

Formelsammlung

Mathe I/II für Informatiker & E-Techniker

<Marco.Moeller@macrolab.de>

Stand: 27.05.2005 - Version: 1.0.1

ERHÄLTlich UNTER [HTTP://PRIVAT.MACROLAB.DE](http://privat.macrolab.de)

Diese Formelsammlung basiert auf der Vorlesung “Mathematik 1/2 für Elektrotechniker” von Prof. Dr. Gunter Malle an der Universität Kassel im Wintersemester 2003/04 und Sommersemester 2004.

Die folgende Formelsammlung steht zum kostenlosen Download zur Verfügung. Das Urheberrecht und sonstige Rechte an dem Text verbleiben beim Verfasser, der keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit der Inhalte übernehmen kann.

Inhaltsverzeichnis

<p>1 Begriffe 6</p> <p>1.1 Logik 6</p> <p> 1.1.1 Verknüpfungen 6</p> <p> 1.1.2 Rechenregeln 6</p> <p> 1.1.3 Quantoren 6</p> <p> 1.1.4 Eigenschaften von Aussagen 6</p> <p>1.2 Abbildungen 6</p> <p> 1.2.1 injektiv 6</p> <p> 1.2.2 surjektiv 7</p> <p> 1.2.3 bijektiv 7</p> <p>2 Mengen 7</p> <p>2.1 Beschreibung 7</p> <p>2.2 Standardmengen 7</p> <p>2.3 Intervalle 7</p> <p>2.4 Operationen 7</p> <p>2.5 Rechenregeln 7</p> <p>2.6 Schranken I.29 8</p> <p>2.7 Häufungspunkt I.33 8</p> <p>2.8 Ordnungsregeln 8</p> <p> 2.8.1 Eigenschaften von Relationen 8</p> <p> 2.8.2 Typen von Relationen 8</p> <p>2.9 Körper 8</p>	<p>2.9.1 Addition 8</p> <p>2.9.2 Multiplikation 8</p> <p>2.9.3 Distributivgesetz 9</p> <p>2.10 Angeordnete Körper 9</p> <p>3 Beweisverfahren 9</p> <p>3.1 direkter Beweis 9</p> <p>3.2 indirekter Beweis 9</p> <p>3.3 Kontraposition 9</p> <p>3.4 Vollständige Induktion I.33 9</p> <p>4 Rechenregeln 9</p> <p>4.1 Summen I.13 9</p> <p>4.2 Ungleichungen 9</p> <p>4.3 Fakultät I.38 9</p> <p>4.4 Binomialkoeffizient I.39 9</p> <p>5 Trigonometrie 10</p> <p>6 Komplexe Zahlen I.44 10</p> <p>6.1 Definition 10</p> <p> 6.1.1 Rechenregeln I.45 10</p> <p>6.2 Komplex Konjugierte Zahl I.53 10</p> <p>6.3 Betrag einer Komplexen Zahl I.58 10</p> <p>6.4 Polarkoordinaten I.60 10</p> <p>6.5 Fundamentalsatz der Algebra I.71 11</p> <p>6.6 Vietascher Wurzelsatz I.72 11</p> <p>7 Folgen II.3 11</p> <p>7.1 Monotonie II.6 11</p> <p>7.2 Teilfolge II.6 11</p> <p>7.3 Konvergenz II.8 11</p> <p>7.4 Nullfolge II.11 11</p> <p>7.5 Konvergenzkriterien 11</p>
---	--

7.5.1	Teilfolgen	11	9.4.2	Konvergenzradius II.186	15
7.5.2	Sandwichtheorem II.15	12	9.4.3	Integrieren / Differenzieren II.190	15
7.5.3	Monotonie / beschränkt II.16	12	9.4.4	Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen II.191	15
7.5.4	Cauchy-Folge II.20	12	9.5	wichtige Reihen II.154 / II.192	15
7.5.5	Häufungspunkt	12			
7.6	Grenzwert Rechenregeln II.14	12	10 Funktionen I.116		16
7.6.1	Unbestimmte Formen	12	10.1	Definition I.116	16
8 Reihen II.22		12	10.2	Stetige Funktionen II.38	16
8.1	Konvergenz II.22	12	10.2.1	Kriterien für Stetigkeit	16
8.1.1	Sätze über Konvergente Reihen	12	10.3	Sätze über stetige Funktionen	16
8.2	absolut / bedingt konvergent II.163	12	10.3.1	Hauptsätze II.41	16
8.2.1	Doppelreihe II.167	12	10.3.2	Verkettung II.42	16
8.2.2	Umordnung II.164	13	10.3.3	Umkehrfunktion II.43	16
8.2.3	Großer Umordnungssatz II.167	13	10.3.4	Min-/Maximum II.43	17
8.2.4	Produkt von Reihen II.165	13	10.3.5	Zwischenwertsatz II.44	17
8.2.5	Cauchy-Produkt II.166	13	10.3.6	gerade / ungerade Funktionen	17
8.3	Konvergenzkriterien II.168	13	10.4	Grenzwert von Funktionen	17
8.3.1	Majoranten- oder Vergleichskriterium II.168	13	10.4.1	Definition II.46	17
8.3.2	Quotientenkriterium II.169	13	10.4.2	Linksseitiger Grenzwert II.46	17
8.3.3	Wurzelkriterium II.171	13	10.4.3	Rechtsseitiger Grenzwert II.47	17
8.3.4	Leibnizsches Kriterium II.174	13	10.4.4	Grenzwert im Punkt II.47	17
8.3.5	Integralkriterium II.175	14	10.4.5	Grenzwert im Unendlichen II.49	17
8.4	Besondere Reihen	14	10.4.6	Sprungstelle II.50	17
8.4.1	Eulersche Zahl e II.34	14	10.4.7	hebbare Unstetigkeit	18
9 Funktionsfolgen und Funktionsreihen		14	10.4.8	Regeln von de l'Hospital II.86	18
9.1	Konvergenz	14	10.4.9	Grenzwertbildung mithilfe des Taylorpolynoms	18
9.1.1	Punktweise Konvergenz II.178	14	10.4.10	wichtige Grenzwerte	18
9.1.2	Gleichmäßige Konvergenz II.178	14	10.5	Logarithmus- und Exponentialfunktion II.55	18
9.2	Vertauschen von Grenzwerten	14	10.5.1	Definition II.56	18
9.2.1	Integration II.180	14	10.5.2	$\ln(x)$ -Rechenregeln II.57	18
9.2.2	Differenziation II.180	14	10.5.3	e -Funktion II.59	18
9.2.3	Funktionsreihen Integrieren II.182	15	10.5.4	e^x -Rechenregeln II.59	18
9.2.4	Funktionsreihen Differenzieren II.182	15	10.5.5	Allgemeine Exp. Funktion / Logarithmus II.62	18
9.3	Konvergenzkriterien	15	10.6	Differenzierbare Funktionen II.64	18
9.3.1	Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz II.178	15	10.6.1	Definition II.64	18
9.3.2	Majorantenkriterium II.182	15	10.6.2	Kriterium für Differenzierbarkeit II.67	19
9.4	Potenzreihen II.185	15	10.6.3	Tangente II.68	19
9.4.1	Konvergenz / Konvergenzradius II.185	15	10.6.4	Ableitung II.69	19

10.6.5	Ableitungsregeln II.72	19	12 Taylorentwicklung II.141	23
10.6.6	Ableitung der Umkehrfunktion II.78	19	12.1 Satz von Taylor II.141	24
10.6.7	Ableitung von wichtigen Funk- tionen	19	12.1.1 Taylorpolynom / Restglied II.141	24
10.6.8	Relatives Extremum II.80	19	12.2 Taylorreihe II.152	24
10.6.9	Satz von Rolle / Mittelwertsatz II.80	19	13 Funktionen mehrerer Veränderlicher II.199	24
10.6.10	Charakteristika von Funktionen II.82	20	13.1 Grundbegriffe II.199	24
10.6.11	Monotoniekriterium II.84	20	13.1.1 Euklidische Norm II.199	24
10.7	Kurvendiskussion Papula I.378	20	13.1.2 Konvergenz II.202	24
10.7.1	Definitionsbereich / Definitionslücken	20	13.1.3 Randpunkt / Häufungspunkt II.200	25
10.7.2	Symmetrie	20	13.1.4 Abgeschlossen / Kompakt	25
10.7.3	Nullstellen	20	13.2 Stetigkeit und Grenzwert II.203	25
10.7.4	Y-Achsenabschnitt	20	13.2.1 Stetigkeit II.203	25
10.7.5	Pole	20	13.2.2 Grenzwert II.205	25
10.7.6	Ableitungen	20	13.2.3 (relative) Maxi-/Minima II.207	25
10.7.7	Relative Extremwerte (Maxima und Minima)	20	13.3 Partielle Ableitung II.208	25
10.7.8	Wendepunkte, Sattelpunkte	20	13.3.1 Partielle Differenzierbarkeit II.208	25
10.7.9	Krümmung II.160	20	13.3.2 Gradient II.210	25
10.7.10	Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen	21	13.3.3 Richtungsableitung II.213	26
10.7.11	Wertebereich der Funktion	21	13.3.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung II.215	26
10.7.12	Zeichnung der Funktion in einem geeigneten Maßstab	21	13.3.5 Hessematrix Q_A II.238	26
11 Integralrechnung II.92		21	13.3.6 Differenzierbarkeitsklassen II.230	26
11.1	Ober- und Untersummen II.92	21	13.3.7 Satz von Schwarz / Vertausch- barkeit der partiellen Ableitun- gen II.230	26
11.1.1	Zerlegung (Partition) II.92	21	13.3.8 Parameterabhängige Integrale II.216	26
11.1.2	Riemann-Summe II.103	21	14 Differenzierbare Funktionen im \mathbb{R}^n II.219	26
11.2	Riemann Integral II.100	21	14.1 Der Differenzierbarkeitsbegriff II.219	26
11.3	Eigenschaften von Integralen II.99	22	14.1.1 Definition für $\dim(\text{Bild}) = 1$ II.219	26
11.4	Flächen- und Stammfunktion / unbe- stimmtes Integral II.103	22	14.1.2 Funktionalmatrix oder Jacobi- matrix II.223	26
11.4.1	partielle Integration / Produk- tintegration II.123	22	14.1.3 Kettenregel II.225	27
11.4.2	Partialbruchzerlegung	22	14.2 Lokale Extrema	27
11.4.3	Substitution II.126	23	14.2.1 Notwendige Bedingung für lokale Extrema II.238	27
11.5	Uneigentliche Integrale II.131	23	14.2.2 Quadratische Form / Definit II.239	27
11.5.1	Majorrantenkriterium II.133	23	14.2.3 Hinreichende Bedingungen für lokale Extremstellen II.240	27
11.5.2	Betragskriterium II.134	23	14.2.4 Sonderfall für $D \subseteq \mathbb{R}^2$	27
			14.3 Implizite Funktionen II.242	27

14.3.1	Extremwerte unter Nebenbedingungen / Lagrange-Multiplikation II.250	27	17 Vektorrechnung in \mathbb{V}^3 I.76	31	
14.3.2	Implizite Funktionen auf \mathbb{R}^2	27	17.1	Definition eines Vektors I.76	31
14.3.3	Satz über implizite Funktionen II.247	28	17.2	Vektoren als Pfeile	31
			17.2.1	Rechenregeln I.76	31
			17.2.2	Länge eines Vektors I.81	31
15 Integration im \mathbb{R}^n II.256		28	17.3	Das skalare Produkt I.84	31
15.1	Riemann-Integrale über Intervallen	28	17.3.1	Eingeschlossener Winkel I.86	31
15.1.1	Zerlegung / Feinheit	28	17.3.2	Einheitsvektor / Renormierung I.88	31
15.1.2	Definition Integral	28	17.3.3	Projektion eines Vektors I.89	32
15.1.3	Eigenschaften von Integralen	28	17.3.4	Richtungskosinus I.90	32
15.2	Integrierte Integrale über Intervallen II.263	28	17.4	Das vektorielle Produkt I.90	32
15.2.1	Satz von Fubini II.263	28	17.4.1	Rechenregeln I.91	32
15.2.2	Charakteristische Funktion	29	17.5	Spatprodukt I.95	32
15.2.2	Charakteristische Funktion	29	17.5.1	Rechenregeln I.96	32
15.3	Riemann Integrale über beschränkte Mengen	29	17.6	Gerade und Ebene im Raum I.99	32
15.3.1	Volumen einer Menge II.269	29	17.6.1	Geradengleichung I.99	32
15.3.2	Riemannsche Integral	29	17.6.2	Ebenengleichung I.107	32
15.3.3	Mittelwertsatz der Integralrechnung	29	17.6.3	Lage von Geraden im Raum I.99	33
15.3.4	Zylindermengen II.275	29	17.6.4	Abstand Gerade Punkt I.105	33
15.3.5	Substitutionsregel II.278	29	17.6.5	Abstand zweier windschiefer Geraden I.106	33
16 Integralsätze II.285		29	17.6.6	Normalenvektor I.108	33
16.1	Kurvenintegrale II.285	29	17.6.7	Lage zweier Ebenen im Raum I.111	33
16.1.1	glatte Kurve	29	17.6.8	Schnittpunkt Gerade Ebene I.110	33
16.1.2	geschlossene / doppelpunktfreie Kurve II.286	29	17.6.9	Lot auf Ebene I.111	33
16.1.3	Äquivalente Parametrisierung einer Kurve II.287	29	17.6.10	Abstand Nullpunkt-Ebene I.113	33
16.1.4	Tangente II.287	30	17.6.11	Abstand Punkt-Ebene I.114	34
16.1.5	Länge einer Kurve II.288	30	18 Vektorräume I.159	34	
16.1.6	Bogenlänge II.291	30	18.1	Definition I.159	34
16.1.7	Konstantes Durchlaufen einer Kurve II.292	30	18.1.1	Untervektorraum I.160	34
16.1.8	Vektorfeld / Skalarfeld II.292	30	18.1.2	Linearkombination I.161	34
16.1.9	Kurvenintegral II.293	30	18.1.3	Triviale Darstellung des Nullvektors I.162	34
16.1.10	Potentialfeld II.295	30	18.1.4	Lineare (Un-)Abhängigkeit I.163	34
16.1.11	Konvex	30	18.1.5	Lineare Hülle I.165	34
16.1.12	Wegunabhängiges Kurvenintegral II.295	30	18.2	Endlich-dimensionale Vektorräume I.166	35
16.1.13	Zentralfeld II.297	31	18.2.1	Erzeugendensystem I.166	35
			18.2.2	Basis I.166	35
			18.2.3	Kanonische Basis / Standardbasis I.169	35
			18.2.4	Dimension I.167	35
			18.2.5	Nullraum I.169	35

18.2.6	Linearer Teilraum I.169	35	20 Lineare Gleichungssysteme I.220	39
18.2.7	Darstellung von Vektorräumen I.169	35	20.1 Der Lösungsraum I.220	40
18.3	Koordinaten I.171	35	20.1.1 Dimension I.221	40
18.3.1	Definition I.171	35	20.1.2 Erweiterte Matrix I.224	40
18.3.2	Basiswechsel I.174	35	20.1.3 Rangkriterium I.224	40
18.3.3	Kronecker-Symbol I.176	36	20.1.4 Basiswechsel	40
18.4	Der unitäre Vektorraum \mathbb{C}^n I.177	36	20.2 Lösen mittels Inversen	40
18.4.1	Skalare Produkt / Betrag I.178	36	20.3 Der Gaußsche Algorithmus I.227	40
18.4.2	Orthogonalsystem / Orthonormalsystem (Basis) I.180	36	20.3.1 Bestimmen der Inversen Matrize mittels Gauß-Algorithmus	40
18.4.3	Existenz einer Orthonormalbasis I.181	36	21 Determinanten I.241	41
18.4.4	Gram-Schmidtsches-Orthonormalisierungsverfahren I.182	36	21.1 Definitionen	41
18.5	Lineare Abbildungen I.183	36	21.1.1 Permutation / Transposition I.241	41
18.5.1	Bild und Kern I.184	37	21.1.2 Fehlstand / Signum I.242	41
18.5.2	Injektiv / Surjektiv I.184	37	21.1.3 Determinante I.244	41
18.5.3	Lineare Abbildung durch Bilder der Basis I.184	37	21.1.4 Verhalten von Determinante bei Zeilen- und Spaltenoperationen I.246	41
18.5.4	Koordinatenschreibweise linearer Abbildungen I.188	37	21.1.5 Gaußalgorithmus für Determinanten	42
19 Matrizen I.190		37	21.1.6 Determinante und Rang I.248	42
19.0.5	Zeilen- und Spaltenvektor I.191	37	21.2 Entwicklung nach einer Zeile/Spalte I.250	42
19.1	Rechenoperationen mit Matrizen I.190	37	21.2.1 Adjunkte I.256	42
19.1.1	Addition I.195	37	21.2.2 Entwickeln nach einer Zeile oder Spalte I.256	42
19.1.2	Skalarmultiplikation I.195	38	21.2.3 Vandermonde-Matrix I.258	42
19.1.3	Kanonische Basis	38	21.3 Die Cramersche Regel I.259	42
19.1.4	Transponierte Matrix I.192	38	21.3.1 Inverse Matrix I.259	42
19.1.5	(Anti-) Symmetrische Matrix	38	21.3.2 Cramersche Regel I.261	42
19.1.6	Matrixprodukt I.197	38	22 Eigenwerte I.266	43
19.1.7	Nullmatrix	38	22.1 Charakteristisches Polynom I.266	43
19.1.8	Einheitsmatrix I.200	39	22.1.1 Definition I.266	43
19.2	Rang einer Matrix I.200	39	22.1.2 Ähnliche Matrix I.269	43
19.2.1	Zeilen-/Spaltenoperationen I.201	39	22.2 Eigenvektoren I.272	43
19.3	Lineare Abbildungen und Matrizen I.213	39	22.2.1 Definition I.272	43
19.3.1	Menge aller linearen Abbildungen I.214	39	22.2.2 Vielfachheit I.275	43
19.3.2	Zuordnung Matrix \Leftrightarrow Lin. Abbildung I.214	39	22.2.3 Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren I.276	43
19.3.3	Verkettung von lin. Abbildungen I.216	39	22.3 Hermitesche und unitäre Matrizen I.284	43
19.3.4	Inverse Matrix I.216	39	22.3.1 Orthogonale Abbildung I.285	43
19.3.5	Reguläre Matrix I.217	39	22.3.2 Unitäre Matrizen I.284	44
			22.3.3 Hermitesche Matrizen I.284	44

23 Drehung im \mathbb{R}^2 und Quadriken	44
23.1 Gebilde	44
23.1.1 Ellipse	44
23.1.2 Parabel	44
23.1.3 Hyperbel	44
23.1.4 Drehung in \mathbb{R}^2	45
23.1.5 Spiegelung in \mathbb{R}^2	45
23.2 Überführen von allgemeine Quadriken in Normalform	45
23.2.1 Allgemeine Quadrik	45
23.2.2 Drehen	45
23.2.3 Identifizieren des Typs	45
23.2.4 Verschieben in Ursprung	45

Die hinter den Überschriften angegebenen Nummern beziehen sich auf die Bücher "Höhere Mathematik mit Mathematika I-II" von W. Strampp. Die römische Ziffer gibt die Buchnummer, und die arabische die Seitenzahl an. Z.B. II.45 bedeutet Band II Seite 45.

1 Begriffe

1.1 Logik

1.1.1 Verknüpfungen

- Negation
 $\neg a$: nicht a
- Implikation
 $a \Rightarrow b$: aus a folgt b
- Äquivalenz
 $a \Leftrightarrow b$: a und b sind äquivalent (gleichwertig)
- Konjunktion
 $a \wedge b$: a und b
- Disjunktion
 $a \vee b$: a oder b

1.1.2 Rechenregeln

- Kommutativgesetz
 $a \wedge b = b \wedge a$
 $a \vee b = b \vee a$
- Assoziativgesetz
 $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
- Distributivgesetz
 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

- De Morgan
 $\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
 $\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$
- doppelte Negation
 $\neg(\neg a) = a$
- neutrales Element
 $a \vee f = a$
 $a \wedge f = f$
 $a \vee w = w$
 $a \wedge w = a$
- inverses Element
 $a \vee (\neg a) = w$
 $a \wedge (\neg a) = f$

1.1.3 Quantoren

- Allquantor $\forall x : \varphi(x)$
für alle x gilt $\varphi(x)$.
z.B. $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \in \mathbb{N} = \forall_{\mathbb{N}}^x : x^2 \in \mathbb{N}$
- Existenzquantor $\exists x : \varphi(x)$
es gibt (mindestens) ein x für das $\varphi(x)$ gilt.
z.B. $\exists x \in \mathbb{N} : \varphi(x) = \exists_{\mathbb{N}}^x : \varphi(x)$
- $\exists! x : \varphi(x)$ oder $\exists^1 x : \varphi(x)$
es gibt genau ein x für das $\varphi(x)$ gilt.
- Negation $\forall x : H(x) \Leftrightarrow \neg \exists x : \neg H(x)$
Es gilt für alle x , $H(x) \Leftrightarrow$ Es gibt nicht ein x , für das $H(x)$ nicht gilt.

1.1.4 Eigenschaften von Aussagen

Widerspruch heißt eine zusammengesetzte Aussage, wenn sie *immer falsch* ist.
z.B. $A \wedge \neg A$

Tautologie (Symbol: Blitz) heißt eine Aussage, wenn sie *immer wahr* ist.
z.B. $A \vee \neg A$

1.2 Abbildungen

Mengen $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$
 f : Urbildmenge \rightarrow Bildmenge

Elemente von Mengen $a \mapsto f(a)$
 f : Urbild \mapsto Bild

1.2.1 injektiv

wenn es zu jedem unterschiedlichen Urbild auch unterschiedliche Bilder gibt.

