektoren eines Orthonormalsystems sind linear unabhängig
- Bilden die Vektoren eine Basis, so spricht man von einer *Orthogonalbasis* bzw. *Orthonormalbasis*.
- Die Kanonische Basis ist eine Orthonormalbasis (siehe 18.2.3 auf der vorherigen Seite).

18.4.3 Existenz einer Orthonormalbasis I.181

Sei $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren. Dann gibt es ein Orthonormalsystem $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m$ mit $\left\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_i \right\rangle = \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i \rangle$ für alle $1 \leq i \leq m$.

18.4.4 Gram-Schmidtsches-Orthonormalisierungsverfahren I.182

Auch unter dem Namen Hilbert-Schmidtsches-Orthonormalisierungsverfahren bekannt. Konventionen wie bei 18.4.3.

1. $\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}$
2. Für alle $\vec{b}_k$ mit $1 \leq k \leq m-1$
   (a) $\vec{\tilde{a}}_{k+1} = \vec{a}_{k+1} - \sum_{l=1}^{k} \left(\vec{a}_{k+1}\vec{b}_l\right) \vec{b}_l$
   (b) $\vec{b}_{k+1} = \frac{\vec{\tilde{a}}_{k+1}}{\|\vec{\tilde{a}}_{k+1}\|}$

- Alle $\vec{b}_k$ auf Länge (=1) und orthogonalität (Skalarprodukt = 0) testen
- Brüche und Große Zahlen aus Vektoren ausklammern, so das in den Vektoren nur ganze, möglichst kleine Zahlen enthalten sind.
- Um aus $\tilde{a}_k$ $\tilde{b}_k$ zu erstellen, können die ausgeklammerten Werte vor $\tilde{a}_k$ weggelassen werde, da diese sich durchs Renormieren ohnehin herauskürzen würden.

Geometrisch wird der die Richtung des 1. Vektors übernommen, und von allen weiteren Vektoren deren Komponenten in Richtung von bereits erzeugten Basis-Vektoren abgezogen, so das nur deren neuer Richtungsanteil übrig bleibt, welcher letztendlich dann als Richtung für den zusätzlichen Basis-Vektor genommen wird.

18.5 Lineare Abbildungen I.183

$\mathbb{V}$(Quellraum) und $\mathbb{W}$(Zielraum) seien Vektorräume über demselben skalaren Körper $\mathbb{K}$. Die *Abbildung* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ heißt linear, wenn für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

Additivität $f\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = f(\vec{a}) + f\left(\vec{b}\right)$

Homogenität $f(\lambda\vec{a}) = \lambda f(\vec{a})$

Eine Lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen wird auch als *Homomorphismus* bezeichnet.

- $f\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\right) = \lambda f(\vec{a}) + \mu f\left(\vec{b}\right)$
- $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\vec{a}_k)$
- integrieren und differenzieren von Polynomen sind lineare Abbildungen

18.5.1 Bild und Kern I.184

Sei $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineare Abbildung.

Bild $\mathrm{Bild}(f) := \{f(\vec{a}) \,|\, \vec{a} \in \mathbb{V}\} \subseteq \mathbb{W}$

Kern $\mathrm{Kern}(f) := \left\{\vec{a} \in \mathbb{V} | f(\vec{a}) = \vec{0}\right\} \subseteq \mathbb{V}$

- $\mathrm{Bild}(f)$ ist Untervektorraum von $\mathbb{W}$
- $\mathrm{Kern}(f)$ ist Untervektorraum von $\mathbb{V}$
- $\dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathrm{Kern}(f))$
- $\mathrm{Rang}(M(f)) = \dim(\mathrm{Bild}(f))$

18.5.2 Injektiv / Surjektiv I.184

Eine Abbildung $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ heißt *injektiv*, falls

$$f(\vec{a}) = f\left(\vec{b}\right) \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$$

Bei linearen f gilt weiter:

- f ist injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \left\{\vec{0}\right\}$
- f ist surjektiv $\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathbb{W})$

18.5.3 Lineare Abbildung durch Bilder der Basis I.184

Um eine lineare Abbildung f festzulegen genügt es die Bilder $\left\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\right\}$ der Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ zu kennen, für $\vec{b}_k = f(\vec{a}_k)$ $1 \le k \le n$.

