

# M 9

## Pendel mit großen Auslenkungen

Felix Neuschäfer  
Marco Möller

09.01.2006

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Vorbereitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Beschreibung des Aufbaus</b>	<b>2</b>
2.1	Messaufbau . . . . .	2
2.2	Probleme beim Versuchsaufbau . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Aufgaben und Diagramme</b>	<b>3</b>
3.1	Vergleich der Messwerte mit der Simulation . . . . .	3
3.2	Überprüfung der T-Näherungen . . . . .	5
3.3	Bessere Näherungen / sehr große Auslenkungen . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Anhang</b>	<b>8</b>
4.1	Problemdiagramme . . . . .	8
4.2	Benutzte Algorithmen . . . . .	9

## 1 Theoretische Vorbereitung

Für ein Physikalisches Pendel mit dem Trägheitsmoment  $J$  und dem Drehmoment  $M$  gilt

**Ohne Reibung**

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} &= M \\ &= -R \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{R \cdot m \cdot g}{J} \sin \varphi \\ &= -\omega_0 \sin \varphi \end{aligned}$$

Für kleine Winkel gilt (*Kleinwinkelnäherung*)  $\varphi \approx \sin \varphi$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\frac{R \cdot m \cdot g}{J} \varphi \\ &= -\omega_0 \varphi \end{aligned}$$

also ist  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  die Schwingungsdauer bei kleinen Auslenkungen.  $J$  ist hierbei das Trägheitsmoment.

Für größere Werte gilt

$$T(\hat{\varphi}) = T_0 \left( 1 + \frac{1}{16} \hat{\varphi}^2 \right)$$

im Folgenden als *T-Formel* bezeichnet.

**Mit Reibung**

$$J\ddot{\varphi} = M - M_R$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega \cdot \sin \varphi - \underbrace{\dot{\varphi} \cdot k_1}_{\text{Luftreibung}} - \underbrace{\text{sign}(\dot{\varphi}) \cdot k_2}_{\text{Gleitreibung}} + \underbrace{\left[ \text{sign}(\sin \varphi) \cdot \min(k_3, |\omega \cdot \sin \varphi|) \right]}_{\text{Haftreibung}}$$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Die Haftreibung steht in Klammern, da Sie nur wirkt, falls  $\dot{\varphi} = 0$  ist. Zudem ist sie dergestalt, dass sie die aktuell vorhandene Beschleunigung nur maximal bis zum Wert  $k_3$  kompensiert, aber nicht ihr Vorzeichen ändert. Dies ist in der Simulation implementiert.

Die sign-Funktion sorgt dafür, dass die Reibung immer der Bewegungsrichtung entgegengerichtet wirkt.

Die Luftreibung haben wir als linear geschwindigkeitsabhängig angesehen. Diese wird großteils von der Knete und den Gewichten an den Fäden verursacht.

Die Gleitreibung (oder auch Rollreibung) wirkt in den Lagern der Drehscheibe und des Bewegungsaufnehmers.

Die DGL wird in der Simulation für unser Pendel verwendet.

## 2 Beschreibung des Aufbaus

### 2.1 Messaufbau

An einen Teller, der um eine horizontale Achse rotiert, wird ein Stück Knete befestigt, um Schwingungen zu ermöglichen.

Um den Teller herum wird ein Faden geführt, der auf der rechten Seite in Gewichten endet. Auf der linken Seite wird der Faden zunächst über den Bewegungsaufnehmer geführt und mit der gleichen Masse an Gewichten beschwert, um ihn straff zu halten und Rutschen sowie Spünge zu vermeiden.

Die Apparatur wird mittels Stativstangen und Klemmen zusammengebaut und fixiert, um Schwingungen des Versuchsaufbaus selbst zu verhindern.

Abbildung 1: Unser Versuchsaufbau



## 2.2 Probleme beim Versuchsaufbau

Es war ein mehrfacher Umbau des Versuchsaufbaus erforderlich, da Reibungseffekte, verschiedene Teile des Aufbaus und die Computerprogramme Probleme verursachten.