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

1.2.2 surjektiv

heißt eine Abbildung $f : A \rightarrow B$, wenn es zu jedem Element aus dem Bildraum auch mindestens ein passendes Urbild gibt.

$$\forall_B^b : \exists_A^a : f(a) = b$$

1.2.3 bijektiv

ist eine Abbildung f , wenn sie surjektiv und injektiv ist. Dies sind 1:1 - Abbildungen.

- Bei endlichen Mengen:
 $f : A \rightarrow B$ bijektiv $\Rightarrow |A| = |B|$

2 Mengen

2.1 Beschreibung

Die Menge A enthält alle grade Zahlen größer als 0:

$$A = \{x | x \text{ ist grade Zahl und größer als Null}\}$$

$$A = \{x | \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\}$$

a ist ein Element der Menge A :

$$a \in A$$

2.2 Standardmengen

- Leere Menge
 $\emptyset = \{\}$
- Natürlichen Zahlen
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
 - Natürlichen Zahlen mit 0
 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Ganzen Zahlen
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Rationalen Zahlen
 $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$
- Reellen Zahlen
 $\mathbb{R} = \{\text{jeder Punkt auf dem Zahlenstrahl}\}$
 - positiven reellen Zahlen
 $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
- Komplexen Zahlen
 $\mathbb{Z} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2.3 Intervalle

- offenes Intervall
 $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- halboffenes Intervall
 $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ bzw. $(a, b[$
 $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ bzw. $]a, b[$
- abgeschlossenes Intervall
 $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ bzw. $]a, b[$

2.4 Operationen

- Gleichheit
 $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$
- Teilmenge
 $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
- echte Teilmenge
 $A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$
- Vereinigung
 $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- Schnitt
 $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- Ohne (Differenz)
 $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- symmetrische Differenz
 $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- geordnete Paare
 $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$
- Potenzmenge
 $\mathcal{P}(M) = \{A | A \subseteq M\}$
- Komplementärmenge
für $A \subseteq M$ ist $\bar{A} = \{x \in M | x \notin A\}$
- Anzahl der Elemente
 $|M| = \text{Anzahl der Elemente von } M$

2.5 Rechenregeln

- Kommutativgesetz
 $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$
 $A \Delta B = B \Delta A$
- Assoziativgesetz
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
 $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- Distributivgesetz
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- De Morgan
 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

- doppelt invers
 $\overline{\overline{A}} = A$
- neutrales Element
 $A \cup \emptyset = A$
 $A \cap \emptyset = \emptyset$
- inverses Element
 $A \cap \overline{A} = \emptyset$
 $A \cup \overline{A} = \text{Grundmenge}$

2.6 Schranken 1.29

- Untere-/Obere Schranke (s bzw S)
 $\forall x \in M \subseteq \mathbb{R} : s \leq x \quad x \leq S$
- beschränkt
 $\forall x \in M \subseteq \mathbb{R} : |x| \leq S_B$
- Infimum / Supremum kleinste untere- / obere Schranke
 $\inf(M); \sup(M)$
- Minimum/ Maximum
 $\min(M) := \inf(M)$ wenn $\inf(M) \in M$ bzw.
 $\max(M) := \sup(M)$ wenn $\sup(M) \in M$
- (offene) ε -Umgebung
 $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$

2.7 Häufungspunkt 1.33

- a heißt Häufungspunkt von M wenn
$$\forall \varepsilon > 0, x_\varepsilon \neq a \in M : |x_\varepsilon - a| < \varepsilon$$
- Satz von Bolzano-Weierstraß
Jede unendliche, beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt

2.8 Ordnungsregeln

Eine Relation (Platzhalter \sim) zwischen den Mengen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$.
 $a \sim b$ falls $(a, b) \in A \times B$.

2.8.1 Eigenschaften von Relationen

- reflexiv
 $\forall a : a \sim a$
- symmetrisch
 $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
- antisymmetrisch
 $a \sim b \wedge b \sim a \Rightarrow a = b$
- transitiv
 $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

2.8.2 Typen von Relationen

- Äquivalenzrelationen
heißen Relationen die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind.
z.B. Gleichheit; $a \sim b$ mit $a, b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - b$ ist gerade
- Ordnungsrelationen
heißen Relationen die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv sind.
z.B. $\leq; \geq$; "a steht vor b im Lexikon". ($<$; $>$ sind keine Ordnungsrelationen, da nur 4)

2.9 Körper

Eine Menge \mathbb{K} zusammen mit den Rechenoperationen $+$ und $*$ heißt Körper wenn folgendes gilt:

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind beispielsweise Körper.

2.9.1 Addition

$$\forall_{\mathbb{K}}^{a,b}$$

- Abgeschlossenheit
 $a + b \in \mathbb{K}$
- Kommutativgesetz
 $a + b = b + a$
- Assoziativgesetz
 $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Neutrales Element
 $\exists 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = a$
- Inverses Element
 $\exists -a \in \mathbb{K} : a + (-a) = 0$

2.9.2 Multiplikation

$$\forall_{\mathbb{K}}^{a,b,c}$$

- Abgeschlossenheit
 $ab \in \mathbb{K}$
- Kommutativgesetz
 $ab = ba$
- Assoziativgesetz
 $a(bc) = (ab)c$
- Neutrales Element
 $\exists 1 \in \mathbb{K} : 1a = a$
- Inverses Element
 $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \exists a^{-1} \in \mathbb{K} : aa^{-1} = 1$

2.9.3 Distributivgesetz

$$\forall_{\mathbb{K}}^{a,b,c}$$

- $a(b+c) = ab+ac$

2.10 Angeordnete Körper

Ein Körper auf dem die Relation $<$ definiert ist, wird als *angeordneter Körper* bezeichnet. Die unter 2.2 auf Seite 7 aufgeführten Mengen sind angeordnete Körper.

3 Beweisverfahren

3.1 direkter Beweis

Diesen Beweis erhält man durch gezielte Umformung der Aussagen bzw. durch logisches Schließen (Implikation).

3.2 indirekter Beweis

Auch Widerspruchsbeweis genannt. Hier versucht man die Gleichwertigkeit von

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge (\neg B)) \Rightarrow \text{Falsch})$$

auszunutzen.

z.B.: "Wenn es regnet ist die Straße nass." \Leftrightarrow "Es regnet und die Straße ist nicht nass, ist ein Widerspruch."

3.3 Kontraposition

Hier wird versucht die Aussage umzudrehen (beruht auf Tautologie).

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

z.B.: "Wenn es Regnet ist die Straße nass." \Leftrightarrow "Wenn die Straße nicht nass ist, kann es nicht geregnet haben."

3.4 Vollständige Induktion 1.33

$A(n)$ Aussage für natürliche Zahlen

1. Induktionsanfang: $A(1)$ gilt
2. Induktionsannahme: für jedes n gilt $A(n)$
3. Induktionsschritt: Zeige: aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$. (bzw. $A(n+1)$ lässt sich mit Hilfe der Annahme $A(n)$ beweisen)

4 Rechenregeln

4.1 Summen 1.13

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k \quad 1 \leq m \leq n$$

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=a}^b g_k = \sum_{k=a+c}^{b+c} g_{k-c}$$

4.2 Ungleichungen

- $a < b \Leftrightarrow -a > -b$
- $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$
- $a < b \wedge 0 < ab \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
- $|ab| = |a| |b|$
- (Umgekehrte-) Dreiecksungleichung 1.25
 $||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$
- Cauchy-Schwarze-Ungleichung 1.19
 $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2$
- Bernullische Ungleichung 1.34
 $(1+h)^n > 1+nh, \quad n \geq 2$

4.3 Fakultät 1.38

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$e! = 1 \quad 1! = 1 \quad 0! = 1$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

4.4 Binomialkoeffizient 1.39

$$k \leq n, n \geq 0, k \geq 0$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

- Binomischer Satz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

5 Trigonometrie

Siehe Sieber; Mathematische Formelsammlung für Gymnasien; Klett.

Es macht meiner Meinung nach keinen Sinn, eine so gute Übersicht noch einmal "abzuschreiben".

Kreisfunktionen Seite 15

Winkelsätze Seite 16

Arkusfunktionen Seite 16

Ableitungen Seite 33

Stammfunktionen Seite 35

Hyperbel- und Arefunktionen Seite 37

6 Komplexe Zahlen 1.44

6.1 Definition

Die komplexen Zahlen bilden zusammen mit den Rechenregeln für $+$, \cdot einen Körper dessen Elemente wie folgt definiert sind

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$$

$x = \Re(z)$ (Re) Realteil, $y = \Im(z)$ (Im) Imaginärteil

$i = \sqrt{-1}$ wird als Imaginäre Einheit bezeichnet.

6.1.1 Rechenregeln 1.45

- Addition
 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Multiplikation
 $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- Division

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \\ &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \\ &= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \end{aligned}$$

- Neutrales Element der Addition
 $z = (0, 0)$
- Neutrales Element der Multiplikation
 $z = (1, 0)$
- $i = \sqrt{-1}$

6.2 Komplex Konjugierte Zahl 1.53

Die komplex konjugierte Zahl von $z = x + iy$ heißt:

$$\bar{z} = x - iy (= z^*)$$

(Spiegelung an der reellen Achse)

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- $\Im(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z \bar{w}} = \bar{z} w$
- $\frac{1}{(\bar{z})} = \left(\frac{1}{z}\right)$
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $z \bar{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$
- Bei Matrizen mit Komplexen Einträgen:
 $\overline{\det(A)} = \det(\bar{A})$

6.3 Betrag einer Komplexen Zahl 1.58

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| \geq 0$
- $|z|^2 = z \bar{z}$ (also $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$)
- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- Dreiecksungleichung
 $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

6.4 Polarkoordinaten 1.60

$$z = x + iy = r e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

- $\Re(z) = x = r \cos \varphi$
- $\Im(z) = y = r \sin \varphi$
- φ = Winkel des Komplexen Zeigers mit positiver Reeller Achse (Argument von z)

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

- $|z| = |e^{i\varphi}| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$
- $|z| = |re^{i\varphi}| = |r| (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = |r|$
- $z = e^{i\varphi} \Leftrightarrow \bar{z} = e^{-i\varphi}$
- $r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- $(e^{i\varphi})^n = e^{i\varphi n}$
- Formel von Moivre
 $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$
- $\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- $z_k = \sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{r_0} e^{i(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{k}{n} 2\pi)}$
 $0 \leq k \leq (n - 1)$
- a, b sind rechtwinklig zueinander
 $|\frac{a}{b}| = r \ i \Leftrightarrow a \perp b$

6.5 Fundamentalsatz der Algebra 1.71

Zu jedem Polynom vom Grad $n \geq 1$

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$$

gibt es n (nicht zwangsläufig unterschiedliche) komplexe Zahlen z_1, \dots, z_n , so dass

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. z_1, \dots, z_n sind die Nullstellen des Polynoms. Diese Umformung nennt sich *Faktorisieren* in *Linearfaktoren*.

Es lässt sich auch nur ein Linearfaktor abspalten. Dann erhält man einen Linearfaktor und ein Restpolynom vom einem um 1 verringerten Grad.

$$p(z) = (z - z^*) r(z)$$

6.6 Vietascher Wurzelsatz 1.72

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n &= -a_{n-1} \\ \sum_{k_1, k_2=1, k_1 \leq k_2}^n &= a_{n-2} \\ \sum_{k_1, k_2, k_3=1, k_1 \leq k_2 \leq k_3}^n &= -a_{n-3} \\ &\vdots \\ \prod_{k=1}^n z_k &= (-1)^n a_0 \end{aligned}$$

7 Folgen 11.3

$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ist eine Zuordnung, die jedem Index $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl a_n zuordnet. Index \mapsto Folgenglied. $n \mapsto a_n$.

$$\langle a_n \rangle = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung $a_n = f(n)$ (explizit) oder rekursiv $a_{n+1} = f(a_n)$.

7.1 Monotonie 11.6

- monoton fallend $a_{n+1} \leq a_n$
- streng monoton fallend $a_{n+1} < a_n$
- monoton steigend $a_{n+1} \geq a_n$
- streng monoton steigend $a_{n+1} > a_n$

7.2 Teilfolge 11.6

$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge, $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ eine streng monoton wachsende Folge mit $n_k \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$$

Teilfolge von $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Man nehme als Index der einen Folge die Folgenglieder einer anderen Folge, so dass man nur spezielle Elemente erhält, z.B. jedes Zweite.

7.3 Konvergenz 11.8

Der Wert den eine Folge im Unendlichen annimmt, wird *Grenzwert* genannt. Wenn sie einen Grenzwert besitzt wird sie *konvergent* genannt, ansonsten *divergent*.

$$\forall \varepsilon > 0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

7.4 Nullfolge 11.11

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

- z.B. die geometrische Reihe:

$$\forall |q| < 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

7.5 Konvergenzkriterien

7.5.1 Teilfolgen

$\{a_n\}$ konvergent wenn jede ihrer Teilfolgen konvergent. 11.13

7.5.2 Sandwichtheorem II.15

Wenn: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$
 $a_n \leq c_n \leq b_n$
 dann folgt: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

7.5.3 Monotonie / beschränkt II.16

Jede monoton wachsende (monoton fallende) nach oben (nach unten) beschränkte Folge $\{a_n\}$ ist konvergent.
 $a = \sup \{a_n\}$ (bzw. $a = \inf \{a_n\}$)

7.5.4 Cauchy-Folge II.20

Jede Cauchy-Folge ist konvergent.
 $\forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N} : |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$ definiert eine Cauchy-Folge

7.5.5 Häufungspunkt

Wenn bei einer beschränkten Folge der kleinste Häufungspunkt (Limes inferior: \liminf) gleich dem Größten (Limes superior: \limsup) ist, ist dies der Grenzwert der Folge II.21

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

7.6 Grenzwert Rechenregeln II.14

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n &= a + b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= ab \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a}{b} \quad b \neq 0 \end{aligned}$$

- Im Allgemeinen lassen sich zwei Grenzwertbildungen nicht in der Reihenfolge vertauschen!

7.6.1 Unbestimmte Formen

Unbestimmte Formen siehe Tabelle 1. Diese lassen sich alle bis auf $x = (\infty - \infty)$ lösen mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital (siehe 10.4.8 auf Seite 18).

8 Reihen II.22

Eine Reihe (s_n) ist eine Folge von Teilsummen einer anderen Folge (a_n) .

$$s_n = \sum_{v=1}^n a_v$$

Tabelle 1: unbestimmte Formen

$\lim f$	$\lim g$	unbestimmt
$+\infty$	$-\infty$	$\lim(f + g)$
0	$+\infty$	$\lim(f \cdot g)$
0	$-\infty$	$\lim(f \cdot g)$
0	0	$\lim \frac{f}{g}$
$+\infty$	$+\infty$	$\lim \frac{f}{g}$
$-\infty$	$-\infty$	$\lim \frac{f}{g}$
$+\infty$	$-\infty$	$\lim \frac{f}{g}$
$-\infty$	$+\infty$	$\lim \frac{f}{g}$

8.1 Konvergenz II.22

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n a_v = \sum_{v=1}^{\infty} a_v = a$$

Die Reihen $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ und $\sum_{v=1}^{\infty} b_v$ seien konvergent, dann gilt: II.23

$$\sum_{v=1}^{\infty} ca_v = ca, \quad \sum_{v=1}^{\infty} (a_v + b_v) = a + b$$

8.1.1 Sätze über Konvergente Reihen

Wenn eine Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergiert, dann ist a_v eine Nullfolge ($a = 0$) II.24

- Cauchy-Konvergenzkriterium für Reihen
 $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergent, wenn
 $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m > n_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$

8.2 absolut / bedingt konvergent II.163

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, bedingt konvergent, falls zwar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ aber divergiert.

- Wenn eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch bedingt.
- Wenn eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.
- Die Summe $(\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k))$ zweier absolut konvergenter Reihen $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k)$ ist die auch absolut konvergent.

8.2.1 Doppelreihe II.167

Durch $\sum_{v,\mu=0}^{\infty} a_{v\mu}$ wird eine Doppelreihe gegeben.

8.2.2 Umordnung II.164

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe und $\pi : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$$

eine Umordnung der Ausgangsreihe.

- Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist ebenfalls (gegen den gleichen Wert) konvergent.
- Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent. Dann gibt es zu jedem $-\infty \leq s \leq \infty$ eine Umordnung sie bedingt gegen s konvergiert: $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi_s(k)} = s$

8.2.3 Großer Umordnungssatz II.167

Ordnet man die Doppelreihe in beliebiger Reihenfolge zu einer einfachen Reihe an, so entsteht eine stets mit der gleichen Summe s absolut konvergente Reihe. Alle Zeilensummen $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{v\mu}$ sowie alle Spaltensummen $\sum_{v=0}^{\infty} a_{v\mu}$ sind absolut konvergent. Die Reihe der Spaltensummen bzw. Reihensummen konvergiert absolut gegen s :

$$\sum_{v,\mu=0}^{\infty} a_{v\mu} = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{v\mu} \right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^{\infty} a_{v\mu} \right) = s$$

- gilt sinngemäß auch für Mehrfachreihen $\sum_{v_1, \dots, v_m=0}^{\infty} a_{v_1, \dots, v_m}$

8.2.4 Produkt von Reihen II.165

Wenn zwei Reihen absolut konvergieren, dann konvergiert die Reihe der Produkte (bei beliebiger Anordnung) ebenfalls absolut, und es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_k &= \sum_{j=1}^{\infty} (a_k b_j) = \sum_{k,j=0}^{\infty} (a_k b_j) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = ab \end{aligned}$$

8.2.5 Cauchy-Produkt II.166

Das Cauchy-Produkt ist absolut konvergent:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^v a_{\mu} b_{v-\mu} \right) = \left(\sum_{v=0}^{\infty} a_v \right) \left(\sum_{v=0}^{\infty} b_v \right)$$

8.3 Konvergenzkriterien II.168

8.3.1 Majoranten- oder Vergleichskriterium II.168

$$\forall v \geq v_0 \geq 0 : 0 \leq a_v \leq b_v.$$

Wenn die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} b_v$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$, und es gilt: $\sum_{v=0}^{\infty} a_v \leq \sum_{v=0}^{\infty} b_v$.

Wenn die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} b_v$ divergiert, dann divergiert auch die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$.

8.3.2 Quotientenkriterium II.169

Sei $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ eine Reihe mit $a_v \neq 0$ für alle $v \in \mathbb{N}$ und

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right| = \bar{g} \text{ und } \liminf_{v \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right| = \underline{g}$$

Dann gilt:

- Ist $\bar{g} < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ absolut.
- Ist $\underline{g} > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$.
- Für jeweils $= 1$ gibt das Kriterium keinen Aufschluss.
- siehe Wurzelkriterium (ist stärker als Quotientenkriterium)

8.3.3 Wurzelkriterium II.171

Sei $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ eine Reihe mit

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{|a_v|} = \bar{g}$$

- Ist $\bar{g} < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.
- Ist $\bar{g} > 1$, so divergiert die Reihe.
- Für $\bar{g} = 1$ gibt das Kriterium keinen Aufschluss.
- $\limsup_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{|a_v|} \leq \limsup_{v \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right|$
 $\liminf_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{|a_v|} \geq \liminf_{v \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right|$
 - Bezug zum Quotientenkriterium.
 - Wenn erster Grenzwert existiert, dann existiert auch der zweite.
 - Das Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium.

8.3.4 Leibnizsches Kriterium II.174

Sei $\{a_v\}_{v=1}^{\infty}$ eine Nullfolge mit $\forall v : a_v \geq 0, a_v \geq a_{v+1}$. Dann ist die Reihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} a_v$$

konvergent. Für die n -te Teilsumme gilt die Abschätzung:

$$\left| \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} a_v - \sum_{v=1}^n (-1)^{v+1} a_v \right| \leq a_{n+1}$$

8.3.5 Integralkriterium II.175

Sei $\forall_{[1,\infty)}^x : f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \leq 0$ monoton fallend, und die Folge $a_v = f(v), v \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge. Dann gilt:

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_{x=1}^{\infty} f(x) dx \text{ konvergiert}$$

8.4 Besondere Reihen

- Weitere Reihen siehe 9.5 auf der nächsten Seite
- geometrische Reihe II.25
 $\sum_{v=0}^n q^v = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
 (konvergent wenn $|q| < 1$)
- harmonische Reihe II.27
 $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ (divergent)
- alternierende harmonische Reihe II.28
 $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \frac{1}{v}$ (konvergent)
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

8.4.1 Eulersche Zahl e II.34

Folgende Reihen sind absolut Konvergent gegen e .

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n = 1$$

9 Funktionsfolgen und Funktionsreihen

9.1 Konvergenz

9.1.1 Punktweise Konvergenz II.178

Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n=1}^{\infty}, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert punktweise, wenn $\forall_{[a,b]}^x : (f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Die durch $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ in $[a, b]$ erklärte Funktion heißt Grenzfunktion.