Sei $\vec{a} \in \mathbb{V}$ und $\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$ für geeignete $\lambda_k \in \mathbb{K}$ gilt

$$f(\vec{a}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{b}_k$$

18.5.4 Koordinatenschreibweise linearer Abbildungen I.188

Seien α_k $(1 \le k \le n)$ die Koordinaten von $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ von $\mathbb{V}$. Außerdem beschreibt β_{kj} die Umrechnungskoordinaten von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$ $f(\vec{a}_j) = \sum_{k=1}^{m} \beta_{kj} \vec{b}_k$ ($\left\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\right\}$ ist Basis von $\mathbb{W}$). Dann gilt:

$$f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_{mj} \end{pmatrix}$$

19 Matrizen I.190

Eine $m \times n$-Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten. Man schreibt

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= (a_{jk})\ \begin{matrix} j = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n \end{matrix} \end{aligned}$$

dabei steht a_{jk} in der j-ten Zeile, und der k-ten Spalte.

19.0.5 Zeilen- und Spaltenvektor I.191

Einem $m \times n$-Matrix hat m Zeilenvektoren (aus der j-ten Zeile):

$$\vec{z}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$$

und n Spaltenvektoren (aus der k-ten Spalte):

$$\vec{s}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

- Zeilenvektoren können als eine $1 \times n$-Matrix angesehen werden
- Spaltenvektoren können als eine $m \times 1$-Matrix angesehen werden

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ bildet zusammen mit der Addition und der Skalarmultiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ der Dimension $m \cdot n$.

19.1 Rechenoperationen mit Matrizen I.190

19.1.1 Addition I.195

Die Addition erfolgt Elementenweise
(mit $j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n$):

$$(a_{jk}) + (b_{jk}) = (a_{jk} + b_{jk})$$

19.1.2 Skalarmultiplikation I.195

Jedes Element wird einzeln Multipliziert
(mit $j = 1, \ldots, m \quad k = 1, \ldots, n$):

$$\lambda \left(a_{jk}\right) = \left(\lambda a_{jk}\right)$$

19.1.3 Kanonische Basis

Die Kanonische Basis zu einem Vektorraum aller $m \times n$-Matrizen besteht aus allen (verschiedenen) $m \times n$-Matrizen die jeweils nur eine 1 und sonst nur 0-en enthalten. Es gibt $m \cdot n$ solcher Basen.

19.1.4 Transponierte Matrix I.192

Die $m \times n$-Matrix A ist wie folgt definiert

$$A = \left(a_{jk}\right)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}$$

dann heißt die $n \times m$-Matrix

$$A^T = \left(a_{kj}\right)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}$$

die zu A transponierte Matrix.

- Transponieren vertauscht die Elemente bezüglich der Hauptdiagonalen (von Links oben, nach Rechts unten)
- $\left(A^T\right)^T = A$
- Transponieren ist eine lineare Abbildung, es gilt die

  Additivität $(A + B)^T = A^T + B^T$

  Homogenität $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$

19.1.5 (Anti-) Symmetrische Matrix

Alle (Anti-)Symmetrische Matrizen sind quadratische Matrizen. Das bedeutet, das sie die gleiche Anzahl an Spalten und Zeilen haben ($n \times n$-Matrix).

symmetrische Matrix $A^T = A$

- Lässt sich auf der Hauptdiagonalen spiegeln, ohne das sie sich ändert

antisymmetrische Matrix $A^T = -A$

- Hat auf der Hauptdiagonalen nur 0en.
- Ist auf der Hauptdiagonalen mit vertauschten Vorzeichen gespiegelt.

symmetrischer Teil $A_s = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$

antisymmetrischer Teil $A_{as} = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$

- $A = A_s + A_{as}$

19.1.6 Matrixprodukt I.197

Sei $A = \left(a_{jk}\right)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}$ eine $m \times n$-Matrix und $B = \left(b_{kl}\right)_{\substack{k=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots,p}}$ eine $n \times p$-Matrix. Die $m \times p$-Matrix

$$\begin{aligned} A\,B &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kl}\right)_{\substack{j=1\ldots m \\ l=1\ldots p}} \\ &= \left(\begin{pmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{ml} \end{pmatrix}\right)_{\substack{j=1\ldots m \\ l=1\ldots p}} \end{aligned}$$

heißt Produktmatrix (Produkt aus A und B).

- An Position (j, l) steht das Skalarprodukt des j-ten Zeilenvektors (der linken Matrix), mit dem l-ten Spaltenvektor (der 2ten Matrix)
- Skalarprodukt von 2 Vektoren ist Sonderfall des Matrixproduktes
- Produkt entspricht der Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen
- Nur Definiert, wenn Spaltenanzahl der 1. Matrix = Zeilenanzahl der 2. Matrix

A, B, C seien Matrizen, so dass die folgenden Produkte definiert sind

- Assoziativgesetz
  $(AB)\,C = A\,(BC)$
- Distributivgesetz
  $A\,(B + C) = AB + AC$
  $(A + B)\,C = AC + BC$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- im allgemeinen:
  $AB \neq BA$
- $AE = A$ (mit $E =$ Einheitsmatrix)
- *nilpotent* heißt eine Matrix, wenn
  $A^2 = (0)=$ Nullmatrix
- Die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit den Rechengesetzen zusammen bildet einen *Ring*. Keinen Körper, da das inverse Element der Muliplikation im allgemeinen nicht Existiert.