Zunächst rutschte der verwendete Faden über die anfänglich angebrachte 2. Rolle, während diese sich nicht zu drehen begann.

Ein Austausch des Fadens brachte bessere Ergebnisse, jedoch drehte sich die Rolle immernoch nicht.

Der im Austausch eingebaute, aber nicht angeschlossene Bewegungsaufnehmer quietschte und verriet damit den Einfluss störender Reibungseffekte.

Letzlich ließen wir den Faden sich direkt mit dem Drehteller ohne 2. Rolle mitdrehen. Der angeschlossene Bewegungsaufnehmer, bzw. das CASSY-Interface scheint bei manchen Punkten Drehungen des Bewegungsaufnehmers "verschluckt" zu haben, was Sprünge bei den aufgenommenen Werten erklärt.

Um dieses Problem zu vermeiden, wechselten wir auf das DOS-Programm. Die Genauigkeit war zwar wesentlich geringer, doch die Kurven zeigten das erwartete Verhalten teilweise deutlich besser. Leider war die mögliche Menge der aufzunehmenden Messpunkte begrenzt. Beispieldiagramme für diese Probleme befinden sich im Anhang.

Darüber hinaus haben wir mit verschiedenen schweren Gewichten experimentiert, um den bestmöglichen Aufbau zu finden.

## 3 Aufgaben und Diagramme

### 3.1 Vergleich der Messwerte mit der Simulation

Man sieht an der Übereinstimmung von Abbildung 2 und 3, dass verschiedene Aufbauten qualitativ ähnliches Verhalten zeigen.

Abbildung 2: Bewegungsverlauf 1. Aufbau

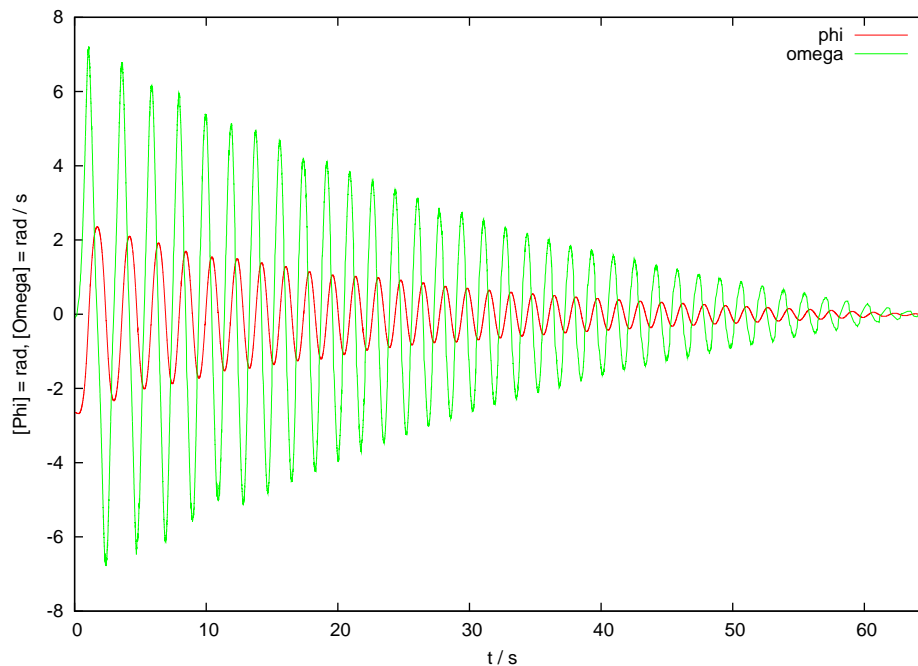
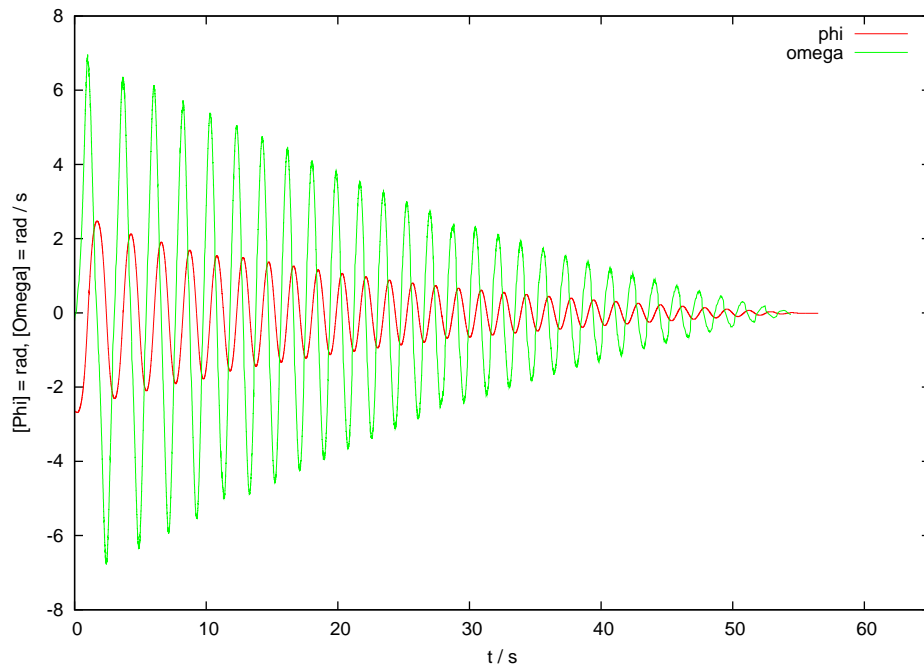