Man schreibt

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ptw.}} f(x)$$

9.1.2 Gleichmäßige Konvergenz II.178

Die Funktion $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, (n \geq 1)$, und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien beschränkt. Die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f , wenn die folgende Beziehung gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Man schreibt

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{glm.}} f(x)$$

- jede gleichmäßig konvergente Folge ist auch punktweise Konvergent.
- wenn alle $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ stetig $\Rightarrow f$ ist stetig in $[a, b]$
- man kann in jedem Punkt zwei Grenzprozesse vertauschen:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \end{aligned}$$

9.2 Vertauschen von Grenzwerten

9.2.1 Integration II.180

Die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ von stetigen Funktionen konvergiere gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) \end{aligned}$$

9.2.2 Differenziation II.180

Die Folge von stetig differenzierbaren Funktionen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiere in $[a, b]$ punktweise gegen f . Die Folge der Ableitungen $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiere gleichmäßig in $[a, b]$. Dann ist f stetig diffbar, und

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

9.2.3 Funktionsreihen Integrieren II.182

Sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ stetig auf $[a, b]$. Die Reihe $f(x) := \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ konvergiere gleichmäßig auf $[a, b]$. Dann ist die Grenzwertfunktion f stetig in $[a, b]$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left(\sum_{v=1}^\infty f_v(x) \right) dx \\ &= \sum_{v=1}^\infty \left(\int_a^b f_v(x) dx \right) \end{aligned}$$

9.2.4 Funktionsreihen Differenzieren II.182

Sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ stetig differenzierbar auf $[a, b]$. Die Reihe $f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ konvergiere punktweise gegen f , und $\sum_{k=1}^\infty f'_k(x)$ konvergiere gleichmäßig auf $[a, b]$. Dann ist $f(x)$ stetig differenzierbar und

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{v=1}^\infty f_v(x) \right) = \sum_{v=1}^\infty f'_v(x)$$

9.3 Konvergenzkriterien

9.3.1 Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz II.178

Eine Folge $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $(n \geq 1)$ beschränkter Funktionen konvergiert genau dann gleichmäßig gegen die beschränkte Grenzfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, wenn:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 : \exists n_\epsilon : \forall n, m > n_\epsilon : \\ \max_{x \in [a, b]} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \end{aligned}$$

9.3.2 Majorantenkriterium II.182

Sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ auf $[a, b]$ beschränkt, und $(c_n)_{n=1}^\infty$ eine Zahlenfolge mit $|f_n(x)| \leq c_n$ für alle $x \in [a, b]$. Konvergiert $(c_n)_{n=1}^\infty$, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ gleichmäßig auf $[a, b]$.

9.4 Potenzreihen II.185

Sei $(a_k)_{k=0}^\infty$ eine Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^\infty a_k (x - x_0)^k$$

heißt Potenzreihe mit Koeffizienten a_k und Entwicklungspunkt x_0 (z.B. Taylorreihe).

9.4.1 Konvergenz / Konvergenzradius II.185

Sei $f = \sum_{k=0}^\infty a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe, die an der Stelle \tilde{x} konvergiert. Dann konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig in jedem Intervall $|x - x_0| \leq c$ für

jedes $c < |\tilde{x} - x_0|$. Divergiert f in \tilde{x} , so divergiert f für alle x mit $|x - x_0| > |\tilde{x} - x_0|$.

Wenn $D := \{x | f(x) \text{ konvergiert}\}$ der Definitionsbereich von f ist, heißt $\rho := \sup_{x \in D} |x - x_0|$ der Konvergenzradius von f .

- In \mathbb{C} bildet ρ einen Kreis um x_0
- über Punkte $x = x_0 \pm \rho$ kann nichts ausgesagt werden
- $\rho = 0$ Konvergenz nur bei x_0
- $\rho = \infty$ Konvergenz für alle x
- eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzradius stets eine stetige Funktion.

9.4.2 Konvergenzradius II.186

Sei $f = \sum_{k=0}^\infty a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe. Dann ist

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

der Konvergenzradius. Die erste Formel ist die Hadamardsche Formel (gilt immer). Die Zweite Formel gilt nur, wenn dieser Grenzwert auch existiert.

9.4.3 Integrieren / Differenzieren II.190

Sei $f = \sum_{k=0}^\infty a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann gilt

$$g(x) = \sum_{k=0}^\infty (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$$

$$h(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{a_{k-1}}{k} (x - x_0)^k$$

haben ebenfalls den Konvergenzradius ρ und $g(x) = f'(x)$, $h(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$.

9.4.4 Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen II.191

Wenn zwei Potenzreihen in einem beliebig kleinen Intervall $\epsilon > 0$ absolut konvergieren und übereinstimmen, sind sie bereits identisch ($\forall \mathbb{N}^k : a_k = b_k$).

9.5 wichtige Reihen II.154 / II.192

- Weitere Reihen siehe 8.4 auf der vorherigen Seite
- $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

- $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
- geometrische Reihe ($|x| < 1$)
 $\frac{1}{1 \pm x} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mp 1)^k x^k$
- abgeleitete geometrische Reihe ($|x| < 1$)
 $\frac{1}{(1 \pm x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mp 1)^k (k+1) x^k$
- $\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

10 Funktionen 1.116

10.1 Definition 1.116

- $D =$ Definitionsbereich, $W =$ Wertebereich. Die Zuordnungsvorschrift f ordnet jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y = f(x) \in W$ zu. Man sagt, f bildet D auf W ab. $x =$ Urbild, $f(x) =$ Bild

$$f : D_f \rightarrow W_f, \quad x \mapsto f(x)$$

- Gleichheit
 $D_g = D_f \quad f(x) = g(x)$
- Restriktion
 $D_g \subseteq D_f$ lässt sich das wie folgt schreiben $g = f|_{D_g}$
d.h. f gilt nur für Teilmenge D_g

10.2 Stetige Funktionen 11.38

- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt x_0 , wenn

$$\forall \varepsilon > 0, x \in D : \exists \delta_\varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- Stetig in D
falls f in in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.
- gleichmäßig Stetig

$$\forall \varepsilon > 0, x, x_0 \in D : \exists \delta_\varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(Die Steigung ist in D endlich, z.B. $y = \sin(x)$.
 $y = x^2$ ist in \mathbb{R} nicht gleichmäßig stetig).

10.2.1 Kriterien für Stetigkeit

- Folgenkriterium 11.40
 f ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn die zu irgendeiner gegen x_0 konvergenten Folge $\{\tilde{x}_n\} \subset D$ gehörigen Folge von Funktionswerten $\{f(\tilde{x}_n)\}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = f(x_0)$$

$\Rightarrow f$ stetig in x_0 .

- Ableitung 11.68
Wenn eine Funktion in x_0 differenzierbar ist, ist sie dort auch stetig.

10.3 Sätze über stetige Funktionen

10.3.1 Hauptsätze 11.41

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Dann sind auch folgende Funktionen stetig:

- $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$
- $fg : D \rightarrow \mathbb{R}$
- $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$ falls $g(x_n) \neq 0$

10.3.2 Verkettung 11.42

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$. Dann gilt:

Verkettung $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
bzw. $x \mapsto g(f(x))$ stetig in x_0

- $(f \circ f^{-1})(x) = x$

10.3.3 Umkehrfunktion 11.43

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monotone, in $x_0 \in [a, b]$ stetige Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0) \in f([a, b])$ stetig.

- Entspricht einer Spiegelung der Funktion an der Geraden $y = x$
- $(f \circ f^{-1})(x) = x$
- Nur !!! bei stetigen, streng monotonen Funktionen möglich. Anderenfalls Definitionsbereich passend einschränken.

10.3.4 Min-/Maximum II.43

Eine Funktion hat ein (absolutes) Minimum bzw. Maximum x_0 , wenn $f(x) \geq f(x_0)$ bzw. $f(x) \leq f(x_0)$.

$$\min f(x) = \underline{x} \quad \text{bzw.} \quad \max f(x) = \bar{x}$$

Bei einem beschränkten Wertebereich muss eine stetige Funktion ein absolutes Minimum und ein absolutes Maximum besitzen.

Dies ist relativ, falls dies nur in einer Umgebung um x_0 gilt.

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = \underline{x} \quad \text{bzw.} \quad \max_{x \in [a,b]} f(x) = \bar{x}$$

10.3.5 Zwischenwertsatz II.44

Bei einer stetigen, beschränkten Funktion wird jeder Wert zwischen dem Minimum und dem Maximum als Funktionswert angenommen.

10.3.6 gerade / ungerade Funktionen

- Eine Funktion $g(x)$ ist gerade, wenn $g(-x) = g(x)$
 - sind Spiegelsymmetrisch zur Y-Achse
 - z.B. Polynome in denen nur gerade Exponenten auftauchen ($p(x) = \sum_{k=0}^n a_{2k}x^{2k}$)
 - z.B. $\cos(x)$

- Eine Funktion $u(x)$ ist ungerade, wenn $u(-x) = -u(x)$
 - sind Punktsymmetrisch zum Ursprung
 - z.B. Polynome in denen nur ungerade Exponenten Auftauchen ($p(x) = \sum_{k=0}^n a_{2k+1}x^{2k+1}$)
 - z.B. $\sin(x)$

- Der (un)gerade Anteil einer beliebigen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch
 - gerade: $g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$
 - ungerade: $u(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$
 - $f(x) = g(x) + u(x)$
 - z.B. $f(x) = e^x$
 - $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$
 - $u(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$

10.4 Grenzwert von Funktionen

10.4.1 Definition II.46

$D = (a, b) \setminus \{x_0\}$
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat den Grenzwert y , falls für jede gegen x_0 konvergente Folge, $(x_n); x_n \in D; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ folgendes gilt:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$
 y ist die stetige Fortsetzung von f in x_0 .
 Somit wäre $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ y & x = x_0 \end{cases}$ stetig.

10.4.2 Linksseitiger Grenzwert II.46

Die Funktion $f : (a, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in x_0 den linksseitigen Grenzwert y , mit Zuhilfenahme einer gegen x_0 konvergenten Folge:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y$$

10.4.3 Rechtsseitiger Grenzwert II.47

Die Funktion $f : (x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in x_0 den rechtsseitigen Grenzwert y , mit Zuhilfenahme einer gegen x_0 konvergenten Folge:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y$$

10.4.4 Grenzwert im Punkt II.47

Eine Funktion besitzt in einem Punkt x_0 dann einen Grenzwert y , wenn ihr links-/rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y$$

10.4.5 Grenzwert im Unendlichen II.49

Eine Funktion kann im Unendlichen einen Grenzwert besitzen. Z.B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

10.4.6 Sprungstelle II.50

Eine Funktion besitzt eine Sprungstelle im Punkt x_0 , wenn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

10.4.7 hebbare Unstetigkeit

Eine Funktion $f : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ hat in x_0 eine hebbare Unstetigkeit, falls:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y$$

existieren und übereinstimmen. Die Funktion $\bar{f} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ y & x = x_0 \end{cases}$ heißt stetige Fortsetzung von f .

10.4.8 Regeln von de l'Hospital II.86

Wenn $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x)}{g(x)}$ zu $\frac{\pm 0}{\pm 0}$ oder $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ führt, dann lässt sich der Ausdruck an der Stelle a durch die Ableitung von f und g ersetzen.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Um einen Ausdruck, der zu $0 \cdot \infty$ führt zu ersetzen, müssen die Funktionen einfach angepasst werden. So wird aus $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$. Hier muss nur beachtet werden, dass hier $\left(\frac{1}{g}\right)'$ abgeleitet wird.

10.4.9 Grenzwertbildung mithilfe des Taylorpolynoms

Wenn $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)}$ zu $\frac{\pm 0}{\pm 0}$ führt, lässt sich dies häufig durch eine Taylorentwicklung von Teilen von $\frac{f(x)}{g(x)}$ (z.B. Teile des Nenners und des Zählers) umgehen. Dabei reicht es zumeist, die ersten 3 bis 5 Glieder des Polynoms hinzuschreiben. Anschließend muss versucht werden, x so zu kürzen, dass die Terme höherer Potenz durch den Grenzübergang wegfallen, und nur noch ein (einfacher) Bruch übrig bleibt.

- Achtung, nur für Grenzübergang gegen 0.

10.4.10 wichtige Grenzwerte

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad n \geq 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0, \quad n > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = 1$

10.5 Logarithmus- und Exponentialfunktion II.55

10.5.1 Definition II.56

(eigentlich über Potenzreihen definiert)

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\sqrt[2^n]{x} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt[2^n]{x}} \right)$$

$\ln(x)$ ist eine stetige, streng monoton wachsende Funktion auf $\mathbb{R}_{>0}$ (II.57).

10.5.2 $\ln(x)$ -Rechenregeln II.57

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$
- $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$
- $\ln(x^r) = r \ln(x) \quad r \in \mathbb{Q}$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

10.5.3 e -Funktion II.59

Umkehrfunktion von $\ln(x)$ heißt

$$e^x := \exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \quad f : x \rightarrow \ln(x)$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad f^{-1} : x \rightarrow \exp(x)$$

e^x stetig und streng monoton wachsend auf \mathbb{R} .

10.5.4 e^x -Rechenregeln II.59

- $\forall_{\mathbb{R}_{>0}} : e^{\ln x} = x$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$
- $\forall x < 1 : e^x \leq \frac{1}{1-x}$
- $1 + x \leq e^x$
- $(e^{ax})' = a e^{ax}$
- Wachstumsverhalten der Exponentialfunktion
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad n \geq 0$

10.5.5 Allgemeine Exp. Funktion / Logarithmus II.62

$$\forall a > 0 : a^x = e^{\ln(a)x} \text{ bzw. } \forall x > 0 : x^b = e^{b \ln(x)}$$

$$\forall a > 0, a \neq 1, x > 0 : \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

10.6 Differenzierbare Funktionen II.64

10.6.1 Definition II.64

Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im inneren Punkt $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0) \end{aligned}$$

existiert.

Ist x_0 ein Randpunkt des Intervalls I mit $x_0 \in I$, so heißt f in x_0 links-/ bzw. rechtsseitig differenzierbar, wenn der links-/ bzw. rechtsseitige Grenzwert existiert. $f'(x_0)$ gibt die Steigung einer Tangenten von f in x_0 wieder. Die Prozedur des Ableiten ist eine lineare Abbildung $f : P(x) \rightarrow P'(x)$.

10.6.2 Kriterium für Differenzierbarkeit II.67

Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ und eine auf einer ε -Umgebung $U_\varepsilon(x_0) \subset I$ erklärte Funktion $r(x)$ gibt, so daß

$$\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$$

und

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)|x - x_0|$$

gilt.

10.6.3 Tangente II.68

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

10.6.4 Ableitung II.69

- 1-te Ableitung
 $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
- n-te Ableitung
 $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$

10.6.5 Ableitungsregeln II.72

- Summenregel II.72
 $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Produktregel II.72
 $(f g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Quotientenregel II.72
 $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- Kettenregel II.75
 $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

10.6.6 Ableitung der Umkehrfunktion II.78

Die stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei streng monoton und in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f([a, b]) \rightarrow [a, b]$ in $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bzw.

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Ist f stetig differenzierbar, dann ist auch f^{-1} stetig differenzierbar.

- Möglichst f in der Ableitung f' wieder vorkommen lassen, da dies sich anschließend mit Hilfe der Umkehrfunktion gegenseitig aufhebt. Z.B. $\tan(x)' = 1 + \tan^2(x)$.

10.6.7 Ableitung von wichtigen Funktionen

Alle Ableitungen nach x ($\frac{d}{dx} f(x)$).

- $a' = 0$
- $(ax^b)' = abx^{b-1}$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(e^{bx})' = be^{bx}$
- $\forall a > 0 : (a^x)' = \ln(a)a^x$
- $(v(x)^{u(x)})' = v(x)^{u(x)} \left(v'(x) \ln(u(x)) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$
- $\sin(x)' = \cos(x)$
- $\cos(x)' = -\sin(x)$
- $\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $\forall -1 < x < 1 : \arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\operatorname{arsinh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

10.6.8 Relatives Extremum II.80

Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$. Dies ist aber nicht hinreichend (nicht immer in umgekehrter Richtung gültig), da es sich auch um einen Sattelpunkt handeln könnte.

10.6.9 Satz von Rolle / Mittelwertsatz II.80

Die Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig und in (a, b) differenzierbar.

- Satz von Rolle (wenn $a = b$)
 $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$
- Mittelwertsatz
 $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- Verallgemeinerter Mittelwertsatz (wenn $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$) II.84
 $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

10.6.10 Charakteristika von Funktionen II.82

- konstante Funktion
Es gilt: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$
 $\Rightarrow f(x) = f(a)$
- beliebige Funktionen
Es gilt: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $f'(x) = g'(x)$
 $\Rightarrow f(x) = g(x) + f(a) - g(a)$

10.6.11 Monotoniekriterium II.84

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in (a, b) differenzierbar. Wenn für alle $x \in (a, b)$:

- $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend
- $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ ist monoton steigend
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend
- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton steigend

10.7 Kurvendiskussion Papula I.378

Bei einer Kurvendiskussion wird versucht möglichst viel über eine Funktion in Erfahrung zu bringen. Dabei kann man z.B. wie folgt folgendes Schema abarbeiten¹. Hier wird die Funktion $f(x)$ diskutiert.

10.7.1 Definitionsbereich / Definitionslücken

Angabe des Definitionsbereiches D . Auf Definitionslücken (z.B. wenn der Nenner eines Bruches Null wird) achten!!

10.7.2 Symmetrie

Angaben ob es sich um eine gerade oder ungerade Funktion handelt (siehe 10.3.6 auf Seite 17).

10.7.3 Nullstellen

Alle x_k Werte, bei der die Funktion den Wert Null annimmt $f(x_k) = 0$. Hierzu die Funktion am besten in Linearfaktoren (siehe 6.5 auf Seite 11) zerlegen, da hier die Nullstellen leichter abgelesen werden können. Eine Funktion vom Grad n kann bis zu n Nullstellen besitzen.

10.7.4 Y-Achsenabschnitt

Der Wert von $f(0)$ wird Y-Achsenabschnitt genannt.

¹entnommen aus: Lothar Papula; Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure Band 1; Abschnitt 3.5 (in 10. Auflage Seite 378)

10.7.5 Pole

Alle x_k Werte, an denen die Funktion den Wert $\pm\infty$ besitzt ($f(x_k) = \pm\infty$) werden *Polstellen* genannt. Wenn der Links-/Rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen

$$\lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) = \pm\infty,$$

handelt es sich um einen Pol ohne Vorzeichenwechsel, wenn nicht um einen mit Vorzeichenwechsel. Pole sind also Unstetigkeitsstellen, bzw. Definitionslücken, und lassen sich so auch finden (z.B. wenn der Nenner eines Bruches Null wird).

10.7.6 Ableitungen

Auflistung der (in der Regel die ersten drei) Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

10.7.7 Relative Extremwerte (Maxima und Minima)

Ein relatives Extremum an der Stelle $(x_k, f(x_k))$ liegt vor, wenn

$f'(x_k) = 0$ und die erste Ableitung die nicht verschwindet (alle Ableitungen von 1 bis $n - 1$ sind 0) eine geradzahlige Ableitung ist ($f^{(n)}(x_k) \neq 0$).

Sonderfall

$f'(x_k) = 0$ und $f''(x_k) \neq 0$

- relatives Minimum (Tiefpunkt) mit $f^{(n)}(x_k) > 0$.
- relatives Maximum (Hochpunkt) mit $f^{(n)}(x_k) < 0$.
- Die Extremwerte sind Absolut, wenn es in der Funktion kein größeren / kleineren Wert gibt. Siehe Wertebereich.

10.7.8 Wendepunkte, Sattelpunkte

Ein Wendepunkt kann als Extremwert der 1. Ableitung (die Steigung ändert ihr Vorzeichen) interpretiert werden. Er liegt an der Stelle $(x_k, f(x_k))$ liegt vor, wenn die 2. Ableitung 0, und die 1. Ableitung die daraufhin nicht verschwindet eine ungerade ist

$f''(x_k) = 0$ und $f^{(n+1)}(x_k) \neq 0$.

Sonderfall:

$f''(x_k) = 0$ und $f'''(x_k) \neq 0$.

10.7.9 Krümmung II.160

- konvexe (Linkskurve) Funktion, wenn stets: $f''(x_k) \geq 0$
- konkave (Rechtskurve) Funktion, wenn stets: $f''(x_k) \leq 0$

10.7.10 Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen

Das Verhalten von Funktionen im Unendlichen, wird von der Funktion $g(x)$ beschrieben, die der vorgegebenen Funktion $f(x)$ im Unendlichen immer ähnlicher wird.

- bei ganzrationalen Funktionen ist $g(x) = f(x)$
- bei gebrochenrationalen Funktion entspricht $g(x)$ dem ganzrationalen Anteil von $f(x)$ (Ergebnis einer Polynomdivision)
- bei echtgebrochenen Funktionen (Nennerpolynom von $f(x)$ hat einen höheren Grad als das Zählerpolynom) ist $g(x) = 0$

Asymptote im Unendlichen (bzw. an den Intervallgrenzen) sind die Werte die $f(x)$ an den Grenzen des Definitionsbereichs annimmt ($\pm\infty, 0$)

10.7.11 Wertebereich der Funktion

Hier wird das Intervall verlangt, in dem die Werte der Funktion liegen können. Hier kann man sich an den Werten der Asymptoten im Unendlichen und den Extremwerten orientieren.

10.7.12 Zeichnung der Funktion in einem geeigneten Maßstab

Hier wird eine Zeichnung verlangt, die alle Extremwerte, Pole, Wende- und Sattelpunkte beinhaltet. Der Verlauf zwischen diesen Punkten kann intuitiv aus dem Handgelenk ergänzt werden. Wenn es sich um eine periodische Funktion handelt, reicht es 2 - 3 Perioden zu zeichnen.

11 Integralrechnung II.92

Mithilfe der Integralrechnung lässt sich der Flächeninhalt unter einer Kurve bestimmen.

11.1 Ober- und Untersummen II.92

11.1.1 Zerlegung (Partition) II.92

Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dann bildet die Menge der $n + 1$ reellen Zahlen

$$P = \{x_0, \dots, x_n\}$$

eine Partition von $[a, b]$.

$$\|P\| = \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k - x_{k-1}\}$$

heißt Feinheit von P .

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$

Eine äquidistante Zerlegung ist wie folgt definiert

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$$

11.1.2 Riemann-Summe II.103

Sei $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, \dots, n)$$

Dann heißt

$$S(f, P) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

eine Riemann-Summe.

- linke Riemann-Summe für $\xi_k = x_{k-1}$ bei äquidistanter Zerlegung

$$S(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) \frac{b-a}{n} \right)$$

- rechte Riemann-Summe für $\xi_k = x_k$ bei äquidistanter Zerlegung

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n \left(f \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) \frac{b-a}{n} \right)$$

- untere Riemann-Summe für $m_k := \inf \{f(x) | x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \delta x_k$$

- obere Riemann-Summe für $M_k := \sup \{f(x) | x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$

$$\bar{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \delta x_k$$

11.2 Riemann Integral II.100

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ wenn folgende Grenzwerte existieren und miteinander Übereinstimmen. Für diesen Grenzwert schreibt man

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \bar{S}(f, P)$$

Im folgenden wird mit integrierbar immer Riemann-integrierbar gemeint (es gibt noch andere Integrierbarkeitsbegriffe).