19.1.7 Nullmatrix

Eine Matrix die ausschließlich mit Nullen aufgefüllt ist, nennt sich Nullmatrix, und hat den Rang 0.

19.1.8 Einheitsmatrix I.200

Eine $n \times n$-Matrix die 1en auf der Hauptdiagonale, und sonst nur Nullen hat, heißt Einheitsmatix. Sie ist das neutrales Element der Multiplikation.

$$E = (\delta_{ik})_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19.2 Rang einer Matrix I.200

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren einer Matrix heißt Zeilenrang, die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren heißt Spaltenrang.

- Dimension der linearen Hülle der Zeilenvektoren Zeilenrang $= \dim(\langle \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m \rangle)$
- Dimension der linearen Hülle der Spaltenvektoren Spaltenrang $= \dim(\langle \vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n \rangle)$
- Der Spalten- und Zeilenrang sind immer gleich
- Der Rang einer Matrix ist gleich dem Spalten- bzw. Zeilenrang

19.2.1 Zeilen-/Spaltenoperationen I.201

Durch folgende Operationen in einer Matrix wird deren Rang nicht beeinflusst.

1. Multiplikation einer Zeile bzw. Spalte mit einem Skalar$\neq 0$
2. Vertauschen von Zwei Zeile bzw. Spalten
3. Zu einer Zeile bzw. Spalte ein Vielfaches einer anderen Zeile bzw. Spalte hinzuaddieren

19.3 Lineare Abbildungen und Matrizen I.213

19.3.1 Menge aller linearen Abbildungen I.214

Sei $L(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ die Menge aller lin. Abbildungen von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$.

- $\dim \mathbb{V} = n \wedge \dim \mathbb{W} = m \Rightarrow \dim L(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = nm$

19.3.2 Zuordnung Matrix $\Leftrightarrow$ Lin. Abbildung I.214

Sei $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ eine Basis von $\mathbb{V}$ und $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ eine Basis von $\mathbb{W}$. Für jede lin. Abbildung $f \in L(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ lässt sich nun eine $m \times n$ Matrix zuordnen. Sei

$$f(\vec{a}_j) = \sum_{k=1}^{m} \beta_{kj} \vec{b}_k \quad (j = 1, \dots, n)$$

dann hat die Matrix folgende Gestalt

$$\begin{aligned} M(f) &= \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(\vec{a}_1) & \dots & f(\vec{a}_n) \end{pmatrix} \\ &= (\beta_{kj})_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \end{aligned}$$

Sei $\vec{x} \in \mathbb{V}$ ein Koordinatenvektor bezüglich der oben gewählten Basis.

$$M(f)\vec{x} = f(\vec{x})$$

- Achtung, Reihenfolge der Muliplikation entscheidend!
- $\text{Rang}(M(f)) = \dim(\text{Bild}(f))$

19.3.3 Verkettung von lin. Abbildungen I.216

Die Matrix der Hintereinanderausführung zweier lin. Abbildungen $f \in L(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ und $g \in L(\mathbb{W}, \mathbb{U})$ ist $M(g \circ f) = M(g) M(f) = M(g(f))$

19.3.4 Inverse Matrix I.216

Sei $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ linear, $\dim \mathbb{V} = n$ mit $\dim \text{Bild}(f) = n = \dim \mathbb{V}$ (f ist injektiv). Dann muss eine Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ mit $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{V}} = f \circ f^{-1}$ existieren.

Sei $A = M(f), A^{-1} = M(f^{-1})$ dann folgt $AA^{-1} = M(id_{\mathbb{V}}) = E = A^{-1}A$. A^{-1} heißt die zu A inverse Matrix.

- E ist das neutrale Element der Multiplikation
- Nur reguläre Matrizen besitzen eine inverse Matrix
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

19.3.5 Reguläre Matrix I.217

Eine Quadratische Matrix mit maximalen Rang (Rang=Spalten-/Zeilenanzahl) heißt heißt reguläre Matrix.

- Nur reguläre Matrizen besitzen eine inverse Matrix

20 Lineare Gleichungssysteme I.220

Sei $A = (a_{jk})_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ eine $m \times n$-Matrix mit Elementen aus $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $b_k \in \mathbb{K}, k = 1, \dots, m$.