Abbildung 3: Bewegungsverlauf 2. Aufbau



In Vergleich zwischen Simulation und Messung sowohl bei  $\phi$  (Abbildung 4) als auch bei  $\omega$  (Abbildung 5) zeigt sich eine nahezu optimale Übereinstimmung.

Abbildung 4: Phi im 1. Aufbau verglichen mit Simulation

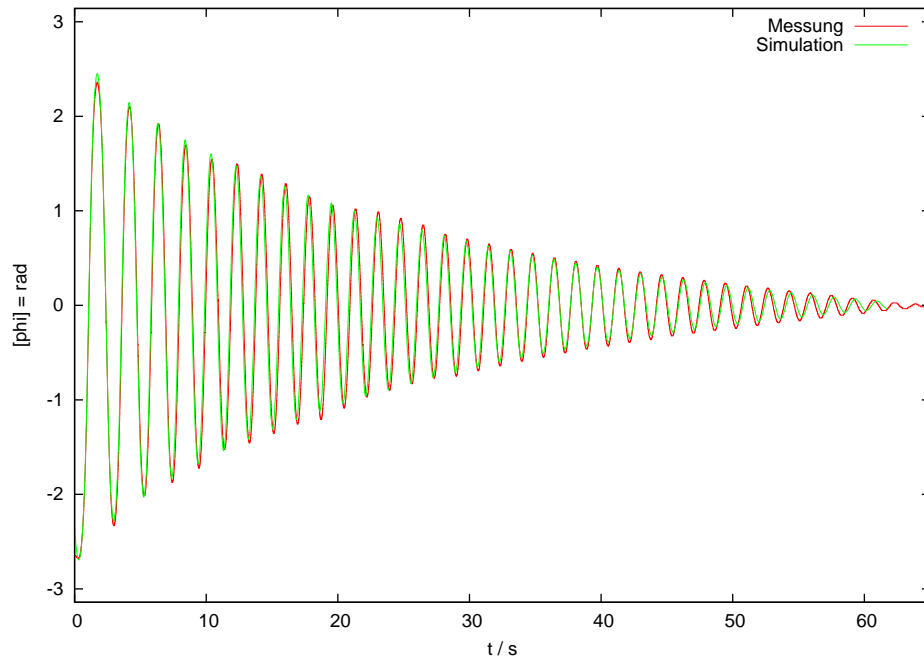
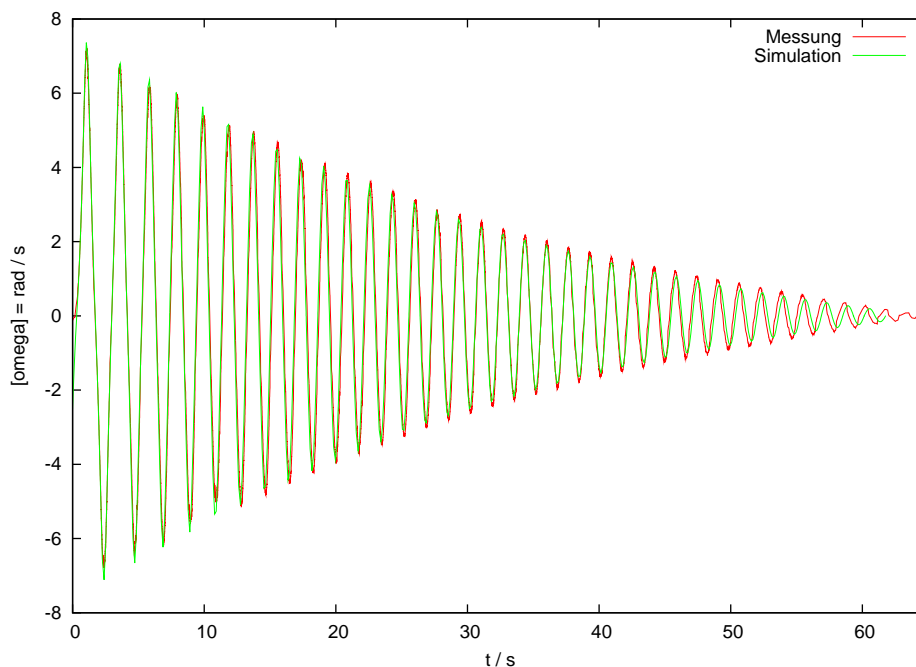