Folgende Funktionen sind (Riemann) integrierbar

- monotone, beschränkte Funktionen
- stetige Funktionen

11.3 Eigenschaften von Integralen II.99

Sei $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$

- integrieren entspricht einer linearen Abbildung:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- "Dreiecksungleichung"

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- Sei $\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$.
Dann folgt $m \leq \int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx \leq M$
- Mittelwertsatz der Integralrechnung
 $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b - a)$
- Das Integrieren ist eine lineare Abbildung $f : P(x) \rightarrow \int P(x)$
- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| (b - a)$

11.4 Flächen- und Stammfunktion / unbestimmtes Integral II.103

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar

Flächenfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

unbestimmtes Integral

$$F(x) := \int_c^x f(t) dt \quad (x, c \in [a, b])$$

Stammfunktion

$$F'(x) := f(x) \quad (x \in [a, b])$$

- Alle drei Begriffe sind bis auf Feinheiten gleichwertig.
- Es gibt mehrere verschiedene $F(x)$ zu einer gegebenen $f(x)$ die sich nur durch eine Konstante unterscheiden
- Stammfunktionen sind in $[a, b]$ gleichmäßig stetig
- $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

– Integrieren ist Umkehroperation des Differenzieren und umgekehrt

11.4.1 partielle Integration / Produktintegration II.123

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

- g und f auf jeden Fall incl. Ableitungen heraus-schreiben
 - auf jeden Fall Probe (Ableiten) machen, man vertut sich sehr schnell
 - $p(x) e^x$ bzw. $p(x) \sin(x)$, ... sind auf diese Weise behandelbar
- Auf jeden Fall Probe!!!

11.4.2 Partialbruchzerlegung

Durch Partialbruchzerlegung lassen sich rationale Funktionen so schreiben, dass sie sich leichter integrieren lassen. Dabei kann folgendes Schema angewandt werden.

1. Polynomdivision, und die Funktion in der Form $\frac{z(x)}{n(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{n(x)}$ schreiben.
2. Den Rest $r(x)$ durch Partialbruchzerlegung vereinfachen, dazu $n(x)$ in Linearfaktoren $\frac{z(x)}{n(x)} = g(x) + \frac{A_1}{n_1(x)} + \dots + \frac{A_k}{n_k(x)}$ zerlegen. Jeder dieser Linearfaktoren wird zu einem Nenner eines Partialbruchs.
 - Falls ein Linearfaktor $m > 1$ mal vorkommt, muss man ihn in mehrfach als Nenner verwenden, und zwar so, das er als ganzen in den Potenzen 1 bis m vorkommt.
 - Falls sich ein Nenner vom Rang m (im Reellen) nicht mehr weiter Zerlegen lässt, ist es möglich ihn als ganzes beizubehalten. Dafür muss im Zähler ein Polynom vom Grad $m - 1$ angenommen Werden, d.h. m Unbekannte stehen vor den jeweiligen x Potenzen auf dem Bruchstrich.
3. Jedem Partialbruch eine Unbekannte $A_k \in \mathbb{K}$ zuordnen.
4. Hauptnenner des Partialbruchs bilden und ausmultiplizieren
5. Nach gleichen Potenzen von x sortieren.
6. Unbekannte durch Koeffizientenvergleich bestimmen.
 - mit Hilfe lin. Gleichungssystem oder

- durch Einsetzen passender Werte für x , so das immer alles bis auf eine Term den Faktor 0 hat, und so wegfällt. So lässt sich dieser Term dann direkt auswerten.

7. Kontrolle!!!

8. Stammfunktion der Umgeformten Gleichung bestimmen. Fertig!!

11.4.3 Substitution II.126

$$\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(x) dt = \left(\int f(x) dx \right)_{x=\phi(t)}$$

$$\int f(x) dx = \left(\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt \right)_{t=\phi^{-1}(x)}$$

1. Gebrauchsanweisung

- (a) Eine passende Ersetzung suchen
 - i. $t = g(x)$
 - ii. diese Ableiten $\frac{dt}{dx} = g'(x) = \dots$
 - iii. umstellen $dx = \frac{dt}{g'(t)} = \dots$
- (b) Im Integral Substituieren mit Hilfe von (a).i (bzw. $x = g^{-1}(t) = \dots$) und (a).iii
- (c) Versuchen Stammfunktion zu bilden
 - i. wenn es nicht klappt, evtl. andere Substitution versuchen
 - ii. evtl. passend klammern, um bekannte Integrale zu Nutzen
- (d) Im Ergebnis (Stammfunktion) zurücksostituieren mit (a).i

2. Gebrauchsanweisung

- (a) Eine passende Ersetzung suchen
 - i. $x = \phi(t)$
 - ii. diese Ableiten $\frac{dx}{dt} = \phi'(t) = \dots$
 - iii. umstellen $dx = \phi'(t) dt = \dots$
- (b) Umkehrfunktion bilden $t = \phi^{-1}(x)$
- (c) Im Integral Substituieren mit Hilfe von (a).i und (a).iii
- (d) Versuchen Stammfunktion zu bilden
 - i. wenn es nicht klappt, evtl. andere Substitution versuchen
 - ii. evtl. passend klammern, um bekannte Integrale zu Nutzen
- (e) Im Ergebnis (Stammfunktion) zurücksostituieren mit (a).i

- Beide Methoden äquivalent durch Regel der Ableitung der Umkehrfunktion.
- In der Tabelle 2 auf der nächsten Seite hat man eine Übersicht von geeigneten Substitutionen.

- So Klammern und Substituieren, das es auf etwas bekanntes (z.B. Ableitungen von Trigonometrischen-, Hyperbolischen- oder Area-funktionen) zurückführen lässt.

- Auf jeden Fall Probe!!!

11.5 Uneigentliche Integrale II.131

Unter uneigentlichen Integralen versteht man uneingeschränkte Integrale (z.B. $\int_{-\infty}^{+\infty}$) oder Integrale über uneingeschränkte Funktionen (z.B. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$).

Sei $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Für alle Teilintervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b)$ existiert das Riemannsches Integral. Die Funktion heißt *uneigentlich integrierbar* auf $[a, b)$, wenn

$$\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

existiert. Entsprechend $-\infty \leq a < b < \infty$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Wenn beide Grenzen unbeschränkt sind, lässt sich dies durch Zerlegung des Integrationsbereiches lösen.

11.5.1 Majorantenkriterium II.133

$\forall_{[a,b)} 0 \leq f(x) \leq g(x)$: Konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x) dx$, so auch $\int_a^b f(x) dx$ und es gilt

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

- Hilft beim abschätzen, ob es eine Lösung geben kann, und in welchen Intervall sie liegen wird.

11.5.2 Betragskriterium II.134

Wenn $\int_a^b |f(x)| dx$ konvergiert \Rightarrow Konvergenz von $\int_a^b f(x) dx$ und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

12 Taylorentwicklung II.141

Idee: approximiere Funktionen durch geeignete Polynome \Rightarrow einfacher zu differenzieren / integrieren.

Tabelle 2: Substitution zur unbestimmten Integration (R ist eine rationale Funktion in x, y)

Funktion	Methode	t	x
$R(x)$	Polynomdivision + Partialbruchzerlegung		
$R(x, \sqrt[k]{ax+b})$	Substitution	$t = \sqrt[k]{ax+b}$	$x = \frac{t^k}{a} - \frac{b}{a}$
$R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})$	Substitution	$t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$	$x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a}$
$R(\sin(ax), \cos(ax))$	Substitution	$t = \tan(\frac{x}{2})$	$x = 2\arctan(t)$
$R(e^{ax}, e^{-ax})$	Substitution	$t = e^{ax}$	$x = \frac{\ln(t)}{a}$
$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$	Substitution	$t = \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$ bzw. $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$	

12.1 Satz von Taylor II.141

Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $[a, b]$ n -mal stetig differenzierbar und im offenen Intervall (a, b) $(n + 1)$ -mal differenzierbar. Sei $x_0 \in [a, b]$. Dann gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ ein ξ mit $x_0 < \xi < x$ oder $x < \xi < x_0$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

12.1.1 Taylorpolynom / Restglied II.141

- Allgemein gilt

$$f(x) = T_n(f, x, x_0) + R_n(f, x, x_0)$$

- Taylorpolynom der Funktion f vom Grad n um den Entwicklungspunkt x_0 .

$$T_n(f, x, x_0) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)$$

- Restglied in Lagrangeform

$$R_n(f, x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

mit $\xi \in [x_0, x] \cup [x, x_0]$

- Restglied in Integralform

$$R_n(f, x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

- wichtige Reihen siehe 8.4 auf Seite 14 und 9.5 auf Seite 15.

12.2 Taylorreihe II.152

Sei $f [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, und $x \in [a, b]$. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

heißt Taylorreihe von f um x_0 . Sie konvergiert an x genau dann gegen $f(x)$ wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x, x_0) = 0$$

- Nicht jede Taylorreihe konvergiert
- Konvergenz kann evt. nur für Intervalle bestehen
- wichtige Reihen siehe 8.4 auf Seite 14 und 9.5 auf Seite 15.

13 Funktionen mehrerer Veränderlicher II.199

13.1 Grundbegriffe II.199

13.1.1 Euklidische Norm II.199

Sei $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ die euklidische Norm von \vec{x} .

- in \mathbb{R}^2 über Pythagoras
- Abstand erfüllt Dreiecksungleichung
- Punkte konstanter Norm ergeben Kugeloberfläche (in \mathbb{R}^3)
- Auch andere Abstände denkbar: z.B: $\|\vec{x}\|_{max} := \max_{j=1, \dots, n} \{|x_j|\}$
 - auch hier Dreiecksungleichung
 - ergibt die selbe Analysis ($\|\vec{x}\|_{max} \leq \|\vec{x}\| \leq \sqrt{n} \|\vec{x}\|_{max}$)
- Abstand zweier Punkte über Differenz: $\|\vec{x} - \vec{y}\|$

13.1.2 Konvergenz II.202

Eine Folge $(\vec{a}_k) \in \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen den Grenzwert $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, wenn jede Komponentenfolge (a_{kj}) ($j = 1, \dots, n$) gegen a_j konvergiert.

- Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist, d.h. wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ einen $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\forall k, l > k_0 : \|\vec{a}_k - \vec{a}_l\| < \epsilon$

13.1.3 Randpunkt / Häufungspunkt II.200

Ein $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Randpunkt* von $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn für jede ϵ -Umgebung $U_\epsilon(\vec{a}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < \epsilon\}$ sowohl $U_\epsilon(\vec{a}) \cap M \neq \emptyset$ als auch $U_\epsilon(\vec{a}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$ gilt.

Ein \vec{a} heißt *Häufungspunkt* von M , falls es zu jeder ϵ -Umgebung $U_\epsilon(\vec{a})$ ein Element $\vec{x}_\epsilon \neq \vec{a}$ von M mit $\vec{x}_\epsilon \in U_\epsilon(\vec{a})$ gibt.

Ein $\vec{a} \in M$ heißt *innerer Punkt* $\Leftrightarrow \vec{a}$ kein *Randpunkt* von M .

- Jede unendliche beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt (Satz von Bolzano-Weierstraß).

13.1.4 Abgeschlossen / Kompakt

M heißt *abgeschlossen*, wenn jeder Randpunkt von M zu M gehört.

M heißt *kompakt*, falls M beschränkt und abgeschlossen ist.

13.2 Stetigkeit und Grenzwert II.203

13.2.1 Stetigkeit II.203

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, heißt *stetig* in $\vec{x}_0 \in D$, wenn für jede Folge (\vec{x}_n) , mit $\vec{x}_n \rightarrow \vec{x}_0$ gilt: $f(\vec{x}_n) \rightarrow f(\vec{x}_0)$.

Sie heißt *gleichmäßig stetig*, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein δ gibt, so daß

$$\forall_{\vec{x}, \vec{x}_0} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| < \epsilon$$

Eine Funktion $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) heißt *stetig* in $\vec{x}_0 \in D$, falls jede Komponente $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$) stetig ist. $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$

- Folgenkriterium aus \mathbb{R}^1 anwendbar.
- wenn f und g stetig \rightarrow folgende Funktionen sind stetig
 - $f + g$
 - fg
 - $\frac{f}{g}$ falls $g(\vec{x}_0) \neq 0$
 - $g \circ f$ bzw. $f \circ g$ falls Definitions- und Wertebereiche passen
- Sei $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) injektiv, in $\vec{x}_0 \in D$ stetig mit kompakten Definitionsbereich D . Dann ist die Umkehrfunktion $\vec{f}^{-1} : \vec{f}(D) \rightarrow D$ in $\vec{f}(\vec{x}_0) \in \vec{f}(D)$ stetig.

- $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$ habe kompakten Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei stetig \Rightarrow
 - \vec{f} gleichmäßig stetig auf D
 - $\vec{f}(D)$ kompakt

13.2.2 Grenzwert II.205

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$), hat in $\vec{x}_0 \in D$ den Grenzwert g , falls für jede Folge (\vec{x}_k) mit $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = g$$

Wir schreiben auch $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = g$

- wenn der Grenzwert existiert, so ist die Funktion

$$\tilde{f}(\vec{x}) := \begin{cases} f(\vec{x}) & \vec{x} \in D, \vec{x} \neq \vec{x}_0 \\ g & \vec{x} = \vec{x}_0 \end{cases}$$

stetig an \vec{x}_0 .

13.2.3 (relative) Maxi-/Minima II.207

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) hat in $\vec{x}_0 \in D$ ein *relatives Minimum (Maximum)*, wenn es eine Umgebung $U_\epsilon(\vec{x}_0)$ gibt, so daß $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ ($f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$) für alle $\vec{x} \in U_\epsilon(\vec{x}_0)$.

$\vec{x}_0 \in D$ heißt *absolutes Minimum (Maximum)*, wenn $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ ($f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$) für alle $\vec{x} \in D$.

- Wenn f stetig, und D kompakt \Rightarrow es existiert mindestens ein Maximum und ein Minimum auf D (an den Rändern).

13.3 Partielle Ableitung II.208

13.3.1 Partielle Differenzierbarkeit II.208

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) eine Funktion und $\vec{x} \in D$. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_j) - f(\vec{x})}{h} = f_{x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})$$

für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ existiert, so heißt f in \vec{x} *partiell* nach x_j *differenzierbar*.

13.3.2 Gradient II.210

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) sei in $\vec{x} \in D$ nach allen x_j ($j = 1, \dots, n$) partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\text{grad} f(\vec{x}_0) := \nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

der Gradient von f im Punkt \vec{x}_0 .

- ∇ wird nabla gesprochen (ist kein echter griechischer Buchstabe)
- Der Gradient gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f in \vec{x}_0 an

13.3.3 Richtungsableitung II.213

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$), $\vec{x} \in D$, $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ Einheitsvektor. Falls

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}) - f(\vec{x})}{h} = \nabla f(\vec{x}) \vec{e}$$

existiert, heißt f in \vec{x} differenzierbar in Richtung \vec{e} und $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x})$ heißt Richtungsableitung von f in Richtung \vec{e} .

- Partielle Ableitung $\hat{=}$ Richtungsableitung in Richtung der j -ten Koordinate

13.3.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung II.215

Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) sei nach der Variablen x_k partiell differenzierbar. Im Punkt $x_0 \in D$ existiert die partielle Ableitung der Funktion $f_{x_k} : D \rightarrow \mathbb{R}$ nach x_j . Dann bezeichnet man

$$\frac{\partial f_{x_k}}{\partial x_j}(x_0) = f_{x_k x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)$$

als partielle Ableitung zweiter Ordnung der Funktion f nach den Variablen x_k und x_j . Entsprechend werden partielle Ableitungen höherer Ordnung erklärt.

13.3.5 Hessematrix Q_A II.238

Die Hessematrix ist wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} H(\vec{x}_0) &= (f_{x_j x_k}(x))_{j,k=1,\dots,n} \\ &= \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \dots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \dots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- ist symmetrisch, falls $f \in C^2(D)$ ist

13.3.6 Differenzierbarkeitsklassen II.230

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$). Wir schreiben

$$f \in C^j(D)$$

(f gehört zu Klasse C^j) falls sämtliche partiellen Ableitungen bis zur j -ten Ordnung existieren und stetig sind.

13.3.7 Satz von Schwarz / Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen II.230

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f \in C^j(D)$. Dann gilt: Die mehrfache Ableitung $f_{x_{k_1}, \dots, x_{k_j}}$ ist von der Reihenfolge der partiellen Ableitungen unabhängig, d.h. für jede Permutation der Indizes ergibt sich das selbe Resultat.

13.3.8 Parameterabhängige Integrale II.216

Sei $f(x, t)$ in $D := [a, b] \times [\alpha, \beta]$ stetige, reellwertige Funktion mit stetiger partieller Ableitung $f_t(x, t)$. Dann ist für beliebige $x_0 \in [a, b]$ die Funktion $F(y, t) := \int_{x_0}^y f(x, t) dx$ stetig und besitzt partielle Ableitungen $F_y(y, t) = f(y, t)$ und $F_t = \int_{x_0}^y f_t(x, t) dt$.

- eine art. Vertauschbarkeit von Grenzwerten

14 Differenzierbare Funktionen im \mathbb{R}^n II.219

14.1 Der Differenzierbarkeitsbegriff II.219

14.1.1 Definition für $\dim(\text{Bild}) = 1$ II.219

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ($D \subseteq \mathbb{R}^n$), $x_0 \in D$ ein innerer Punkt von D . f heißt differenzierbar in \vec{x}_0 , wenn es ein $\vec{c} \in \mathbb{R}^k$ und eine Funktion $r : U_\varepsilon(\vec{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} r(\vec{x}) = 0$$

und

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{c}(\vec{x} - \vec{x}_0) + r(\vec{x}) \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

gilt. Dies entspricht einer linearen Approximierbarkeit von f .

- Wenn eine Funktion f im inneren Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist, dann ist sie dort auch stetig.
- f differenzierbar in $\vec{x}_0 \Rightarrow$ es existieren alle partiellen Ableitungen von f in \vec{x}_0 , und es gilt $\vec{c} = \text{grad}f(\vec{x}_0)$
- Existieren alle partiellen Ableitungen $f_{x_j}(\vec{x})$ und sind stetig in $\vec{x}_0 \Rightarrow f$ ist differenzierbar in \vec{x}_0
- Differenzierbar ist Erweiterung der Existenz des Gradienten um die Bedingung der Stetigkeit
- Gleichung der Tangentialebene:
 $x_{n+1} = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$
 - Ebene befindet sich in einem Raum mit der Dimension $n + 1$
 - Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}(\vec{x}_0) = (f_{x_1}(\vec{x}_0), \dots, f_{x_n}(\vec{x}_0), -1)$

14.1.2 Funktionalmatrix oder Jacobimatrix II.223

Sei $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) eine Funktion, $\vec{x}_0 \in D$ ein innerer Punkt. $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ heißt in \vec{x}_0 differen-

zierbar, falls alle Komponentenfunktionen f_j differenzierbar sind.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0) &= J_{\vec{f}} \\ &= \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x}_0) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_k(\vec{x}_0)}{\partial x_j} \right)_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \end{aligned}$$

heißt *Funktionalmatrix* oder *Jacobimatrix* von \vec{f} in \vec{x}_0 .

- Zeilen der Jacobimatrix = Gradienten der Komponentenfunktionen.

Differenzierbarkeit mehrdimensionaler Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ wenn:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{r}(\vec{x}) \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

14.1.3 Kettenregel II.225

Sei $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($D \subset \mathbb{R}^n$), $\vec{g} : \vec{f}(D) \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\vec{x}_0 \in D$ innerer Punkt, $\vec{f}(\vec{x}_0) \in \vec{f}(D)$ innerer Punkt. Sind f in \vec{x}_0 und \vec{g} in $\vec{f}(\vec{x}_0)$ differenzierbar, so ist die Verkettung $\vec{g} \circ \vec{f}$ in \vec{x}_0 differenzierbar mit

$$\frac{d(\vec{g} \circ \vec{f})}{d\vec{x}}(\vec{x}_0) = \frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}(\vec{f}(\vec{x}_0)) \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0)$$

14.2 Lokale Extrema

14.2.1 Notwendige Bedingung für lokale Extrema II.238

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$) differenzierbar und besitzt f in D ein relatives Extrema in \vec{x}_0 , dann gilt $\nabla f'(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

14.2.2 Quadratische Form / Definit II.239

Eine *quadratische Form* auf \mathbb{R}^n ist eine Abbildung

$$Q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad Q_A(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

für eine symmetrische $n \times n$ -Matrix A .

Q_A heißt *positiv definit* (bzw. *negativ definit*), wenn

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0} : Q_A(\vec{x}) > 0$$

(bzw. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0} : Q_A(\vec{x}) < 0$) gilt.

Q_A heißt *indefinit*, falls

$$\exists \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0} : Q_A(\vec{x}) < 0, Q_A(\vec{y}) > 0$$

gilt.

- $\frac{dQ_A(\vec{x})}{d\vec{x}} = 2A\vec{x}$

14.2.3 Hinreichende Bedingungen für lokale Extremstellen II.240

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gehört zu Klasse $C^2(D)$. Im Punkt $\vec{x}_0 \in D$ gelte $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Dann besitzt f in \vec{x}_0 ein relatives Maximum (bzw. Minimum), falls die Hesse-Matrix $H(\vec{x}_0)$ negativ definit (bzw. positiv definit) ist. Ist $H(\vec{x}_0)$ indefinit, so kann f in \vec{x}_0 keine Extremalstelle besitzen.