Das System

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

heißt lineares Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten.

Jedes n-Tupel (Vektor) $(x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{K}$, das alle Gleichungen löst, heißt Lösung des Systems. Die Gesamtheit aller Lösungen heißt Lösungsraum.

20.1 Der Lösungsraum I.220

20.1.1 Dimension I.221

Der Lösungsraum des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$ mit einer $m \times n$-Matrix A, stellt einen Untervektorraum der Dimension $n - \text{Rang}(A)$ von $\mathbb{K}^n$ dar.

- Jedes homogene Gleichungssystem ist lösbar
- Ist A quadratisch und regulär, so hat der Lösungsraum die Dimension 0, besteht also nur aus dem Nullvektor $\vec{0}$.

20.1.2 Erweiterte Matrix I.224

Die $m \times (n+1)$-Matrix $\left(A|\vec{b}\right)$ heißt erweiterte Matrix des LGS.

20.1.3 Rangkriterium I.224

Das inhomogene LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, falls $\text{Rang}(A) = \text{Rang}\left(A|\vec{b}\right)$

- Wenn A quadratisch und regulär ist auch inhomogenes System lösbar, mit einer eindeutigen Lösung.
- Allgemeiner Fall: Sei $\vec{x}_0$ eine feste Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ und $\vec{y}$ eine Lösung des Systems $A\vec{y} = \vec{0}$. Dann ist $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}$ eine beliebige Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

20.1.4 Basiswechsel

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ mit der Abbildungsmatrize $M_{alt}(f)$ ist mit $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = A$ als Basis von $\mathbb{V}$ und $\left(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\right) = B$ als Basis von $\mathbb{W}$ gegeben. Um sie nun in die neuen Basen $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n) = C$ von $\mathbb{V}$ und $\left(\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_n\right) = D$ und von $\mathbb{W}$ zu überführen, wende folgende Gleichung an.

$$M_{neu}(f) = D^{-1} B M_{alt}(f) \ A^{-1} C$$

- Für den Sonderfall das $A, B = E_n$ und $C = D$ gilt:
  $M_{neu}(f) = C^{-1} M_{alt}(f) C$
- Für weiteres siehe 18.3.2 auf Seite 35

20.2 Lösen mittels Inversen

Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat als Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

20.3 Der Gaußsche Algorithmus I.227

Da Zeilenoperationen (Tauschen / Multiplizieren / Addieren) in der erweiterten Matrix $\left(A|\vec{b}\right)$ eines linearen Gleichungssystems $\left(A\vec{x} = \vec{b}\right)$ den Lösungsraum nicht verändern, lassen diese sich zum Lösen des Gleichungssystems verwenden. Man kann dabei nach dem folgenden (Gaußschen) Algorithmus vorgehen:

1. Vertausche Zeilen so, das oben Links etwas von 0 verschiedenes steht ($a_{11} \neq 0$). Falls erste Spalte $= \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1$ beliebig, streichen der 1. Spalte
2. Räume Spalte unterhalb von a_{11}aus, durch Addition von $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$(1. Zeile) auf j-te Zeile ($1 \leq j \leq m$)
3. Wenn die akt. Untermatrix mehr als 1. Zeile hat, betrachte Untermatrix, in der die 1.Spalte und die 1.Zeile fehlen, und mache bei 1. weiter.
4. Testen der Rangbedingung für Lösbarkeit. Wenn $\text{Rang}\left(A|\vec{b}\right) = \text{Rang}(A)$ ist es wie folgt lösbar
5. Löse LGS von unten nach Oben auf $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$
6. Unbekannte zugehörig zu den Nullspalten können frei gewählt werden.
7. Unbekannte zu den Nullzeiten werden als Parameter gewählt

20.3.1 Bestimmen der Inversen Matrize mittels Gauß-Algorithmus

Man führe den Gauß-Algorithmus für die Matrix $(A|\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ aus. Dabei muss das System mittels Zeilenoperationen in die Gestalt $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n|A^{-1}\right)$ gebracht werden. Auf der Rechten Seite lässt sich nun die Inverse Matrix ablesen.

Es ist auch möglich, *ausschließlich* mit Spalten Operationen anstatt Zeilenoperationen zu arbeiten.

21 Determinanten I.241

21.1 Definitionen

21.1.1 Permutation / Transposition I.241

Eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ heißt Permutation der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ wird mit S_n bezeichnet.

Mit t_{ik} bezeichnen wir die Permutation

$$t_{ik}(i) = k, t_{ik}(k) = i, \forall j \neq i, k : t_{ik}(j) = j$$

eine Transposition (vertauschen zweier Elemente).