Abbildung 5: Omega im 1. Aufbau verglichen mit Simulation



### 3.2 Überprüfung der T-Näherungen

Aus den verwendeten Messdaten einer Messung wurde in einem Diagramm (Abbildung 6) die Auslenkung ( $\varphi$ ) über die Zeit ( $t$ ) dargestellt. Die Minima und Maxima der entstandenen Funktion wurden durch den Computer bestimmt und nach einiger Arbeit auch auf die Mitte des jeweiligen Plateaus gesetzt. Anschließend haben wir mit verschiedenen Fits an die zuvor bestimmten Minima und Maxima experimentiert, wobei ein  $x^3$ -Fit sie gut approximiert. (Verwendete Algorithmen siehe Abschnitt 4.2).

Aus den so bestimmten Daten wurde ein weiteres Diagramm (Abbildung 7) erstellt, mit der Zeit ( $T$ ) über die maximale Auslenkung ( $\hat{\varphi}$ ). Wiederum haben wir verschiedene Fits versucht, bis klar war, dass ein  $x^4$ -Fit den Werten annähernd perfekt entspricht. In demselben Diagramm sind desweiteren noch die Funktionen für die Kleinwinkelnäherung und die T-Formel dargestellt. In einem weiteren Diagramm (Abbildung 8) sind die relativen Fehler der Näherungen über die Auslenkung dargestellt.

Im Sinne der Aufgabe haben wir anschließend die Gültigkeitsbereiche der Kleinwinkelnäherung und der T-Formel überprüft.

Hier zeigte sich für die **Kleinwinkelnäherung**: Bis zu einer Auslenkung von 0,4 rad, entsprechend  $22,9^\circ$  zeigt die Näherung gute (1% Fehler) Übereinstimmung.

Für die **T-Formel** fanden wir heraus: In einem Bereich bis 1 rad, entsprechend  $57,3^\circ$  Auslenkung stimmt die Formel mit akzeptablem Fehler (1%). Hier steigt der Fehler allerdings nicht so schnell an, wie bei der Kleinwinkelnäherung.