- $H(\vec{x}_0)$ positiv (negativ) definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte von $H(\vec{x}_0)$ positiv (negativ) sind
- $H(\vec{x}_0)$ indefinit \Leftrightarrow Es gibt sowohl positive, als auch negative Eigenwerte von $H(\vec{x}_0)$

14.2.4 Sonderfall für $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) sei in Klasse $C^2(D)$ und es gelte $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$. Dann gilt mit

$$d = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0, y_0)$$

- Ist $d > 0$ und $f_{xx} > 0 \Rightarrow f$ hat relatives Minimum an (x_0, y_0)
- Ist $d > 0$ und $f_{xx} < 0 \Rightarrow f$ hat relatives Maximum an (x_0, y_0)
- Ist $d < 0 \Rightarrow f$ hat kein Extremum an (x_0, y_0)

14.3 Implizite Funktionen II.242

14.3.1 Extremwerte unter Nebenbedingungen / Lagrange-Multiplikation II.250

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^l$ (l -Nebenbedingungsfunktionen zu Vektor zusammengefasst) mit $l < n$ seien in $C^1(D)$. Sei $\vec{x}_0 \in D$ mit $\vec{g}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ und $\text{Rang} \left(\frac{d\vec{g}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0) \right) = l$ (Rang maximal). Weiter sei $f(\vec{x}_0)$ ein relatives Extremum der Menge $\left\{ f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in D, \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0} \right\}$ dann gibt es l -Lagrange Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall k \in [1, n] : f_{x_k}(\vec{x}_0) + \sum_{j=1}^l \lambda_j (g_j)_{x_k}(\vec{x}_0) = 0$$

(Also $\nabla L = \vec{0}$, wobei $L = f(\vec{x}) + \sum_{j=1}^l \lambda_j g_j(\vec{x})$)

14.3.2 Implizite Funktionen auf \mathbb{R}^2

Sei $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, ($D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen), stetig und $F(x_0, y_0) = 0$, weiter sei F streng monoton wachsend (oder fallend) bezgl. y (für jedes feste x). Dann gibt es ein Rechteck

$$R = I \times J = [x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0] \times [y_0 - \beta_0, y_0 + \beta_0]$$

und eine auf I stetige Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x, g(x)) = 0$ für $x \in I$, und $F(x, y) \neq 0$ sonst auf \mathbb{R} .

Ist F stetig differenzierbar aus D , so ist auch $g(x)$ stetig differenzierbar in I mit

$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$$

14.3.3 Satz über implizite Funktionen II.247

Seien $D_n \subseteq \mathbb{R}^n$ und $D_m \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Die Funktionen $\vec{f} : D_n \times D_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ gehören der Klasse $C_1(D_n \times D_m)$ an. Sei $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in D_n \times D_m$ mit $\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$ und $\det \left((f_k)_{y_j}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \right)_{k,j=1,\dots,m} \neq 0$ (Jacobi Matrix). Dann gibt es offene Umgebungen $U_{\varepsilon_n}(\vec{x}_0)$ und $U_{\varepsilon_m}(\vec{y}_0)$, so dass für jeden Punkt $\vec{x} \in U_{\varepsilon_n}(\vec{x}_0)$ genau ein $\vec{g}(\vec{x}) \in U_{\varepsilon_m}(\vec{y}_0)$ mit $\vec{f}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$ existiert.

- Die Ableitung von $\vec{g}(\vec{x})$ lässt sich berechnen, indem man $\vec{f}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x}))$ mithilfe der Kettenregel ableitet, und dann nach $\vec{g}'(\vec{x})$ umstellt.

15 Integration im \mathbb{R}^n II.256

15.1 Riemann-Integrale über Intervallen

15.1.1 Zerlegung / Feinheit

Der Grundbereich über dem die Integration stattfinden soll heiße $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Dieser hat die Zerlegung Z_k der Intervalle $[a_k, b_k]$, $k = 1, \dots, n$. Die Feinheit der Zerlegung ist gegeben durch $\|Z\| = \max_{k=1,\dots,n} \|Z_k\|$. Zur Zerlegung Z von Q bezeichnen wir mit Q_1, \dots, Q_N die Teile von Q , also $Q = \cup_{l=1}^N Q_l$

15.1.2 Definition Integral

Fur $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiere Integral

$$\int_Q f(\vec{x}) \, d\vec{x} := \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} \sum_{l=1}^N |Q_l| f(\vec{\xi}_l)$$

mit $\vec{\xi}_l \in Q_l$ ($l = 1, \dots, N$). Wobei $|Q_l| =$ "Volumen" von Q_l bezeichnet, also bei $Q_l = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n] \Rightarrow |Q_l| = \prod_{l=1}^n |d_l - c_l|$. Falls der Grenzwert existiert, so heißt f Riemann-integrierbar.

15.1.3 Eigenschaften von Integralen

- Linearität
 $\int_Q (f + g) \, d\vec{x} = \int_Q f \, d\vec{x} + \int_Q g \, d\vec{x}$
 $\int_Q c f \, d\vec{x} = c \int_Q f \, d\vec{x}$

- Additivität
 $\int_{[a,b] \times [c,d]} f \, d\vec{x} = \int_{[a,l] \times [c,d]} f \, d\vec{x} + \int_{[l,b] \times [c,d]} f \, d\vec{x}$
- stetige Funktionen sind integrierbar
- wenn f, g integrierbar \Rightarrow
 - $|f|$ integrierbar
 - $f g$ integrierbar
 - $\frac{f}{g}$ integrierbar (falls $g \neq 0$)
 - $\max(f, g)$ integrierbar
 - $\min(f, g)$ integrierbar

- Monotonie
 $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$ auf $Q \Rightarrow \int_Q f(\vec{x}) \, d\vec{x} \leq \int_Q g(\vec{x}) \, d\vec{x}$
- $\int_Q 1 \, d\vec{x} = |Q|$
- Mittelwertsatz
 f integrierbar auf Q , $m \leq f(\vec{x}) \leq M$ auf $Q \Rightarrow m|Q| \leq \int_Q f(\vec{x}) \, d\vec{x} \leq M|Q|$
- Dreiecksungleichung
 $\left| \int_Q f(\vec{x}) \, d\vec{x} \right| \leq \int_Q |f(\vec{x}) \, d\vec{x}| \leq \|f\|_Q |Q|$
wobei $\|f\|_Q := \sup \{ |f(\vec{x})| \mid \vec{x} \in Q \}$

15.2 Integrierte Integrale über Intervallen II.263

15.2.1 Satz von Fubini II.263

Sei $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $Q := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \times_{k=1}^n [a_k, b_k]$ ein Quader.

Existiert fur jedes x_k

$$h(x_k) := \int_{I_k} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

wobei

$$I_k = \{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \mid a_j \leq x_j \leq b_j\}$$

dann existiert das Integral

$$\int_{a_k}^{b_k} h(x_k) \, dx_k$$

und es gilt $\int_Q f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{a_k}^{b_k} h(x_k) \, dx_k$ bzw. $\int_Q f = \int_{a_k}^{b_k} \left(\int_{I_k} f \right)$.

Existiert fur jedes $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in I_k$ das Integral $g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = \int_{a_k}^{b_k} f(\vec{x})$ dann existiert das integrierte Integral

$$\int_{I_k} g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

und ist gleich $\int_Q f(\vec{x}) \, d\vec{x}$. Es gilt auch $\int_Q f = \int_{I_k} \left(\int_{a_k}^{b_k} f \right)$

- speziell für $n = 2$
 $Q = [a, b] \times [c, d]$
 Existiert für $x \in [a, b]$ das Integral
 $h(x) = \int_c^d f(x, y) dy \Rightarrow \int_Q f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$
 Existiert für $y \in [c, d]$ das Integral
 $h(x) = \int_a^b f(x, y) dx \Rightarrow \int_Q f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$

15.2.2 Charakteristische Funktion

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mit $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\chi_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in A \\ 0 & \vec{x} \notin A \end{cases}$ bezeichnen wir die *charakteristische Funktion* von A .

15.3 Riemann Integrale über beschränkte Mengen

15.3.1 Volumen einer Menge II.269

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge. Es existiere $\int_D 1 dx = \int_D dx$. Dann heißt $V(D) = \int_D dx$ das *Volumen der Menge D* . In diesem Fall heißt D *messbar*. Ist $V(D) = 0$, so heißt D eine *Nullmenge*.

Sei $Q = \times_{j=1}^n [a_j, b_j]$ ein Quader, $D \subseteq Q$. Kennt man das $n - 1$ dimensionale Volumen $V(x_n)$ für jedes x_n , so gilt $V(D) = \int_{a_n}^{b_n} V(x_n) dx_n$ (Prinzip von Cavalieri).

15.3.2 Riemannsches Integral

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion. Sei Q ein Quader mit $D \subseteq Q$. Dann heißt

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_Q f(\vec{x}) \chi_D(\vec{x}) d\vec{x}$$

das *Riemannsches Integral* von f über D .

- **Additivität**
 $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, und $f : D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\int_{D_1 \cup D_2} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{D_1} f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{D_2} f(\vec{x}) d\vec{x}$

15.3.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, messbar, f integrierbar. Dann gibt es eine Zahl $\eta \in [\inf_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}), \sup_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})]$ mit $\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \eta V(D)$.

- $V(D) = 0 \Rightarrow \int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = 0$

15.3.4 Zylindermengen II.275

Folgendes sind *Zylindermengen*.

Sei $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ dann folgt hieraus $\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$.

Sei $D = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$ dann folgt hieraus $\int_D f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$.

15.3.5 Substitutionsregel II.278

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar. Sei Q ein Quader mit $D \cup \text{Rand}(D) \subseteq Q$ und $\vec{g} : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, die auf D umkehrbar ist.

Gilt dann $\det \frac{d\vec{g}}{d\vec{x}}(\vec{x}) \neq 0$ für alle $\vec{x} \in D$, so gilt für jedes stetige $f : g(D) \cup g(\text{Rand}(D)) \rightarrow \mathbb{R}$ die Substitutionsregel:

$$\int_{\vec{g}(D)} f(\vec{y}) d\vec{y} = \int_D f(\vec{g}(\vec{x})) \left| \det \frac{d\vec{g}}{d\vec{x}}(\vec{x}) \right| d\vec{x}$$

16 Integralsätze II.285

16.1 Kurvenintegrale II.285

16.1.1 glatte Kurve

Sei $\vec{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige differenzierbare Funktion und $f'(t) \neq \vec{0}$ für $t \in [a, b]$.

Dann heißt \vec{f} und die Punktmenge $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \exists t \in [a, b] : \vec{x} = \vec{f}(t)\}$ eine *glatte Kurve*. t heißt *Parameter* der Kurve, $[a, b]$ *Parameterintervall*.

f heißt *stückweise glatt*, wenn es in den Teilintervallen einer Zerlegung $[a, b] = [a, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, b]$ glatt ist, und somit stetig.

16.1.2 geschlossene / doppel-punktfreie Kurve II.286

Eine Kurve $\vec{f}(a) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, wenn $\vec{f}(a) = \vec{f}(b)$. Ist \vec{f} injektiv auf $[a, b]$, so heißt \vec{f} *doppel-punktfrei*.

- doppel-punktfrei \Rightarrow Es ex. keine Teilkurve, die geschlossen ist

16.1.3 Äquivalente Parametrisierung einer Kurve II.287

Durch $\vec{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{f} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ werde jeweils eine stückweise glatte Kurve dargestellt. Weiter existiere eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : [a, b] \rightarrow$

$[\tilde{a}, \tilde{b}]$ mit $\psi(a) = \tilde{a}$, $\psi(b) = \tilde{b}$ und $\psi'(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$, und es gelte

$$\forall_{[a,b]}^t : \vec{f}(t) = \vec{f}(\psi(t))$$

Dann heißen \vec{f}, \vec{f} *zueinander äquivalente Darstellungen* der Kurve

$$K = \left\{ \vec{x} \mid \exists_{[a,b]}^t : \vec{x} = \vec{f}(t) \right\} = \left\{ \vec{x} \mid \exists_{[\tilde{a},\tilde{b}]}^{\tilde{t}} : \vec{x} = \vec{f}(\tilde{t}) \right\}$$

16.1.4 Tangente II.287

Sei K eine stückweise glatte Kurve, die durch $\vec{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dargestellt werde. Der Vektor $\vec{f}'(t)$ heißt *Tangentenvektor an K im Punkt $\vec{f}(t)$* ,

$$\vec{f}'_0(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$$

heißt *Tangenteneinheitsvektor* im Punkt $\vec{f}(t)$. Die Gerade

$$\vec{f}(t) + \lambda \vec{f}'_0(t)$$

heißt *Tangente an K im Punkt $\vec{f}(t)$* .

- Die Tangenten sind unabhängig von der Parametrisierung ($\vec{f} = \vec{f} \circ \psi$)
 $\vec{f}'_0(t) = \vec{f}'_0(\psi(t))$

16.1.5 Länge einer Kurve II.288

Durch f werde eine glatte, doppeltpunktfreie Kurve K dargestellt. Das Integral

$$L(K) = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt$$

heißt *Länge der Kurve K* .

- Falls Doppelpunkte vorhanden sind \Rightarrow Kurve Auftrennen, bzw. Nullmengen weglassen
- Die Länge einer Kurve ist unabhängig von der Darstellung (Parametrisierung)

$$\int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|\vec{f}'(\tilde{t})\| d\tilde{t}$$

16.1.6 Bogenlänge II.291

Sei K eine glatte doppeltpunktfreie Kurve, die durch $\vec{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben sei. Dann heißt die Funktion $s : [a, b] \rightarrow [0, L(K)]$, erklärt durch

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{f}'(\tau)\| d\tau$$

die *Bogenlänge* der Kurve K .

- abhängig von Parametrisierung

16.1.7 Konstantes Durchlaufen einer Kurve II.292

Sei K eine glatte doppeltpunktfreie Kurve. Die Bogenlänge s ist eine stetige, differenzierbare, streng monoton wachsende Funktion und besitzt eine Umkehrfunktion s^{-1} mit denselben Eigenschaften. Die Parameterdarstellung $\vec{f} : [0, L(K)] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{f}(\tilde{t}) := \vec{f}(s^{-1}(\tilde{t}))$ ist zur gegebenen Darstellung $\vec{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ äquivalent, und es gilt

$$\|\vec{f}'(\tilde{t})\| = 1$$

- Bei Parametrisierung durch Bogenlänge durchlaufen wir die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit

16.1.8 Vektorfeld / Skalarfeld II.292

Eine auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ erklärte, stetig differenzierbare Funktion $\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ nennen wir ein *Vektorfeld*. Entsprechend heißt $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein *Skalarfeld*.

16.1.9 Kurvenintegral II.293

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Sei K eine durch $\vec{f} : [a, b] \rightarrow D$ gegebene stückweise glatte Kurve. Dann heißt

$$\int_K \vec{V} d\vec{s} := \int_a^b \vec{V}(\vec{f}(t)) \vec{f}'(t) dt$$

das *Kurvenintegral von \vec{V} längs K* .

- Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung von K

16.1.10 Potentialfeld II.295

Ein Vektorfeld $\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Potentialfeld*, falls es eine Funktion $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla P(\vec{x}) = \vec{V}(\vec{x})$ gibt.

16.1.11 Konvex

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex* \Leftrightarrow mit je zwei Punkten $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D$ gehört auch die Verbindungsgrade $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \lambda \in [0, 1]\}$ zu D .

16.1.12 Wegunabhängiges Kurvenintegral II.295

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann gilt: Das Kurvenintegral $\int_K \vec{V} d\vec{s}$ ist wegunabhängig $\Leftrightarrow \vec{V}$ ist ein Potentialfeld.

- Wenn P mit $\nabla P(\vec{x}) = \vec{V}(\vec{x})$ bekannt ist, dann gilt:
 $\int_K \vec{V} d\vec{s} = P(\vec{f}(b)) - P(\vec{f}(a))$

16.1.13 Zentralfeld II.297

Sei $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann wird durch $\vec{V}(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|) \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ gegeben. Man bezeichnet solche Felder als *Zentralfeld*.

- Zentralfelder sind immer Potentialfelder mit:

$$\int_K \vec{V} \, d\vec{s} = \int_{\|\vec{f}(a)\|}^{\|\vec{f}(b)\|} g(t) \, dt$$

17 Vektorrechnung in \mathbb{V}^3 1.76

17.1 Definition eines Vektors 1.76

Vektor \vec{a} ist Element der Menge der geordneten Zahlen Trippele. Er wirkt auf einen Punkt, indem er ihn auf den Koordinatenachsen um die angegebenen Werte verschiebt, deshalb werden Vektoren auch Verschiebungsvektoren genannt.

$$\begin{aligned} \vec{a} \in \mathbb{V}^3 &= \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= (x_a, y_a, z_a) \text{ Zeilenvektor} \\ &= \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \text{ Spaltenvektor} \end{aligned}$$

Zeilen- und Spaltenvektoren sind nur unterschiedliche Schreibweise, haben aber mathematisch die gleiche Bedeutung.

Der Verschiebungsvektor von P nach Q ist wie folgt definiert

$$\vec{PQ} = \vec{a}_{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

17.2 Vektoren als Pfeile

17.2.1 Rechenregeln 1.76

- Addition (Komponentenweise)
 $\vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b)$
- Skalarmultiplikation
 $\lambda \vec{a} = (\lambda x_a, \lambda y_a, \lambda z_a)$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ und $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$
- $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$

17.2.2 Länge eines Vektors 1.81

Länge von $\vec{a} = \|\vec{a}\| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$

- $\|\vec{a}\| \geq 0$
- $\|\vec{0}\| = 0$
- $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$

17.3 Das skalare Produkt 1.84

Das skalare Produkt ordnet zwei Vektoren eine reelle Zahl zu.

(geometrisch: Betrag von \vec{a} in Richtung \vec{b})

$$\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

- $\vec{a}\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$
- $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$
- $(\lambda \vec{a})\vec{b} = \lambda \vec{a}\vec{b}$
- (umgekehrte-) Dreiecksungleichung
 $|\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|| \leq \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$
- Cauchy-Schwarze Ungleichung
 $|\vec{a}\vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$
- $\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

17.3.1 Eingeschlossener Winkel 1.86

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} schließen den Winkel α ein.

$$\cos \alpha = \cos(\alpha(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

für α schreibt man auch $\alpha(\vec{a}, \vec{b})$.

17.3.2 Einheitsvektor / Renormierung 1.88

Ein Einheitsvektor (\vec{e}) ist ein Vektor mit beliebiger Richtung und der Länge 1. Man erhält ihn durch Renormierung.

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

- Besondere (auf den Koordinatenachsen): $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$ $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$ $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$

17.3.3 Projektion eines Vektors 1.89

\vec{a}' ist die Projektion des Vektors \vec{a} in Richtung \vec{e} ($\|\vec{e}\| = 1$).

$$\vec{a}' = (\vec{a}\vec{e})\vec{e}$$

17.3.4 Richtungskosinus 1.90

Die Komponenten eines renormierten Vektors \vec{e} geben den Cosinus der Winkel mit den Einheitsvektoren der Koordinatenachsen an.

17.4 Das vektorielle Produkt 1.90

Das vektorielle Produkt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ ordnet zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} einen dritten Vektor \vec{c} zu. Man stelle sich vor, \vec{a} und \vec{b} spannen im Raum eine Fläche (Parallelogramm) auf. \vec{c} wird auf dieser Fläche senkrecht stehen, und als Länge, den Betrag des Flächeninhalts des Parallelogramms haben. Die genaue Richtung lässt sich mit der 3-Fingerregel überlegen. Daumen = \vec{a} ; Zeigefinger (ausgestreckt) = \vec{b} ; Mittelfinger (90° angewinkelt) = \vec{c} .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & a_x & b_x \\ \vec{e}_y & a_y & b_y \\ \vec{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix}$$

- Das vektorielle Produkt ist nur in \mathbb{V}^3 definiert.

17.4.1 Rechenregeln 1.91

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times \lambda \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und \vec{b} sind linear unabhängig
- $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$
- $\sin(\alpha(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$

17.5 Spatprodukt 1.95

Das Spatprodukt ordnet drei Vektoren eine reelle Zahl zu. Diese entspricht dem Volumen des von den Vektoren aufgespannten Spats (3-dimensionales Parallelogramm).

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

- Die Wert entspricht genau dem der Determinante aus den 3 Vektoren.
- Das Spatprodukt ist nur in \mathbb{V}^3 definiert.