Notation für Permutation:

Urbild	1	2	...	$n-1$	n
Bild	$\pi(1)$	$\pi(2)$	...	$\pi(n-1)$	$\pi(n)$

- $|S_n| = n!$
- jede Permutation kann als Hintereinanderausführung von Transpositionen geschrieben werden

21.1.2 Fehlstand / Signum I.242

Sei $\pi \in S_n$. Gilt $\pi(i) > \pi(j)$ für zwei Zahlen $1 \leq i < j \leq n$, so heißt das Paar (i, j) *Fehlstand* von π.

π heißt *gerade (ungerade)*, falls π eine gerade (ungerade) Anzahl von Fehlstellen hat.

Das *Signum* von πist

$$\operatorname{sign}(\pi) := \begin{cases} 1 & \pi \text{ gerade} \\ -1 & \pi \text{ ungerade} \end{cases}$$

- eine gerade (ungerade) Permutation kann nur durch eine gerade (ungerade) Anzahl von hintereinander ausgeführten Transpositionen dargestellt werden.
- $\operatorname{sign}(\pi_1 \circ \pi_2) = \operatorname{sign}(\pi_1) \operatorname{sign}(\pi_2)$
- $\operatorname{sign}\left(\pi^{-1}\right) = \operatorname{sign}(\pi)$

21.1.3 Determinante I.244

Sei $A = (a_{j,k})$ eine $n \times n$-Matrix mit Elementen aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \left(\operatorname{sign}(\pi) \prod_{k=1}^{n} \left(a_{n,\pi(n)}\right) \right)$$

Determinante von A (Definition nach Leibnitz Formel) mit folgender Schreibweise:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- $n = 2$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
- $n = 3$ (Regel von Sarrus)
Man schreibe die Linke und Mittlere Spalte Rechts noch einmal daneben. Die 3 Diagonalen von Linksoben nach Rechtsunten werden nun multipliziert und mit positiven Vorzeichen addiert. Die 3 Diagonalen von Rechtsoben nach Linksunten mit werden nun multipliziert und mit negativen Vorzeichen dazuaddiert.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$
- Da Berechnungsformel in $\mathbb{R}^3$ dem Spatprodukt entspricht, bezeichnet man die Determinante auch mit *Volumenform*.
- bei größeren n macht es keinen Sinn geschlossene Ausdrücke Anzugeben, da die Anzahl der Terme mit $n!$ wächst.
- Bei Matrizen in Dreiecksgestalt (Ober- oder Unterhalb der Hauptdiagonale nur 0en) ist
$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$$
- $\det(A) = \det\left(A^T\right)$
- $\det(AB) = \det(A) \det B$
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(E) = 1$
- bei komplexkonjungierten Zahlen:
$\overline{\det(A)} = \det\left(\bar{A}\right)$

21.1.4 Verhalten von Determinante bei Zeilen- und Spaltenoperationen I.246

Schreiben $A = (\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n)$ ($\vec{s}_i$ Spaltenvektor). Die Determinante stellt eine *alternierende Multilinearform* dar.

- det ist in jedem Argument linear:
$\det(\vec{s}_1, \ldots, \lambda\vec{s}_i + \mu\vec{s}'_i, \ldots, \vec{s}_n) =$
$\lambda \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_n) +$
$\mu \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}'_i, \ldots, \vec{s}_n)$
für jeden Index $1 \leq i \leq n$
- det ist alternierend:
$\det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_k, \ldots, \vec{s}_n) =$
$-\det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_k, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_n)$
für $1 \leq (i \neq k) \leq n$

Analog gelten diese Aussagen auch für Zeilenoperationen.

21.1.5 Gaußalgorithmus für Determinanten

Der Algorithmus erfolgt hier wie bei der Bestimmung von Rängen. Ziel ist es die Determinante in eine Dreiecksgestalt zu bringen. Dann entspricht die Determinante dem Produkt der Hauptdiagonale. Allerdings ist Folgendes zu berücksichtigen:

- Zeilen- und Spaltenoperationen erlaubt, ändern aber zum Teil (berechenbar) den Wert der Determinante.
- Hat A zwei gleiche Spalten (Zeilen), so ist $\det A = 0$
- Addition mit einem Vielfachen einer anderen Spalte (Zeile) $\Rightarrow$ unverändert:
  $\det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i + \mu\vec{s}_k, \dots, \vec{s}_n) =$
  $\det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n)$ wenn $i \neq k$
- Multiplikation einer Spalte (Zeile) mit $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ $\det A$ mit λ multiplizieren:
  $\det(\vec{s}_1, \dots, \lambda\vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n) =$
  $\lambda \det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n)$
- Vertauschen zweier Spalten (Zeilen) ändert Vorzeichen von $\det A$:
  $\det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_k, \dots, \vec{s}_n) =$
  $-\det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n)$