17.5.1 Rechenregeln 1.96

- zyklisches Vertauschen
 $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$
- antizyklisches Vertauschen
 $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$
- $[\vec{a} + \vec{a}', \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}', \vec{b}, \vec{c}]$
- $[\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$
- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig
- Entwicklungssatz
 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$
- Lagrange-Identität
 $(\vec{a} \times \vec{b}) (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$

17.6 Gerade und Ebene im Raum 1.99

17.6.1 Geradengleichung 1.99

- Punkt-Richtungsform
 $g: \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}$
 - Ortsvektor $\vec{r}_0 = O\vec{P}_0$
 - Richtungsvektor \vec{a}
- Zwei-Punkte-Form
 $g: \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}$
 - Ortsvektor $\vec{r}_0 = O\vec{P}_0$
 - Richtungsvektor $\vec{a} = P_0\vec{P}_1$
- Parameterfreie Darstellung
 $\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}$

17.6.2 Ebenengleichung 1.107

- Parameterdarstellung von E :
 $E: \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}$
 - Ortsvektor \vec{r}_0
 - Richtungsvektoren \vec{a}, \vec{b} (müssen linear unabhängig sein!!)
 - Normalenvektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$
 - Aus parameterfreier Darstellung per Festlegung von z.B. y, z als Parameter s, t
 $\vec{r} = \left(\frac{D}{A}, 0, 0\right) + s\left(-\frac{B}{A}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right)$

- Drei-Punkte-Form

$$E : \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}$$

- Ortsvektor $\vec{r}_0 = O\vec{P}_0$
- Richtungsvektoren $\vec{a} = P_0\vec{P}_1$ $\vec{b} = P_0\vec{P}_2$

- Als Skalarprodukt

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

- Als Spatprodukt

$$\left[\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b} \right] = 0$$

- Parameterfreie Darstellung

$$E : Ax + By + Cz = D$$

$$E : \vec{n}\vec{r} = D$$

- Punkt auf der Ebene $\vec{r} = (x, y, z)$
- A, B, C, D Konstanten
- Normalenvektor $\vec{n} = (A, B, C)$
- Aus Parameterdarstellung:
 - * per Elimination der Parameter
 - * aus der Determinante des Spatprodukts $(\det \left[\begin{matrix} x, y, z \\ x_0, y_0, z_0 \\ a_1, b_1, c_1 \end{matrix} \right] = 0)$
 - * $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

- Hessesche Normalform der Ebenengleichung 1.114

$$E : \vec{e}_n \vec{r} - \vec{e}_n \vec{r}_0 = 0 \text{ (folgt aus } E : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_0 = D)$$

- Erhält man durch Renormierung $\vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

17.6.3 Lage von Geraden im Raum 1.99

$$g_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \quad g_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{a}_2$$

1. g_1, g_2 parallel zueinander

- $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = 0$
- Sonderfall $g_1 = g_2$ wenn zusätzlich $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1$

2. g_1, g_2 schneiden sich in genau einem Punkt

- $g_1 = g_2 \Rightarrow$ Schnittpunkt
- $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq 0$

3. g_1, g_2 windschief zueinander (weder parallel noch Schnittpunkt)

- $g_1 = g_2 \Rightarrow$ nicht lösbar
- $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq 0$
- z.B. $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

17.6.4 Abstand Gerade Punkt 1.105

Gerade: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, Punkt: \vec{r}_1 , Abstand d

$$d = \frac{\|\vec{a} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\|}{\|\vec{a}\|}$$

17.6.5 Abstand zweier windschiefer Geraden 1.106

$$g_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \quad g_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{a}_2$$

$$d = \frac{\|[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_1]\|}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|}$$

17.6.6 Normalenvektor 1.108

Jeder auf der Ebene $E : \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}$ senkrecht stehende Vektor \vec{n} wird als Normalenvektor der Ebene E bezeichnet.

$$\vec{n} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}), \quad \lambda \neq 0$$

17.6.7 Lage zweier Ebenen im Raum 1.111

$$E_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + s\vec{a}_1 + t\vec{b}_1 \quad E_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + s\vec{a}_2 + t\vec{b}_2$$

1. $E_1 = E_2$ (sind gleich)

- $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \quad \left[\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right] = 0$

2. E_1, E_2 sind parallel aber nicht gleich

- $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \quad \left[\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right] \neq 0$

3. E_1, E_2 schneiden sich in einer Geraden

- $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0} =$ Richtungsvektor der Schnittgeraden
- Ortsvektor der Schnittgeraden ist ein beliebiger Punkt der auf E_1 und E_2 liegt.

17.6.8 Schnittpunkt Gerade Ebene 1.110

Der Schnittpunkt der Ebene $E : \vec{n} \cdot \vec{r} = D$ und der Gerade $g : \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ hat den Ortsvektor

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_0 + \frac{D - \vec{n}\vec{r}_0}{\vec{n}\vec{a}} \vec{a}$$

17.6.9 Lot auf Ebene 1.111

Die Lotgerade auf der Ebene $E : \vec{n} \cdot \vec{r} = D$ durch den Punkt P_0 mit dem Ortsvektor \vec{r}_0 besitzt folgende Gestalt

$$l : \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{n}$$

Der Ortsvektor des Fußpunktes (Durchstoßpunkt mit der Ebene) ergibt sich dann so

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_0 + \frac{D - \vec{n}\vec{r}_0}{\vec{n}\vec{n}} \vec{n}$$

17.6.10 Abstand Nullpunkt-Ebene 1.113

Der Abstand einer Ebene $E : \vec{n} \cdot \vec{r} = D$ vom Ursprung $d = |\vec{e}_n \vec{r}_0|$

17.6.11 Abstand Punkt-Ebene I.114

Der Abstand einer Ebene $E: \vec{n} \cdot \vec{r} = D$ vom Punkt \vec{r}_1
 $d = |\vec{e}_n \vec{r}_1 - \vec{e}_n \vec{r}_0|$

18 Vektorräume I.159

18.1 Definition I.159

Sei \mathbb{V} eine Menge und \mathbb{K} ein Körper. Zu je zwei Elementen \vec{a} und \vec{b} aus \mathbb{V} gebe es genau ein Element $\vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{V}$. Zu jedem λ aus \mathbb{K} und jedem Element \vec{a} aus \mathbb{V} gebe es genau ein Element $\lambda \vec{a} \in \mathbb{V}$. \mathbb{V} heißt *Vektorraum* (VR) über \mathbb{K} , wenn die folgenden Grundgesetze gelten.

- Addition in \mathbb{V}

- Kommutativgesetz
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Assoziativgesetz
 $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- Neutrales Element
 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ und $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- Inverses Element
 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

- Multiplikation mit Körperelementen

- Neutrales Element
 $1\vec{a} = \vec{a}$
- $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

18.1.1 Untervektorraum I.160

$\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ heißt Untervektorraum (UVR) vom \mathbb{V} , wenn für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{U}, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{U}, \lambda \vec{a} \in \mathbb{U}$$

- Untervektorraumkriterium

$$\forall_{\vec{a}, \vec{b}}^{\lambda, \mu} : \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \in \mathbb{U}$$

oder

$$\forall_{\vec{a}, \vec{b}}^{\lambda} : \lambda \vec{a} \in \mathbb{U} \wedge \vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{U}$$

- Durchschnitt

$$\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{V}$$

- Vereinigung nicht UVR!!!

$$\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \not\subset \mathbb{V}$$

- Summe

$$\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 = \{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 | \vec{a}_1 \in \mathbb{U}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{U}_2\} \subset \mathbb{V}$$

18.1.2 Linearkombination I.161

$$\vec{b} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{a}_j = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

\vec{b} ist eine Linearkombination aus $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

18.1.3 Triviale Darstellung des Nullvektors I.162

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{a}_j = \vec{0}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$$

18.1.4 Lineare (Un-)Abhängigkeit I.163

Die Vektoren $\vec{a}_j \in \mathbb{V}, j = 1, \dots, n$ heißen linear unabhängig wenn sich aus ihnen nur mit der trivialen Darstellung der Nullvektor darstellen lässt. Ansonsten sind sie linear abhängig.

Bei linear abhängigen Vektoren lässt sich mindestens ein Vektor \vec{a}_j als Linearkombination der restlichen darstellen:

$$\vec{a}_{j_0} = - \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_{j_0}} \vec{a}_j$$

- Beweis durch Lösen von lin. Gleichungssystem. Wenn eindeutig möglich \Rightarrow linear unabhängig.

- Anzahl der Vektoren muss $\leq \dim(\mathbb{U})$ sein, sonst sind sie zwangsläufig lin. abhängig.

- $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \det(\vec{b}_1 | \dots | \vec{b}_n) \neq 0$

18.1.5 Lineare Hülle I.165

Menge aller Linearkombinationen aus gegebenen Vektoren.

$$\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{a}_j \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}$$

- Die Lineare Hülle bildet einen Untervektorraum von \mathbb{V}

- Wenn $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig, und $\vec{b} \in \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \rangle$ dann ist $\vec{b} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{a}_j$ eindeutig.

- Direkte Summe

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2 \dots \oplus \mathbb{U}_n$$

Wenn die Untervektorräume linear unabhängig sind

18.2 Endlich-dimensionale Vektorräume 1.166

18.2.1 Erzeugendensystem 1.166

Wenn $\mathbb{U} = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \rangle$ bilden $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ein Erzeugendensystem von \mathbb{U} .

- Alle Basen sind autom. auch Erzeugendensystem.

18.2.2 Basis 1.166

Wenn $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind, und ein Erzeugendensystem von \mathbb{U} sind bilden sie eine *Basis* von \mathbb{U} .

- Ein Vektor lässt sich in einer Basis eindeutig darstellen

$$\vec{b} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{a}_j$$
- Es kann unterschiedliche Basen von \mathbb{U} geben.
- Alle Basen haben die gleiche Anzahl von Vektoren.
- Wenn die Anzahl der Vektoren = $\dim(\mathbb{U})$ und sie lin. unabhängig sind, sind sie autom. ein Basis.

18.2.3 Kanonische Basis / Standardbasis 1.169

$$e_j^{(n)} = (0, \dots, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, 0), \quad j = 1, \dots, n$$

- Die Standardbasen sind linear unabhängig
- Sie erzeugen \mathbb{K}^n
- ist eine Orthonormale Basis (siehe 18.4.2 auf der nächsten Seite)

18.2.4 Dimension 1.167

Die Anzahl von Vektoren von einer Basis wird Dimension genannt: $\dim(\mathbb{U})$

18.2.5 Nullraum 1.169

$\mathbb{U} = \{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{V}$ ist ein trivialer Untervektorraum eines jeden Vektorraumes der Dimension 0.

18.2.6 Linearer Teilraum 1.169

\vec{a} sei ein fester Vektor

$$\{\vec{a} + \vec{b} \mid \vec{b} \in \mathbb{U}\}$$

wird als Linearer Teilraum der $\dim(\mathbb{U}) = n$ bezeichnet.

18.2.7 Darstellung von Vektorräumen 1.169

Die Menge aller geordneten n-Tupel (geordnete Menge an Zahlen) von Skalaren aus \mathbb{K} , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_j \in \mathbb{K}, j = 1, \dots, n\}$$

versehen mit der Addition

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

und der Multiplikation mit Skalaren aus \mathbb{K}

$$\lambda (a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$$

bilden einen n-dimensionalen Vektorraum über \mathbb{K} . Dieser wird mit \mathbb{K}^n abgekürzt.

18.3 Koordinaten 1.171

18.3.1 Definition 1.171

Ein Vektor \vec{a} lässt sich mit Hilfe der Koordinaten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bezüglich der Basis $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ wie folgt (eindeutig) darstellen.

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{b}_k$$

- Bezüglich der Kanonischen Basis sind die Koordinaten genau die Komponenten des Vektors \vec{a}
- Der Vektor der Koordinaten heißt Koordinatenvektor $\vec{\alpha}$
- Die Rechenregeln für Summe von zwei Koordinatenvektoren der gleichen Basis und die Regeln der Multiplikation mit einem Skalar sind identisch mit den Regeln für Vektoren.
- $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$ linear unabhängig

18.3.2 Basiswechsel 1.174

Seien $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ und $\vec{\tilde{b}}_1, \dots, \vec{\tilde{b}}_n$ zwei Basen des n-dimensionalen Vektorraumes \mathbb{V} . Die Basisvektoren haben nun sollen folgende Beziehungen untereinander besitzen

$$\vec{b}_j = \sum_{k=1}^n \tilde{\beta}_{k,j} \vec{\tilde{b}}_k, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\vec{\tilde{b}}_j = \sum_{k=1}^n \beta_{k,j} \vec{b}_k, \quad j = 1, \dots, n$$

Die Koordinatenvektoren $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n$ und $\vec{\tilde{\beta}}_1, \dots, \vec{\tilde{\beta}}_n$ sind linear unabhängig.

Einen Vektor \vec{a} kann man nun in beiden Basissystemen ausdrücken

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j \vec{\tilde{b}}_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{b}_j$$

Zwischen den Koordinatenvektoren $\vec{\alpha}$ und $\vec{\alpha}$ in den jeweiligen Basissystemen besteht der Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_k &= \sum_{j=1}^n \beta_{k,j} \alpha_j \\ \alpha_k &= \sum_{j=1}^n \tilde{\beta}_{k,j} \tilde{\alpha}_j\end{aligned}$$

- Für weiteres siehe 20.1.4 auf Seite 40

18.3.3 Kronecker-Symbol I.176

Das Kronecker-Symbol ist wie folgt definiert

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0, & \text{falls } j \neq k \end{cases}$$

18.4 Der unitäre Vektorraum \mathbb{C}^n I.177

Übertragen des Skalarproduktes und des Betrages auf den Vektorraum \mathbb{C}^n .

18.4.1 Skalare Produkt / Betrag I.178

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j \\ \|\vec{a}\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j \bar{a}_j} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}\end{aligned}$$

Es gelten die selben Regeln wie für Vektoren aus \mathbb{R}^3 (siehe 17.3 auf Seite 31) mit folgenden Ausnahmen bzw. Ergänzungen:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \overline{\vec{b} \cdot \vec{a}}$
- $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$
 $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \bar{\lambda} (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} heißen orthogonal (senkrecht) zueinander ($\vec{a} \perp \vec{b}$), wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Vektoren der Länge 1 ($\|\vec{a}\| = 1$) heißen Einheitsvektoren.

18.4.2 Orthogonalsystem / Orthonormalsystem (Basis) I.180

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$, die den Nullvektor nicht enthält und mit $\vec{a}_k \cdot \vec{a}_j = 0$ für $k \neq j$ heißt *Orthogonalsystem* (alle Vektoren sind senkrecht zueinander).

Sind zudem alle \vec{a}_j normiert (Länge 1) so heißen sie *Orthonormalsystem*.

- Die Vektoren eines Orthonormalsystems sind linear unabhängig
- Bilden die Vektoren eine Basis, so spricht man von einer *Orthogonalbasis* bzw. *Orthonormalbasis*.
- Die Kanonische Basis ist eine Orthonormalbasis (siehe 18.2.3 auf der vorherigen Seite).

18.4.3 Existenz einer Orthonormalbasis I.181

Sei $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{C}^n$ bzw. \mathbb{R}^n eine linear unabhängige Menge von Vektoren. Dann gibt es ein Orthonormalsystem $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ mit $\langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_i \rangle = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i \rangle$ für alle $1 \leq i \leq m$.

18.4.4 Gram-Schmidtsches-Orthonormalisierungsverfahren I.182

Auch unter dem Namen Hilbert-Schmidtsches-Orthonormalisierungsverfahren bekannt. Konventionen wie bei 18.4.3.

1. $\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}$
2. Für alle \vec{b}_k mit $1 \leq k \leq m-1$
 - (a) $\vec{a}_{k+1} = \vec{a}_{k+1} - \sum_{l=1}^k (\vec{a}_{k+1} \cdot \vec{b}_l) \vec{b}_l$
 - (b) $\vec{b}_{k+1} = \frac{\vec{a}_{k+1}}{\|\vec{a}_{k+1}\|}$

- Alle \vec{b}_k auf Länge (=1) und orthogonalität (Skalarprodukt = 0) testen
- Brüche und Große Zahlen aus Vektoren ausklammern, so das in den Vektoren nur ganze, möglichst kleine Zahlen enthalten sind.
- Um aus $\tilde{a}_k \tilde{b}_k$ zu erstellen, können die ausgeklammerten Werte vor \tilde{a}_k weggelassen werden, da diese sich durchs Renormieren ohnehin herauskürzen würden.

Geometrisch wird der die Richtung des 1. Vektors übernommen, und von allen weiteren Vektoren deren Komponenten in Richtung von bereits erzeugten Basis-Vektoren abgezogen, so das nur deren neuer Richtungsanteil übrig bleibt, welcher letztendlich dann als Richtung für den zusätzlichen Basis-Vektor genommen wird.

18.5 Lineare Abbildungen I.183

\mathbb{V} (Quellraum) und \mathbb{W} (Zielraum) seien Vektorräume über demselben skalaren Körper \mathbb{K} . Die Abbildung $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ heißt linear, wenn für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

Additivität $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$

Homogenität $f(\lambda\vec{a}) = \lambda f(\vec{a})$

Eine Lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen wird auch als *Homomorphismus* bezeichnet.

- $f(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda f(\vec{a}) + \mu f(\vec{b})$
- $f(\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\vec{a}_k)$
- integrieren und differenzieren von Polynomen sind lineare Abbildungen

18.5.1 Bild und Kern 1.184

Sei $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineare Abbildung.

Bild $\text{Bild}(f) := \{f(\vec{a}) \mid \vec{a} \in \mathbb{V}\} \subseteq \mathbb{W}$

Kern $\text{Kern}(f) := \{\vec{a} \in \mathbb{V} \mid f(\vec{a}) = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{V}$

- $\text{Bild}(f)$ ist Untervektorraum von \mathbb{W}
- $\text{Kern}(f)$ ist Untervektorraum von \mathbb{V}
- $\dim(\mathbb{V}) - \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(\text{Kern}(f))$
- $\text{Rang}(M(f)) = \dim(\text{Bild}(f))$

18.5.2 Injektiv / Surjektiv 1.184

Eine Abbildung $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ heißt *injektiv*, falls

$$f(\vec{a}) = f(\vec{b}) \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$$

Bei linearen f gilt weiter:

- f ist injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$
- f ist surjektiv $\Leftrightarrow \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(\mathbb{W})$

18.5.3 Lineare Abbildung durch Bilder der Basis 1.184

Um eine lineare Abbildung f festzulegen genügt es die Bilder $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ der Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ zu kennen, für $\vec{b}_k = f(\vec{a}_k)$ $1 \leq k \leq n$.

Sei $\vec{a} \in \mathbb{V}$ und $\vec{a} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k$ für geeignete $\lambda_k \in \mathbb{K}$ gilt

$$f(\vec{a}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{b}_k$$

18.5.4 Koordinatenschreibweise linearer Abbildungen 1.188

Seien α_k ($1 \leq k \leq n$) die Koordinaten von \vec{a} bezüglich der Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ von \mathbb{V} . Außerdem beschreibt β_{kj} die Umrechnungskordinaten von \mathbb{V} nach \mathbb{W} $f(\vec{a}_j) = \sum_{k=1}^m \beta_{kj} \vec{b}_k$ ($\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ ist Basis von \mathbb{W}). Dann gilt:

$$f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_{mj} \end{pmatrix}$$

19 Matrizen 1.190

Eine $m \times n$ -Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten. Man schreibt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{jk})_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}$$

dabei steht a_{jk} in der j -ten Zeile, und der k -ten Spalte.

19.0.5 Zeilen- und Spaltenvektor 1.191

Einem $m \times n$ -Matrix hat m Zeilenvektoren (aus der j -ten Zeile):

$$\vec{z}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$$

und n Spaltenvektoren (aus der k -ten Spalte):

$$\vec{s}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

- Zeilenvektoren können als eine $1 \times n$ -Matrix angesehen werden
- Spaltenvektoren können als eine $m \times 1$ -Matrix angesehen werden

Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen über \mathbb{K} bildet zusammen mit der Addition und der Skalarmultiplikation einen Vektorraum über \mathbb{K} der Dimension $m \cdot n$.

19.1 Rechenoperationen mit Matrizen 1.190

19.1.1 Addition 1.195

Die Addition erfolgt Elementenweise (mit $j = 1, \dots, m$ $k = 1, \dots, n$):

$$(a_{jk}) + (b_{jk}) = (a_{jk} + b_{jk})$$

19.1.2 Skalarmultiplikation 1.195

Jedes Element wird einzeln Multipliziert
(mit $j = 1, \dots, m$ $k = 1, \dots, n$):

$$\lambda(a_{jk}) = (\lambda a_{jk})$$

19.1.3 Kanonische Basis

Die Kanonische Basis zu einem Vektorraum aller $m \times n$ -Matrizen besteht aus allen (verschiedenen) $m \times n$ -Matrizen die jeweils nur eine 1 und sonst nur 0-en enthalten. Es gibt $m \cdot n$ solcher Basen.

19.1.4 Transponierte Matrix 1.192

Die $m \times n$ -Matrix A ist wie folgt definiert

$$A = (a_{jk})_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}$$

dann heißt die $n \times m$ -Matrix

$$A^T = (a_{kj})_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}$$

die zu A transponierte Matrix.

- Transponieren vertauscht die Elemente bezüglich der Hauptdiagonalen (von Links oben, nach Rechts unten)
- $(A^T)^T = A$
- Transponieren ist eine lineare Abbildung, es gilt die

Additivität $(A + B)^T = A^T + B^T$

Homogenität $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

19.1.5 (Anti-) Symmetrische Matrix

Alle (Anti-)Symmetrische Matrizen sind quadratische Matrizen. Das bedeutet, das sie die gleiche Anzahl an Spalten und Zeilen haben ($n \times n$ -Matrix).

symmetrische Matrix $A^T = A$

- Lässt sich auf der Hauptdiagonalen spiegeln, ohne das sie sich ändert

antisymmetrische Matrix $A^T = -A$

- Hat auf der Hauptdiagonalen nur 0en.
- Ist auf der Hauptdiagonalen mit vertauschten Vorzeichen gespiegelt.

symmetrischer Teil $A_s = \frac{1}{2}(A + A^T)$

antisymmetrischer Teil $A_{as} = \frac{1}{2}(A - A^T)$

- $A = A_s + A_{as}$

19.1.6 Matrixprodukt 1.197

Sei $A = (a_{jk})_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}$ eine $m \times n$ -Matrix und $B = (b_{kl})_{\substack{k=1, \dots, n \\ l=1, \dots, p}}$ eine $n \times p$ -Matrix. Die $m \times p$ -Matrix

$$\begin{aligned} A B &= \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{kl} \right)_{\substack{j=1 \dots m \\ l=1 \dots p}} \\ &= \left(\left(\begin{array}{c} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{ml} \end{array} \right) \right)_{\substack{j=1 \dots m \\ l=1 \dots p}} \end{aligned}$$

heißt Produktmatrix (Produkt aus A und B).

- An Position (j, l) steht das Skalarprodukt des j -ten Zeilenvektors (der linken Matrix), mit dem l -ten Spaltenvektor (der 2ten Matrix)
- Skalarprodukt von 2 Vektoren ist Sonderfall des Matrixproduktes
- Produkt entspricht der Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen
- Nur Definiert, wenn Spaltenanzahl der 1. Matrix = Zeilenanzahl der 2. Matrix

A, B, C seien Matrizen, so dass die folgenden Produkte definiert sind

- Assoziativgesetz
 $(AB)C = A(BC)$

- Distributivgesetz
 $A(B + C) = AB + AC$
 $(A + B)C = AC + BC$

- $(AB)^T = B^T A^T$

- im allgemeinen:
 $AB \neq BA$

- $AE = A$ (mit $E =$ Einheitsmatrix)

- *nilpotent* heißt eine Matrix, wenn
 $A^2 = (0) =$ Nullmatrix

- Die Menge aller $n \times n$ -Matrizen mit den Rechengesetzen zusammen bildet einen *Ring*. Keinen Körper, da das inverse Element der Multiplikation im allgemeinen nicht Existiert.

19.1.7 Nullmatrix

Eine Matrix die ausschließlich mit Nullen aufgefüllt ist, nennt sich Nullmatrix, und hat den Rang 0.

19.1.8 Einheitsmatrix 1.200

Eine $n \times n$ -Matrix die 1en auf der Hauptdiagonale, und sonst nur Nullen hat, heißt Einheitsmatrix. Sie ist das neutrale Element der Multiplikation.

$$E = (\delta_{ik})_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19.2 Rang einer Matrix 1.200

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren einer Matrix heißt Zeilenrang, die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren heißt Spaltenrang.

- Dimension der linearen Hülle der Zeilenvektoren
Zeilenrang = $\dim(\langle \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m \rangle)$
- Dimension der linearen Hülle der Spaltenvektoren
Spaltenrang = $\dim(\langle \vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n \rangle)$
- Der Spalten- und Zeilenrang sind immer gleich
- Der Rang einer Matrix ist gleich dem Spalten- bzw. Zeilenrang

19.2.1 Zeilen-/Spaltenoperationen 1.201

Durch folgende Operationen in einer Matrix wird deren Rang nicht beeinflusst.

1. Multiplikation einer Zeile bzw. Spalte mit einem Skalar $\neq 0$
2. Vertauschen von Zwei Zeile bzw. Spalten
3. Zu einer Zeile bzw. Spalte ein Vielfaches einer anderen Zeile bzw. Spalte hinzuaddieren

19.3 Lineare Abbildungen und Matrizen 1.213

19.3.1 Menge aller linearen Abbildungen 1.214

Sei $L(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ die Menge aller lin. Abbildungen von \mathbb{V} nach \mathbb{W} .

- $\dim \mathbb{V} = n \wedge \dim \mathbb{W} = m \Rightarrow \dim L(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = nm$

19.3.2 Zuordnung Matrix \Leftrightarrow Lin. Abbildung 1.214

Sei $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ eine Basis von \mathbb{V} und $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ eine Basis von \mathbb{W} . Für jede lin. Abbildung $f \in L(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ lässt sich nun eine $m \times n$ Matrix zuordnen. Sei

$$f(\vec{a}_j) = \sum_{k=1}^m \beta_{kj} \vec{b}_k \quad (j = 1, \dots, n)$$

dann hat die Matrix folgende Gestalt

$$\begin{aligned} M(f) &= \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \\ &= (f(\vec{a}_1) \dots f(\vec{a}_n)) \\ &= (\beta_{kj})_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \end{aligned}$$

Sei $\vec{x} \in \mathbb{V}$ ein Koordinatenvektor bezüglich der oben gewählten Basis.

$$M(f) \vec{x} = f(\vec{x})$$

- Achtung, Reihenfolge der Multiplikation entscheidend!
- $\text{Rang}(M(f)) = \dim(\text{Bild}(f))$

19.3.3 Verkettung von lin. Abbildungen 1.216

Die Matrix der Hintereinanderausführung zweier lin. Abbildungen $f \in L(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ und $g \in L(\mathbb{W}, \mathbb{U})$ ist $M(g \circ f) = M(g)M(f) = M(g(f))$

19.3.4 Inverse Matrix 1.216

Sei $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ linear, $\dim \mathbb{V} = n$ mit $\dim \text{Bild}(f) = n = \dim \mathbb{V}$ (f ist injektiv). Dann muss eine Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ mit $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{V}} = f \circ f^{-1}$ existieren.

Sei $A = M(f)$, $A^{-1} = M(f^{-1})$ dann folgt $AA^{-1} = M(\text{id}_{\mathbb{V}}) = E = A^{-1}A$. A^{-1} heißt die zu A inverse Matrix.

- E ist das neutrale Element der Multiplikation
- Nur reguläre Matrizen besitzen eine inverse Matrix
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

19.3.5 Reguläre Matrix 1.217

Eine Quadratische Matrix mit maximalen Rang (Rang=Spalten-/Zeilenanzahl) heißt reguläre Matrix.

- Nur reguläre Matrizen besitzen eine inverse Matrix

20 Lineare Gleichungssysteme 1.220

Sei $A = (a_{jk})_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ eine $m \times n$ -Matrix mit Elementen aus $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $b_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \dots, m$.

Das System

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix}$$

heißt lineares Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten.

Jedes n -Tupel (Vektor) $(x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{K}$, das alle Gleichungen löst, heißt Lösung des Systems. Die Gesamtheit aller Lösungen heißt Lösungsraum.

20.1 Der Lösungsraum 1.220

20.1.1 Dimension 1.221

Der Lösungsraum des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$ mit einer $m \times n$ -Matrix A , stellt einen Untervektorraum der Dimension $n - \text{Rang}(A)$ von \mathbb{K}^n dar.

- Jedes homogene Gleichungssystem ist lösbar
- Ist A quadratisch und regulär, so hat der Lösungsraum die Dimension 0, besteht also nur aus dem Nullvektor $\vec{0}$.

20.1.2 Erweiterte Matrix 1.224

Die $m \times (n + 1)$ -Matrix $(A|\vec{b})$ heißt erweiterte Matrix des LGS.

20.1.3 Rangkriterium 1.224

Das inhomogene LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, falls $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\vec{b})$

- Wenn A quadratisch und regulär ist auch inhomogenes System lösbar, mit einer eindeutigen Lösung.
- Allgemeiner Fall: Sei \vec{x}_0 eine feste Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ und \vec{y} eine Lösung des Systems $A\vec{y} = \vec{0}$. Dann ist $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}$ eine beliebige Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

20.1.4 Basiswechsel

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ mit der Abbildungsmatrize $M_{alt}(f)$ ist mit $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = A$ als Basis von \mathbb{V} und $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = B$ als Basis von \mathbb{W} gegeben. Um sie nun in die neuen Basen $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n) = C$ von \mathbb{V} und $(\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_n) = D$ und von \mathbb{W} zu überführen, wende folgende Gleichung an.

$$M_{neu}(f) = D^{-1}BM_{alt}(f) A^{-1}C$$

- Für den Sonderfall das $A, B = E_n$ und $C = D$ gilt:
 $M_{neu}(f) = C^{-1}M_{alt}(f)C$
- Für weiteres siehe 18.3.2 auf Seite 35

20.2 Lösen mittels Inversen

Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat als Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

20.3 Der Gaußsche Algorithmus 1.227

Da Zeilenoperationen (Tauschen / Multiplizieren / Addieren) in der erweiterten Matrix $(A|\vec{b})$ eines linearen Gleichungssystems $(A\vec{x} = \vec{b})$ den Lösungsraum nicht verändern, lassen diese sich zum Lösen des Gleichungssystems verwenden. Man kann dabei nach dem folgenden (Gaußschen) Algorithmus vorgehen:

1. Vertausche Zeilen so, das oben Links etwas von 0 verschiedenes steht ($a_{11} \neq 0$). Falls erste Spalte = $\vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1$ beliebig, streichen der 1. Spalte
2. Räume Spalte unterhalb von a_{11} aus, durch Addition von $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ (1. Zeile) auf j -te Zeile ($1 \leq j \leq m$)
3. Wenn die akt. Untermatrix mehr als 1. Zeile hat, betrachte Untermatrix, in der die 1. Spalte und die 1. Zeile fehlen, und mache bei 1. weiter.
4. Testen der Rangbedingung für Lösbarkeit. Wenn $\text{Rang}(A|\vec{b}) = \text{Rang}(A)$ ist es wie folgt lösbar
5. Löse LGS von unten nach oben auf $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$
6. Unbekannte zugehörig zu den Nullspalten können frei gewählt werden.
7. Unbekannte zu den Nullzeilen werden als Parameter gewählt

20.3.1 Bestimmen der Inversen Matrize mittels Gauß-Algorithmus

Man führe den Gauß-Algorithmus für die Matrix $(A|\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ aus. Dabei muss das System mittels Zeilenoperationen in die Gestalt $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n|A^{-1})$ gebracht werden. Auf der Rechten Seite lässt sich nun die Inverse Matrix ablesen.

Es ist auch möglich, *ausschließlich* mit Spalten Operationen anstatt Zeilenoperationen zu arbeiten.

21 Determinanten 1.241

21.1 Definitionen

21.1.1 Permutation / Transposition 1.241

Eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ heißt Permutation der Menge $\{1, \dots, n\}$. Die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ wird mit S_n bezeichnet.

Mit t_{ik} bezeichnen wir die Permutation

$$t_{ik}(i) = k, t_{ik}(k) = i, \forall j \neq i, k : t_{ik}(j) = j$$

eine Transposition (vertauschen zweier Elemente).

Notation für Permutation:

Urbild	1	2	...	$n-1$	n
Bild	$\pi(1)$	$\pi(2)$...	$\pi(n-1)$	$\pi(n)$

- $|S_n| = n!$
- jede Permutation kann als Hintereinanderausführung von Transpositionen geschrieben werden

21.1.2 Fehlstand / Signum 1.242

Sei $\pi \in S_n$. Gilt $\pi(i) > \pi(j)$ für zwei Zahlen $1 \leq i < j \leq n$, so heißt das Paar (i, j) *Fehlstand* von π .

π heißt *gerade* (*ungerade*), falls π eine gerade (ungerade) Anzahl von Fehlstellen hat.

Das *Signum* von π ist

$$\text{sign}(\pi) := \begin{cases} 1 & \pi \text{ gerade} \\ -1 & \pi \text{ ungerade} \end{cases}$$

- eine gerade (ungerade) Permutation kann nur durch eine gerade (ungerade) Anzahl von hintereinander ausgeführten Transpositionen dargestellt werden.
- $\text{sign}(\pi_1 \circ \pi_2) = \text{sign}(\pi_1) \text{sign}(\pi_2)$
- $\text{sign}(\pi^{-1}) = \text{sign}(\pi)$

21.1.3 Determinante 1.244

Sei $A = (a_{j,k})$ eine $n \times n$ -Matrix mit Elementen aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \left(\text{sign}(\pi) \prod_{k=1}^n (a_{k, \pi(k)}) \right)$$

Determinante von A (Definition nach Leibnitz Formel) mit folgender Schreibweise:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- $n = 3$ (Regel von Sarrus)

Man schreibe die Linke und Mittlere Spalte Rechts noch einmal daneben. Die 3 Diagonalen von Linksoben nach Rechtsunten werden nun multipliziert und mit positiven Vorzeichen addiert. Die 3 Diagonalen von Rechtsoben nach Linksunten mit werden nun multipliziert und mit negativen Vorzeichen dazuaddiert.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- Da Berechnungsformel in \mathbb{R}^3 dem Spatprodukt entspricht, bezeichnet man die Determinante auch mit *Volumenform*.
- bei größeren n macht es keinen Sinn geschlossene Ausdrücke anzugeben, da die Anzahl der Terme mit $n!$ wächst.
- Bei Matrizen in Dreiecksgestalt (Ober- oder Unterhalb der Hauptdiagonale nur 0en) ist

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}$$

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(E) = 1$
- bei komplexkonjugierten Zahlen:
 $\det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}$

21.1.4 Verhalten von Determinante bei Zeilen- und Spaltenoperationen 1.246

Schreiben $A = (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n)$ (\vec{s}_i Spaltenvektor). Die Determinante stellt eine *alternierende Multilinearform* dar.

- det ist in jedem Argument linear:
 $\det(\vec{s}_1, \dots, \lambda \vec{s}_i + \mu \vec{s}'_i, \dots, \vec{s}_n) = \lambda \det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n) + \mu \det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}'_i, \dots, \vec{s}_n)$
für jeden Index $1 \leq i \leq n$
- det ist alternierend:
 $\det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_k, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n) = -\det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n)$
für $1 \leq (i \neq k) \leq n$

Analog gelten diese Aussagen auch für Zeilenoperationen.

21.1.5 Gaußalgorithmus für Determinanten

Der Algorithmus erfolgt hier wie bei der Bestimmung von Rängen. Ziel ist es die Determinante in eine Dreiecksgestalt zu bringen. Dann entspricht die Determinante dem Produkt der Hauptdiagonale. Allerdings ist Folgendes zu berücksichtigen:

- Zeilen- und Spaltenoperationen erlaubt, ändern aber zum Teil (berechenbar) den Wert der Determinante.
- Hat A zwei gleiche Spalten (Zeilen), so ist $\det A = 0$
- Addition mit einem Vielfachen einer anderen Spalte (Zeile) \Rightarrow unverändert:
 $\det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i + \mu \vec{s}_k, \dots, \vec{s}_n) = \det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n)$ wenn $i \neq k$
- Multiplikation einer Spalte (Zeile) mit $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ det A mit λ multiplizieren:
 $\det(\vec{s}_1, \dots, \lambda \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n) = \lambda \det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n)$
- Vertauschen zweier Spalten (Zeilen) ändert Vorzeichen von det A :
 $\det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_k, \dots, \vec{s}_n) = -\det(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n)$

21.1.6 Determinante und Rang 1.248

Der Rang einer $n \times n$ -Matrix A ist genau dann gleich n (A ist regulär), wenn $\det A \neq 0$ ist.

$$\text{Rang}(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

21.2 Entwicklung nach einer Zeile/Spalte 1.250

21.2.1 Adjunkte 1.256

Sei $A = (a_{jk})$ eine $n \times n$ -Matrix. Durch Streichen der j -ten Zeile und k -ten Spalte entsteht die $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrix.

$$B_{jk} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{a,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,k-1} & a_{j-1,k+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,k+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$A_{jk} := (-1)^{j+k} \det B_{jk}$ heißt *Adjunkte* des Eintrages a_{jk} .

21.2.2 Entwickeln nach einer Zeile oder Spalte 1.256

Sei $A = (a_{jk})$ eine $n \times n$ -Matrix. Dann gilt

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk} \text{ Entw. nach } j\text{-ter Zeile}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{jk} A_{jk} \text{ Entw. nach } k\text{-ter Spalte}$$

- Am besten nach Spalte (Zeile) mit sehr vielen 0-en entwickeln
- Evtl. auch mischen mit Gauß Algorithmus

21.2.3 Vandermonde-Matrix 1.258

Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}).

$$V(x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

heißt *Vandermonde-Matrix* in x_1, \dots, x_n . Es gilt

$$\det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k)$$

21.3 Die Cramersche Regel 1.259

21.3.1 Inverse Matrix 1.259

Sei $A = (a_{jk})$ eine $n \times n$ -Matrix mit $\det A \neq 0$. Dann hat die inverse Matrix die Gestalt:

$$A^{-1} = \left(a_{jk}^{(-1)} \right) = \left(\frac{A_{kj}}{\det A} \right)$$

- A_{kj} ist Adjunkte Matrix (Achtung: Indizes vertauscht (Transponiert))

21.3.2 Cramersche Regel 1.261

Sei $A = (a_{jk})$ eine reguläre $n \times n$ -Matrix. Dann hat das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ gegeben durch

$$x_k = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Teile die Determinante von A mit \vec{b} in der k -ten Spalte durch die Determinante von A und du erhältst die Lösung für x_k

22 Eigenwerte 1.266

22.1 Charakteristisches Polynom 1.266

22.1.1 Definition 1.266

Sei A eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, und E_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Das Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

heißt *charakteristisches Polynom* von A .

- Satz von Cayley-Hamilton
 $\chi_A(A) = 0$

22.1.2 Ähnliche Matrix 1.269

Zwei $n \times n$ -Matrizen A, \tilde{A} heißen *ähnlich*, wenn es eine reguläre $n \times n$ -Matrix B gibt mit

$$\tilde{A} = B^{-1}AB \text{ bzw. } B\tilde{A} = AB$$

- $\chi_{B^{-1}AB}(\lambda) = \chi_A(\lambda)$
- $\chi_{A^T}(\lambda) = \chi_A(\lambda)$

22.2 Eigenvektoren 1.272

22.2.1 Definition 1.272

Ist λ_0 eine Nullstelle von $\chi_A(\lambda_0) = 0 = \det(A - \lambda_0 E_n)$. Dann hat das LGS $(A - \lambda_0 E_n)\vec{u} = \vec{0}$ mindestens eine nicht triviale Lösung.

$$(A - \lambda_0 E_n)\vec{u} = \vec{0} \text{ bzw. } A\vec{u} = \lambda_0 \vec{u}$$

heißt *Eigenleichung* von A .

Jede Nullstelle λ_0 heißt *Eigenwert* der Matrix A .

Jeder Vektor $\vec{u} \in K^n, \vec{u} \neq \vec{0}$ heißt *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ_0 .

Der gesamte Lösungsraum von $(A - \lambda_0 E_n)\vec{u} = \vec{0}$ heißt *Eigenraum* zum Eigenwert λ_0 (= Kern der Matrix $A - \lambda_0 E_n$).

- A positiv (negativ) definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte von A positiv (negativ) sind
- A indefinit \Leftrightarrow Es gibt sowohl positive, als auch negative Eigenwerte von A
- Eigenvektoren sind nicht eindeutig. Sie können durch lin. abhängige ersetzt werden

22.2.2 Vielfachheit 1.275

Sei A eine $n \times n$ -Matrix mit charakteristischem Polynom $\chi_A(\lambda)$. Sei λ_0 eine Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$ der Vielfachheit k_0 . Dann heißt k_0 die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_0 .

Der Eigenraum des Eigenwertes λ_0 habe die Dimension m_0 . Dann heißt m_0 die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_0 .

- $1 \leq m_0 \leq k_0 \leq n$
- Wenn \forall EW $\lambda_i : k_i = m_i \Leftrightarrow A$ ist *diagonalähnlich* / A ist ähnlich zu $(B^{-1}AB = \tilde{A}$ mit $B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, \vec{v}_i Eigenvektor von A) zu
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

22.2.3 Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren 1.276

Sei A eine $n \times n$ -Matrix und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von A . Zu jedem EW λ_j gehöre genau ein Eigenvektor \vec{u}_j . Dann sind die Eigenvektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ linear unabhängig.

22.3 Hermitesche und unitäre Matrizen 1.284

22.3.1 Orthogonale Abbildung 1.285

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *orthogonal*, wenn sie das Skalarprodukt unverändert lässt, also

$$\forall_{\vec{v}, \vec{w}} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{v})^T f(\vec{w}) = \vec{v}^T \vec{w}$$

- f orthogonal $\Leftrightarrow f$ längen- und winkeltreu (bleiben unverändert nach Abbildung)
- Sei A die zu f gehörende Matrix:
 - Alle *reellen* Eigenwerte von A sind 1 oder -1 . (zuzüglich den Komplexen)
 - ist λ Eigenwert von A , so ist auch $\bar{\lambda}$ Eigenwert von A
 - f ist orthogonal $\Leftrightarrow A^T A = E$ bzw. $A^{-1} = A^T$
 - siehe für weitere Eigenschaften unter [22.3.2](#) auf der nächsten Seite.
- Alle orthogonalen Abbildungen in \mathbb{R}^2 sind entweder Drehungen oder Spiegelungen.

22.3.2 Unitäre Matrizen 1.284

Eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen aus \mathbb{C} heißt *unitär*, wenn $A^{-1} = \bar{A}^T$.

- Liegen alle Einträge in \mathbb{R} , so gilt A orthogonal ($A^{-1} = A^T$)
- Zeilenvektoren und Spaltenvektoren von A bilden jeweils ein Orthonormalsystem.
- $|\det A| = 1$
- Für alle Eigenwerte λ von A gilt $|\lambda| = 1$.
- Die Eigenvektoren zu zwei unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander, also $\vec{u}_1^T \vec{u}_2 = 0$.

22.3.3 Hermitesche Matrizen 1.284

Eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen aus \mathbb{C} heißt *hermitesch*, wenn $A = \bar{A}^T$.

- Liegen alle Einträge in \mathbb{R} , so ist A symmetrisch ($A = A^T$)
- Alle Eigenwerte von A sind reell
- Die Eigenvektoren zu zwei unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander, also $\vec{u}_1^T \vec{u}_2 = 0$.
- Für jeden Eigenwert stimmen geometrische und die algebraische Vielfachheit überein.
- A ist diagonalähnlich
- Zu jeder hermiteschen (symmetrischen) Matrix A gibt es eine unitäre (orthogonale) Matrix B , mit der A in eine reelle Diagonalmatrix D überführt werden kann.
 $B^T A B = B^{-1} A B = D$

23 Drehung im \mathbb{R}^2 und Quadriken

23.1 Gebilde

23.1.1 Ellipse

Ortslinie aller Punkte, die von zwei vorgegebenen Punkten (*Brennpunkten*) feste Abstandssumme haben. Die Normalform der Ellipsengleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- a, b nennen sich *Halbachsen* (Schnittpunkt der Ellipse mit den Koordinatenachsen)

$$\bullet c^2 = a^2 - b^2$$

$$\bullet \text{ Brennpunkte in } \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *Exzentrizität* von einer Ellipse $\varepsilon := \frac{c}{a} \in [0, 1)$
- Spezialfall $a = b \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow$ Kreis mit Radius a
- keine Asymptoten
- Entsteht z.B. durch Kegelschnitt mit Schnittebene die nur einen der beiden Kegel schneidet.