21.1.6 Determinante und Rang I.248

Der Rang einer $n \times n$-Matrix A ist genau dann gleich n (A ist regulär), wenn $\det A \neq 0$ ist.

$$\operatorname{Rang}(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

21.2 Entwicklung nach einer Zeile/Spalte I.250

21.2.1 Adjunkte I.256

Sei $A = (a_{jk})$ eine $n \times n$-Matrix. Durch Streichen der j-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix.

$$B_{jk} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & .. & a_{1,k-1} & a_{a,k+1} & .. & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & .. & a_{j-1,k-1} & a_{j-1,k+1} & .. & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & .. & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,k+1} & .. & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & .. & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & .. & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$A_{jk} := (-1)^{j+k} \det B_{jk}$ heißt *Adjunkte* des Eintrages a_{jk}.

21.2.2 Entwickeln nach einer Zeile oder Spalte I.256

Sei $A = (a_{jk})$ eine $n \times n$-Matrix. Dann gilt

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} \text{ Entw. nach } j\text{−ter Zeile}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jk} \text{ Entw. nach } k\text{−ter Spalte}$$

- Am besten nach Spalte (Zeile) mit sehr vielen 0-en entwickeln
- Evtl. auch mischen mit Gauß Algorithmus

21.2.3 Vandermonde-Matrix I.258

Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

$$V(x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

heißt *Vandermonde-Matrix* in $x_1, \dots, x_n$. Es gilt

$$\det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k)$$

21.3 Die Cramersche Regel I.259

21.3.1 Inverse Matrix I.259

Sei $A = (a_{jk})$ eine $n \times n$-Matrix mit $\det A \neq 0$. Dann hat die inverse Matrix die Gestalt:

$$A^{-1} = \left(a_{jk}^{(-1)}\right) = \left(\frac{A_{kj}}{\det A}\right)$$

- A_{kj}ist Adjunkte Matrix (Achtung: Indizes vertauscht (Transponiert))

21.3.2 Carmersche Regel I.261

Sei $A = (a_{jk})$ eine reguläre $n \times n$-Matrix. Dann hat das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ gegeben durch

$$x_k =$$

$$\frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Teile die Determinante von A mit $\vec{b}$ in der k-ten Spalte durch die Determinante von A und du erhältst die Lösung für x_k

22 Eigenwerte I.266

22.1 Charakteristisches Polynom I.266

22.1.1 Definition I.266

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, und E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix. Das Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

heißt *charakteristisches Polynom* von A.

- Satz von Cayley-Hamilton
  $\chi_A(A) = 0$

22.1.2 Ähnliche Matrix I.269

Zwei $n \times n$-Matrizen $A, \tilde{A}$ heißen *ähnlich*, wenn es eine reguläre $n \times n$-Matrize B gibt mit

$$\tilde{A} = B^{-1}AB \text{ bzw. } B\tilde{A} = AB$$

- $\chi_{B^{-1}AB}(\lambda) = \chi_A(\lambda)$
- $\chi_{A^T}(\lambda) = \chi_A(\lambda)$

22.2 Eigenvektoren I.272

22.2.1 Definition I.272

Ist λ_0 eine Nullstelle von $\chi_A(\lambda_0) = 0 = \det(A - \lambda_0 E_n)$. Dann hat das LGS $(A - \lambda_0 E_n)\vec{u} = \vec{0}$ mindestens eine nicht triviale Lösung.

$$(A - \lambda_0 E_n)\vec{u} = \vec{0} \text{ bzw. } A\vec{u} = \lambda_0 \vec{u}$$

heißt *Eigengleichung* von A.

Jede Nullstelle λ_0 heißt *Eigenwert* der Matrix A.

Jeder Vektor $\vec{u} \in K^n, \vec{u} \neq \vec{0}$ heißt *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ_0.

Der gesamte Lösungsraum von $(A - \lambda_0 E_n)\vec{u} = \vec{0}$ heißt *Eigenraum* zum Eigenwert λ_0 (= Kern der Matrix $A - \lambda_0 E_n$).

- A positiv (negativ) definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von A positiv (negativ) sind
- A indefinit $\Leftrightarrow$ Es gibt sowohl positive, als auch negative Eigenwerte von A
- Eigenvektoren sind nicht eindeutig. Sie können durch lin. abhängige ersetzt werden

22.2.2 Vielfachheit I.275

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit charakteristischem Polynom $\chi_A(\lambda)$. Sei λ_0 eine Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$ der Vielfachheit k_0. Dann heißt k_0 die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_0.