23.1.2 Parabel

Ortslinie aller Punkte, die von einem vorgegebenen Punkt C (Brennpunkt) selben Abstand wie von einer vorgegebenen Geraden g haben.

$$y = \frac{x^2}{4c}$$

$$\bullet \text{ Scheitel der Parabel (Extremstelle) bei } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Brennpunkt bei } \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

- *Exzentrizität* von einer Parabel $\varepsilon := 1$
- keine Asymptoten
- Entsteht z.B. durch Kegelschnitt mit Schnittebene parallel zu Kegelmanteln

23.1.3 Hyperbel

Ortslinie aller Punkte die zu zwei vorgegebenen Punkten (Brennpunkte) festen Betrag der Abstandsdifferenz haben.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- diese Formel für Hyperbel die nach links/rechts geöffnet ist
- a Schnitt der Hyperbelzweige mit der x -Achse
- $c^2 = a^2 + b^2$
- Brennpunkte bei $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$
- *Exzentrizität* von einer Hyperbel $\varepsilon := \frac{c}{a} > 1$
- nach oben/unten geöffnet mit $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- *Asymptoten* $y = \pm \frac{b}{a}x$
- Entsteht z.B. durch Kegelschnitt mit Schnittebene die durch oberen und unteren Kegel geht

23.1.4 Drehung in \mathbb{R}^2

Ein Punkt $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich mit Hilfe der Matrize $D(\alpha)$ um den Winkel α drehen. $\vec{b}_{neu} = D(\alpha)\vec{b}$

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- $D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha)$
- Eigenwerte von $D(\alpha)$:
 $\lambda_{1/2} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha = e^{\pm i\alpha} \in \mathbb{C}$
- ist eine orthogonale Abbildung

23.1.5 Spiegelung in \mathbb{R}^2

Ein Punkt $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich mit Hilfe der Matrize $S(\alpha)$ um eine Gerade die den Winkel α zur x Achse einnimmt spiegeln. $\vec{b}_{neu} = S(\alpha)\vec{b}$

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

- ist eine orthogonale Abbildung

23.2 Überführen von allgemeine Quadriken in Normalform

23.2.1 Allgemeine Quadrik

Eine Gleichung der Form

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ist eine Quadrik in allgemeiner Form.

23.2.2 Drehen

Gegeben ist eine Quadrik in allgemeiner Form. Diese lässt dich nun so drehen, das der gemischte Term (Bxy) verschwindet, die Gleichung also die Form

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0$$

mit $\bar{B} = 0$ hat. Hierzu wird mit dem Winkel

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\arctan\left(\frac{B}{C-A}\right)}{2} \\ \bar{A} &= A \cos^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha \\ \bar{B} &= 0 \\ \bar{C} &= C \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + A \sin^2 \alpha \\ \bar{D} &= D \cos \alpha - E \sin \alpha \\ \bar{E} &= E \cos \alpha + D \sin \alpha \\ \bar{F} &= F \end{aligned}$$

gedreht.

- $B^2 - 4AC = \bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C} = d$ bleibt unberührt von der Drehung.

23.2.3 Identifizieren des Typs

mit $d = B^2 - 4AC = -4\bar{A}\bar{C}$

Ellipse $d < 0$

Parabel $d = 0$

Hyperbel $d > 0$

23.2.4 Verschieben in Ursprung

Gegeben ist eine Quadrik in der Form:

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0$$

Bei dieser wurde also bereits der gemischte Term "weggedreht".

Hyperbel, Ellipse falls $\bar{A}, \bar{C} \neq 0$:

$$\frac{\bar{A}}{G}\tilde{x}^2 + \frac{\bar{C}}{G}\tilde{y}^2 = 1$$

- $G = \frac{\bar{D}^2}{4\bar{A}} + \frac{\bar{E}^2}{4\bar{C}} - \bar{F}$
- $\tilde{x} \mapsto x + \frac{\bar{D}}{2\bar{A}}$
- $\tilde{y} \mapsto y + \frac{\bar{E}}{2\bar{C}}$

Parabel falls $\bar{A} \neq 0, \bar{C} = 0$:

$$\tilde{y} = -\frac{\bar{A}}{\bar{E}}\tilde{x}^2$$

- $\tilde{x} \mapsto x + \frac{\bar{D}}{2\bar{A}}$
- $\tilde{y} \mapsto y + \frac{\bar{F}}{\bar{E}} - \frac{\bar{D}^2}{4\bar{A}\bar{E}}$

Parabel falls $\bar{A} = 0, \bar{C} \neq 0$:

$$\tilde{x} = -\frac{\bar{C}}{\bar{D}}\tilde{y}^2$$

- $\tilde{y} \mapsto y + \frac{\bar{E}}{2\bar{C}}$
- $\tilde{x} \mapsto x + \frac{\bar{F}}{\bar{D}} - \frac{\bar{E}^2}{4\bar{C}\bar{D}}$

Gerade falls $\bar{A}, \bar{C} = 0$:

$$y = -\frac{\bar{D}}{\bar{E}}x - \frac{\bar{F}}{\bar{E}}$$

Index

- Äquivalenz, 6
- Äquivalenzrelationen, 8
- äpuidistante Zerlegung, 21
- äquivalent, 6

- Abbildung, 36
- Abbildungen, 6, 39
- Abgeschlossen, 25
- abgeschlossenes Intervall, 7
- Abgeschlossenheit, 8
- Ableitung, 16, 19
- Ableitung Umkehrfunktion, 19
- absolut konvergent, 12
- absolute Konvergenz, 15
- Achsenabschnitt, 20
- Additivität, 28, 37
- Additivitaet, 29
- Adjunkte, 42
- aehnliche Matrizen, 43
- aequivalente Darstellungen, 30
- algebraische Vielfachheit, 43
- Allgemeine Exponentialfunktion, 18
- Allgemeiner Logarithmus, 18
- Allquantor, 6
- alternierend, 41
- alternierende harmonische Reihe, 14
- alternierende Multilinearform, 41
- Angeordnete Körper, 9
- antisymmetrisch, 8
- antisymmetrische Matrix, 38
- antizyklisches Vertauschen, 32
- Areafunktionen, 10
- Argument, 10
- Arkusfunktionen, 10
- Assoziativgesetz, 6–8, 34
- Asymptote, 21
- Asymptoten, 44

- Basis, 35
 - Kanonische, 35
 - Standard, 35
- Basiswechsel, 35, 40
- bedingt konvergent, 12
- Bernullische Ungleichung, 9
- beschränkte Funktionen, 21
- Beschränkt, 12
- beschränkt, 8
- Betrag
 - Komplex, 10
 - Vektor, 31, 36
- Betragskriterium, 23
- Beweisverfahren, 9
- bijektiv, 7, 41
- Bild, 16, 37
- Binomialkoeffizient, 9
- Binomischer Satz, 10
- Bogenlänge, 30
- Bolzano-Weierstraß, 25

- Brennpunkt, 44
- Brennpunkte, 44
- Brennpunkten, 44

- Carmersche Regel, 42
- Cauchy-Folge, 12
- Cauchy-Kriterium, 15
- Cauchy-Produkt, 13
- Cauchy-Reihe, 12
- Cauchy-Schwarze-Ungleichung, 9, 31
- Cauchyfolge, 24
- Cavalieri, 29
- Cayley-Hamilton, 43
- Charakteristische Funktion, 29
- charakteristisches Polynom, 43

- de l'Hospital, 18
- De Morgan, 6, 7
- Definit, 27
- definit, 27, 43
- Definitionsbereich, 20
- Definitionsbereich, 16
- Definitionslücken, 20
- Determinante, 32, 41
- diagonalähnlich, 44
- diagonalaehnlich, 43
- Differenz, 7
- Differenz, symmetrische, 7
- differenzierbar, 26
- Differenzierbare Funktionen, 18, 26
- Differenzierbarkeitsklassen, 26
- Dimension, 35, 37
- Direkte Summe, 34
- direkter Beweis, 9
- Disjunktion, 6
- Distributivgesetz, 6, 7, 9
- divergent, 11
- doppelpunktfrei, 29
- Doppelreihe, 12
- Drehung, 44, 45
- Dreiecksungleichung, 9, 10, 22, 24, 28, 31
- Durchschnitt, 34

- E-Umgebung, 8
- Ebene, 32
 - Lage, 33
- Ebenengleichung, 32
- echte Teilmenge, 7
- echtgebrochene Funktion, 21
- Eigengleichung, 43
- Eigenraum, 43
- Eigenvektor, 43
- Eigenwert, 43
- Eigenwerte, 27, 43
- Eingeschlossene Winkel, 31
- Einheitsmatrix, 39
- Einheitsvektor, 31
- Einheitsvektoren, 36

- Ellipse, 44
 Entwickeln, 42
 Entwicklungspunkt, 15, 24
 Entwicklungssatz, 32
 erweiterte Matrix, 40
 Erzeugendensystem, 35
 Euklidische Norm, 24
 Eulersche Zahl, 14
 Existenzquantor, 6
 explizit, 11
 Exponentialfunktion, 18
 Extremalstellen, 20
 Extremstellen, 27
 Extremum, 19
 Extremwerte, 20, 27
 Exzentrizität, 44
- Faktorisieren, 11
 Fakultät, 9
 Fehlstand, 41
 Feinheit, 21, 28
 Flächenfunktion, 22
 Folgen, 11
 Folgenkriterium, 16, 25
 folgt, 6
 Fubini, 28
 Fundamentalsatz der Algebra, 11
 Funktionalmatrix, 26
 Funktionen, 16
 Funktionsfolgen, 14
 Funktionsreihen, 14
- Ganze Zahlen, 7
 ganzrationale Funktionen, 21
 Gaußscher Algorithmus, 40
 gebrochenrationale Funktionen, 21
 geordnete Paare, 7
 geometrische Reihe, 14
 geometrische Vielfachheit, 43
 Gerade, 32
 Abstand, 33
 gerade Funktion, 17
 Geraden
 Lage, 33
 Geradengleichung, 32
 geschlossen, 29
 glatte Kurve, 29
 Gleichheit, 7, 8, 16
 gleichmäßig, 14
 gleichmäßig Stetig, 16
 gleichmäßig stetig, 25
 gleichmäßige Konvergenz, 15
 Gleichungssystem, 34
 Gleichungssysteme, 39
 gleichwertig, 6
 Gradient, 25
 Gram-Schmidtsches-Orthonormalisierungsverfahren,
 36
 Grenzfunktion, 14
 Grenzwert, 11, 17, 25
 Grenzwert im Punkt, 17
 Grenzwert im Unendlichen, 17
 Großer Umordnungssatz, 13
- Häufungspunkt, 8, 12, 25
 Hülle, 34
 Hadamasche Formel, 15
 Halbachsen, 44
 halboffenes Intervall, 7
 harmonische Reihe, 14
 Hauptdiagonale, 38
 Hauptsatz Diff./Integralrech., 22
 hebbare Unstetigkeit, 18
 hermitesch, 44
 Hessematrix, 26
 Hessische Normalform Ebenengleichung, 33
 Hilbert-Schmidtsches-Orthonormalisierungsverfahren,
 36
 hinreichend, 19
 Hochpunkt, 20
 Homogenität, 37
 homogenes LGS, 40
 Homomorphismus, 37
 Hospital, 12
 Hyperbel, 44
 Hyperbelfunktionen, 10
- i, 10, 38
 Imaginäre Einheit, 10
 Imaginärteil, 10
 Implikation, 6
 implikation, 9
 Implizite Funktionen, 27
 indefinit, 27, 43
 Indexverschiebung, 9
 indirekter Beweis, 9
 Induktion, 9
 Induktionsanfang, 9
 Induktionsannahme, 9
 Induktionsschritt, 9
 Infimum, 8
 inhomogenes LGS, 40
 injektiv, 6, 37
 innerer Punkt, 25
 Integral, 21, 26
 Substitution, 23
 Uneigentliche, 23
 Integralform, 24
 Integralkriterium, 14
 Integralrechnung, 21
 Integralsätze, 29
 Integration, 28
 integrierbar, 21
 Integrierbarkeitsbegriff, 21
 Intervall, 7
 inverse Matrix, 39
 Inverses Element, 8, 34
 inverses Element, 6, 8
- Jacobimatrix, 26
- Körper, 8, 34
 Angeordnet, 9

Kanonische Basis, 35, 38
 Kern, 37
 Kettenregel, 19, 27
 Koeffizienten, 15
 Komplex
 Argument, 10
 Kommutativgesetz, 6–8, 34
 Kompakt, 25
 Komplementärmenge, 7
 Komplex
 Polarkoordinaten, 10
 Zeiger, 10
 Komplexe Zahlen, 7, 10
 komplexkonjugiert, 41
 kompley konjugiert, 10
 Komponentenfunktionen, 27
 Konjungierte, 10
 Konjunktion, 6
 konkav, 20
 Kontraposition, 9
 konvergent, 11
 Konvergenz, 11, 12, 15, 24
 Konvergenzkriterien, 11, 13, 15
 Konvergenzradius, 15
 konvex, 20, 30
 Koordinaten, 35
 Koordinatenschreibweise, 37
 Krümmung, 20
 Kreisfunktionen, 10
 Kronecker-Symbol, 36
 Kurvendiskussion, 20
 Kurvenintegral, 30
 Kurvenintegrale, 29

 l'Hospital, 12
 Länge Vektors, 31
 Lösungsraum, 40
 Laenge einer Kurve, 30
 Lagrange-Identität, 32
 Lagrange-Multiplikation, 27
 Lagrange-Multiplikatoren, 27
 Lagrangeform, 24
 Leibnitz Formel, 41
 Leibnizsches Kriterium, 13
 LGS, 40
 Limes
 inferior, 12
 superior, 12
 linear
 Abbildung, 36
 abhängig, 34
 Gleichungssystem, 34
 Hülle, 34
 Teilraum, 35
 unabhängig, 34
 linear abhänig, 32
 linear Approximierbar, 26
 lineare Abbildung, 19, 22
 Lineare Abbildungen, 39
 Lineare Abhängigkeit, 34
 Lineare Gleichungssysteme, 39

Linearfaktoren, 11, 20
 Linearität, 28
 Linearkombination, 34
 Linkskurve, 20
 Linksseitiger Grenzwert, 17
 Logarithmusfunktion, 18
 Logik, 6
 Lokale Extrema, 27
 Lot, 33
 Lotgerade, 33

 Majorantenkriterium, 13, 15
 Majorrantenkriterium, 23
 Matrix, 37
 Matrixprodukt, 38
 Matrizen, 37, 39
 Quadratisch, 38
 Maxima, 20
 Maximum, 8, 17, 25
 mehrdimensionale Funktionen, 27
 Mehrfachreihe, 13
 Menge, 7
 Menge Operationen, 7
 messbar, 29
 Minima, 20
 Minimum, 8, 17, 25
 Mittelwertsatz, 19, 22, 28
 Mittelwertsatz der Integralrechnung, 29
 Mittelwertsatz Integralrechnung, 22
 Moivre, 11
 monoton, 11
 monotone Funktionen, 21
 Monotonie, 11, 12, 28
 Monotoniekriterium, 20
 Multilinearform, 41
 Multiplikation, 8

 Natürliche Zalen, 7
 Nebenbedingungen, 27
 Negation, 6
 negativ definit, 27
 Neutrales Element, 6, 8, 34
 neutrales Element, 39
 nicht, 6
 nilpotent, 38
 Norm, 24
 Normalenvektor, 26, 33
 Nullfolge, 11–13
 Nullmatrix, 38
 Nullmenge, 29
 Nullraum, 35
 Nullstelle, 11
 Nullstellen, 20

 Obersumme, 21
 oder, 6
 offenes Intervall, 7
 Ohne, 7
 Ordnungsregeln, 8
 Ordnungsrelationen, 8
 orthogonal, 36, 43

- Orthogonalbasis, 36
- Orthogonalsystem, 36
- Orthonormalbasis, 36
 - Existenz, 36
- Orthonormalisierungsverfahren, 36
- Orthonormalsystem, 36

- Paare, 7
- Parabel, 44
- Parameter, 29
- Parameterabhängig, 26
- parameterfreie Darstellung, 32
- Parameterintervall, 29
- Partialbruchzerlegung, 22
- partielle Ableitung, 25, 26
- partielle Integration, 22
- Partition, 21
- Permutation, 41
- Pfeile, 31
- Polarkoordinaten, 10
- Pole, 20
- Polstellen, 20
- Polynom, 11
- Polynomdivision, 21
- positiv definit, 27
- Potentialfeld, 30
- Potenzmenge, 7
- Potenzreihe, 15
 - konvergenz, 15
- Potenzreihen, 15, 18
- Prinzip von Cavalieri, 29
- Produkt
 - Matrix, 38
 - Spat, 32
- Produkt von Reihen, 13
- Produktintegration, 22
- Produktregel, 19
- Produkt
 - Skalar, 36
 - Skalare, 31
 - Vektoriell, 32
- Projektion, 32
- Punktsymmetrisch, 17
- Punktweise, 14

- Quader, 28
- Quadratisch
 - Matrizen, 38
- Quadratische Form, 27
- Quadriken, 44, 45
- Quantifikatoren, 6
- Quellraum, 36
- Quotientenkriterium, 13
- Quotientenregel, 19

- Randpunkt, 25
- Rang, 42
 - Matrix, 39
- Rangkriterium, 40
- rationale Funktion, 22
- Rationale Zahlen, 7

- Realteil, 10
- Rechtskurve, 20
- Rechtsseitiger Grenzwert, 17
- rechtwinklig, 11
- Reelle Zahlen, 7
- reflexiv, 8
- Regel von de l'Hospital, 18
- Regel von Sarrus, 41
- regulär, 42
- Reguläre Matrix, 39
- Reihen, 12
 - Konvergenzkriterien, 13
- rekursiv, 11
- Relation, 8
- Relative Extremwerte, 20
- Relatives Extremum, 19
- relatives Maximum, 25
- relatives Minimum, 25
- Renormierung, 31
- Restgleich, 24
- Restpolynom, 11
- Restriktion, 16
- Richtungsableitung, 26
- Richtungskosinus, 32
- Riemann Integral, 21
- Riemann integrierbar, 21
- Riemann-Integral, 28
- Riemann-Summe, 21
 - linke, 21
 - obere, 21
 - rechte, 21
 - untere, 21
- Riemannsche Integral, 29
- Ring, 38
- Rolle, 19

- Sandwichtheorem, 12
- Sarrus, 41
- Sattelpunkt, 19, 20
- Satz von Rolle, 19
- Schließen, 9
- Schnitt, 7
- Schnittgeraden, 33
- Schnittpunkt, 33
- Schranken, 8
- Schwarz, 26
- senkrecht, 36
- Signum, 41
- Skalare Produkt, 36
- skalare Produkt, 31
- Skalarfeld, 30
- Skalarmultiplikation, 31, 38
- Spaltenoperationen, 39, 41
- Spaltensummen, 13
- Spaltenvektor, 31, 37
- Spatprodukt, 32
- Spiegelsymmetrisch, 17
- Spiegelung, 45
- Sprungstelle, 17
- Stammfunktion, 22
- Standardbasis, 35

- Standardmengen, 7
- Steigung, 19
- stetig, 16, 26
- stetige Fortsetzung, 17, 18
- stetige Funktion, 15
- stetige Funktionen, 16, 21
- Stetigkeit, 25
- streng monoton, 11
- stueckweise glatt, 29
- Substitution
 - Integral, 23
- Substitutionsregel, 29
- Summe, 34
 - Direkte, 34
- Summen, 9
- Summenregel, 19
- Supremum, 8
- Surjektiv, 37
- surjektiv, 7
- symmetrisch, 8
- symmetrische Matrix, 38
- Symmetrie, 20
- symmetrische Differenz, 7

- Tangente, 19, 30
- Tangenten, 19
- Tangenteneinheitsvektor, 30
- Tangentenvektor, 30
- Tangentialebene, 26
- Taylor, 24
- Taylorentwicklung, 23
- Taylorpolynom, 18, 24
- Taylorreihe, 15, 24
- Teilfolge, 11
- Teilmenge, 7, 16
- Teilmenge(echte), 7
- Teilraum, 35
- Teilsommen, 12
- Tiefpunkt, 20
- transitiv, 8
- Transponierte Matrix, 38
- Transposition, 41
- Trigonometrie, 10
- Triviale Darstellung Nullvektor, 34
- Tupel, 35

- Umgebung, 8
- Umgekehrte Dreiecksungleichung, 9
- Umkehrabbildung, 39
- Umkehrfunktion, 16, 19, 25
- Umkehrfunktion, 18
- Umkehroperation, 22
- Umordnung, 13
- Unbestimmt, 12
- unbestimmtes Integral, 22
- und, 6
- Uneigentliche Integrale, 23
- ungerade Funktion, 17
- Ungleichungen, 9
- unitäre-Vektorraum, 36
- unitaer, 44

- Unstetigkeit, 18
- Unstetigkeitsstellen, 20
- Untersumme, 21
- Untervektorraum, 34, 40
- Urbild, 16
- UVR, 34

- Vandermonde-Matrix, 42
- Vektorielle Produkt, 32
- Vektorraum, 34, 37
- Vektorrechnung, 31
- Vektrofeld, 30
- Vereinigung, 7, 34
- Vergleichskriterium, 13
- Verkettung, 16
- Verknüpfungen, 6
- Vertauschbarkeit, 26
- Vielfachheit, 43
- Vietaischer Wurzelsatz, 11
- Vollständige Induktion, 9
- Volumen einer Menge, 29
- Volumenform, 41

- Wachstumsverhalten, 18
- wegunabhaengig, 30
- Wendepunkt, 20
- Wertebereich, 16, 21
- Widerspruchsbeweis, 9
- windschief, 33
- Winkelsätze, 10
- Wurzelkriterium, 13
- Wurzelsatz, 11

- Y-Achsenabschnitt, 20

- Zalen, 7
- Zeichnung von Funktionen, 21
- Zeilenoperationen, 39, 41
- Zeilensommen, 13
- Zeilenvektor, 31, 37
- Zentralfeld, 31
- Zerlegung, 21, 28
- Zielraum, 36
- zueinander aequivalente Darstellungen, 30
- Zuordnung, 11
- Zuordnungsvorschrift, 11
- Zwischenwertsatz, 17
- zyklisches Vertauschen, 32
- Zylindermengen, 29