Der Eigenraum des Eigenwertes λ_0 habe die Dimension m_0. Dann heißt m_0 die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_0.

- $1 \leq m_0 \leq k_0 \leq n$
- Wenn $\forall$ EW $\lambda_i : k_i = m_i \Leftrightarrow$
  A ist *diagonalähnlich* / A ist ähnlich zu ($B^{-1}AB = \tilde{A}$ mit $B = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$, $\vec{v}_i$ Eigenvektor von A) zu
  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

22.2.3 Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren I.276

Sei A eine $n \times n$-Matrix und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von A. Zu jedem EW λ_j gehöre genau ein Eigenvektor $\vec{u}_j$. Dann sind die Eigenvektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ linear unabhängig.

22.3 Hermitesche und unitäre Matrizen I.284

22.3.1 Orthogonale Abbildung I.285

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *orthogonal*, wenn sie das Skalarprodukt unverändert lässt, also

$$\forall_{\mathbb{R}^n}^{\vec{v},\vec{w}} : f(\vec{v})^T f(\vec{w}) = \vec{v}^T \vec{w}$$

- f orthogonal $\Leftrightarrow$ f längen- und winkeltreu (bleiben unverändert nach Abbildung)
- Sei A die zu f gehörende Matrix:
  - Alle *reellen* Eigenwerte von A sind 1 oder -1. (zuzüglich den Komplexen)
  - ist λ Eigenwert von A, so ist auch $\bar{\lambda}$ Eigenwert von A
  - f ist orthogonal $\Leftrightarrow A^T A = E$ bzw. $A^{-1} = A^T$
  - siehe für weitere Eigenschaften unter 22.3.2 auf der nächsten Seite.
- Alle orthogonalen Abbildungen in $\mathbb{R}^2$ sind entweder Drehungen oder Spiegelungen.

22.3.2 Unitäre Matrizen I.284

Eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ heißt *unitär*, wenn $A^{-1} = \bar{A}^T$.

- Liegen alle Einträge in $\mathbb{R}$, so gilt A orthogonal ($A^{-1} = A^T$)
- Zeilenvektoren und Spaltenvektoren von A bilden jeweils ein Orthonormalsystem.
- $|\det A| = 1$
- Für alle Eigenwerte λ von A gilt $|\lambda| = 1$.
- Die Eigenvektoren zu zwei unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander, also $\vec{u}_1^T \vec{u}_2 = 0$.

22.3.3 Hermitesche Matrizen I.284

Eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ heißt *hermitesch*, wenn $A = \bar{A}^T$.

- Liegen alle Einträge in $\mathbb{R}$, so ist A symmetrisch ($A = A^T$)
- Alle Eigenwerte von A sind reell
- Die Eigenvektoren zu zwei unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander, also $\vec{u}_1^T \vec{u}_2 = 0$.
- Für jeden Eigenwert stimmen geometrische und die algebraische Vielfachheit überein.
- A ist diagonalähnlich
- Zu jeder hermiteschen (symmetrischen) Matrix A gibt es eine unitäre (orthogonale) Matrix B, mit der A in eine reelle Diagonalmatrix D überführt werden kann.
  $\bar{B}^T AB = B^{-1}AB = D$

23 Drehung im $\mathbb{R}^2$ und Quadriken

23.1 Gebilde

23.1.1 Ellipse

Ortslinie aller Punkte, die von zwei vorgegebenen Punkten (*Brennpunkten*) feste Abstandssumme haben. Die Normalform der Ellipsengleichng lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- a, b nennen sich *Halbachsen* (Schnittpunkt der Ellipse mit den Koordinatenachsen)
- $c^2 = a^2 - b^2$
- Brennpunkte in $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$
- *Exzentrizität* von einer Ellipse $\varepsilon := \frac{c}{a} \in [0, 1)$
- Spezialfall $a = b \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow$Kreis mit Radius a
- keine Asymptoten
- Entsteht z.B. durch Kegelschnitt mit Schnittebene die nur einen der beiden Kegel schneidet.

23.1.2 Parabel

Ortslinie aller Punkte, die von einem vorgegebenen Punkt C (Brennpunkt) selben Abstand wie von einer vorgegebenen Geraden g haben.

$$y = \frac{x^2}{4c}$$

- Scheitel der Parabel (Extremstelle) bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Brennpunkt bei $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$
- *Exzentrizität* von einer Parabel $\varepsilon := 1$
- keine Asymptoten
- Entsteht z.B. durch Kegelschnitt mit Schnittebene parallel zu Kegelkanten

23.1.3 Hyperbel

Ortslinie aller Punkte die zu zwei vorgegebenen Punkten (Brennpunkte) festen Betrag der Abstandsdifferenz haben.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- diese Formel für Hyperbel die nach links/rechts geöffnet ist
- a Schnitt der Hyperbelzweige mit der x-Achse
- $c^2 = a^2 + b^2$
- Brennpunkte bei $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$
- *Exzentrizität* von einer Hyperbel $\varepsilon := \frac{c}{a} > 1$
- nach oben/unten geöffnet mit $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- *Asymptoten* $y = \pm \frac{b}{a} x$
- Entsteht z.B. durch Kegelschnitt mit Schnittebene die durch oberen und unteren Kegel geht

23.1.4 Drehung in $\mathbb{R}^2$

Ein Punkt $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich mit Hilfe der Matrize $D(\alpha)$ um den Winkel a drehen. $\vec{b}_{neu} = D(\alpha)\,\vec{b}$

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- $D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha)$
- Eigenwerte von $D(\alpha)$:
  $\lambda_{1/2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha} \in \mathbb{C}$
- ist eine orthogonale Abbildung

23.1.5 Spiegelung in $\mathbb{R}^2$

Ein Punkt $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich mit Hilfe der Matrize $S(\alpha)$ um eine Gerade die den Winkel a zur x Achse einnimmt spiegeln. $\vec{b}_{neu} = S(\alpha)\,\vec{b}$

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

- ist eine orthogonale Abbildung

23.2 Überführen von allgemeine Quadriken in Normalform

23.2.1 Allgemeine Quadrik

Eine Gleichung der Form

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ist eine Quadrik in allgemeiner Form.

23.2.2 Drehen

Gegeben ist eine Quadrik in allgemeiner Form. Diese lässt dich nun so drehen, das der gemischte Term (Bxy) verschwindet, die Gleichung also die Form

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0$$

mit $\bar{B} = 0$ hat. Hierzu wird mit dem Winkel

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\arctan\left(\frac{B}{C-A}\right)}{2} \\
\bar{A} &= A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha \\
\bar{B} &= 0 \\
\bar{C} &= C\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + A\sin^2\alpha \\
\bar{D} &= D\cos\alpha - E\sin\alpha \\
\bar{E} &= E\cos\alpha + D\sin\alpha \\
\bar{F} &= F
\end{aligned}$$

gedreht.

- $B^2 - 4AC = \bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C} = d$ bleibt unberührt von der Drehung.

23.2.3 Identifizieren des Typs

mit $d = B^2 - 4AC = -4\bar{A}\bar{C}$

Ellipse $d < 0$

Parabel $d = 0$

Hyperbel $d > 0$

23.2.4 Verschieben in Ursprung

Gegeben ist eine Quadrik in der Form:

$$\bar{A}x^2 + \bar{C}y^2 + \bar{D}x + \bar{E}y + \bar{F} = 0$$

Bei dieser wurde also bereits der gemischte Term "weggedreht".

Hyperbel, Ellipse falls $\bar{A}, \bar{C} \neq 0$:

$$\frac{\bar{A}}{G}\tilde{x}^2 + \frac{\bar{C}}{G}\tilde{y}^2 = 1$$

- $G = \frac{\bar{D}^2}{4\bar{A}} + \frac{\bar{E}^2}{4\bar{C}} - \bar{F}$
- $\tilde{x} \mapsto x + \frac{\bar{D}}{2\bar{A}}$
- $\tilde{y} \mapsto y + \frac{\bar{E}}{2\bar{C}}$

Parabel falls $\bar{A} \neq 0, \bar{C} = 0$:

$$\tilde{y} = -\frac{\bar{A}}{\bar{E}}\tilde{x}^2$$

- $\tilde{x} \mapsto x + \frac{\bar{D}}{2\bar{A}}$
- $\tilde{y} \mapsto y + \frac{\bar{F}}{\bar{E}} - \frac{\bar{D}^2}{4\bar{A}\bar{E}}$

Parabel falls $\bar{A} = 0, \bar{C} \neq 0$:

$$\tilde{x} = -\frac{\bar{C}}{\bar{D}}\tilde{y}^2$$

- $\tilde{y} \mapsto y + \frac{\bar{E}}{2\bar{C}}$
- $\tilde{x} \mapsto x + \frac{\bar{F}}{\bar{D}} - \frac{\bar{E}^2}{4\bar{C}\bar{D}}$

Gerade falls $\bar{A}, \bar{C} = 0$:

$$y = -\frac{\bar{D}}{\bar{E}}x - \frac{\bar{F}}{\bar{E}}$$

Index