Abbildung 6: Amplitudenverlauf im 1. Aufbau

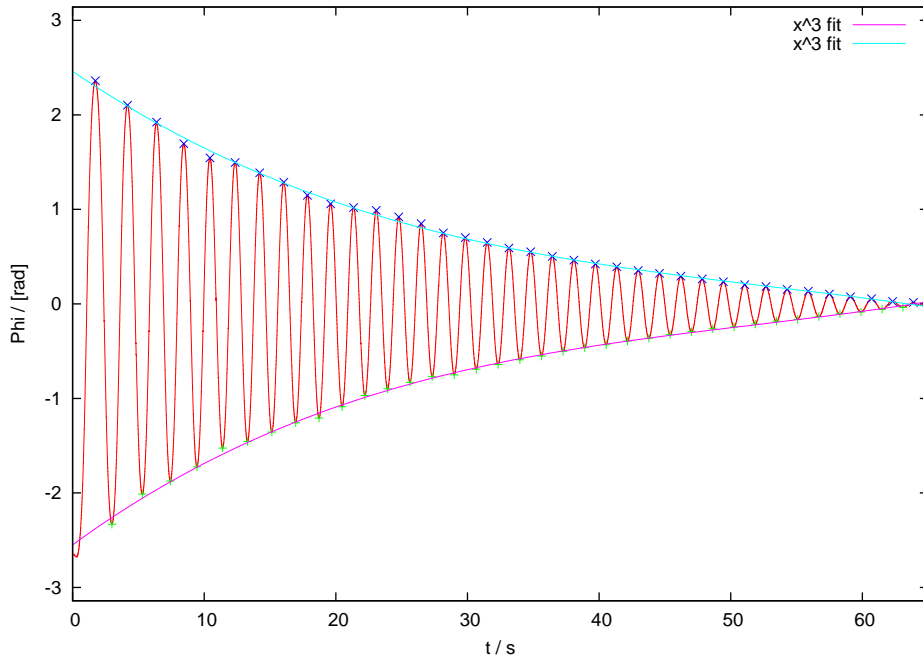


Abbildung 7: Unterschiedliche Periodendauer im 1. Aufbau

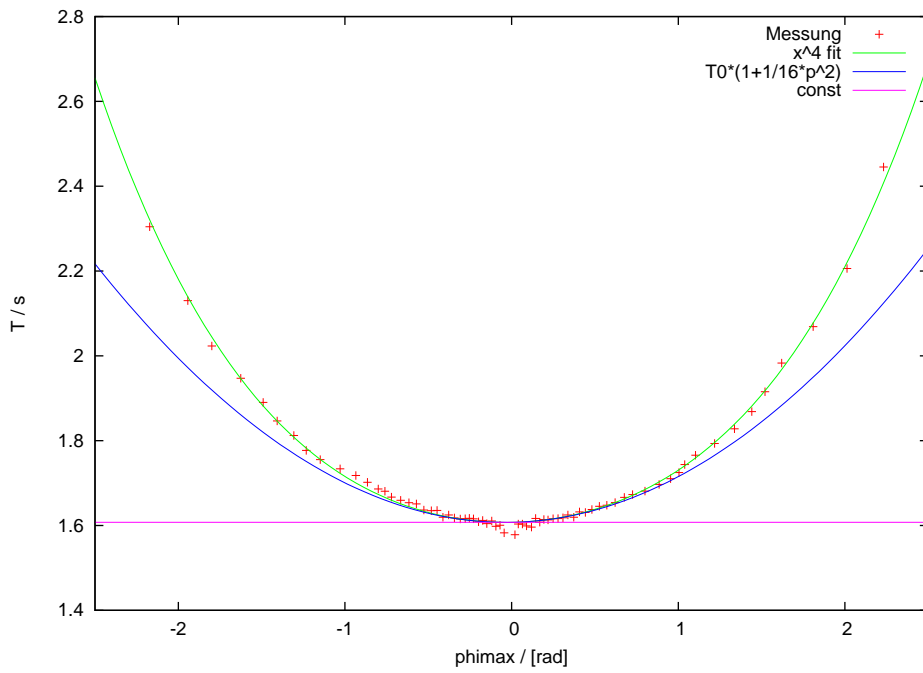
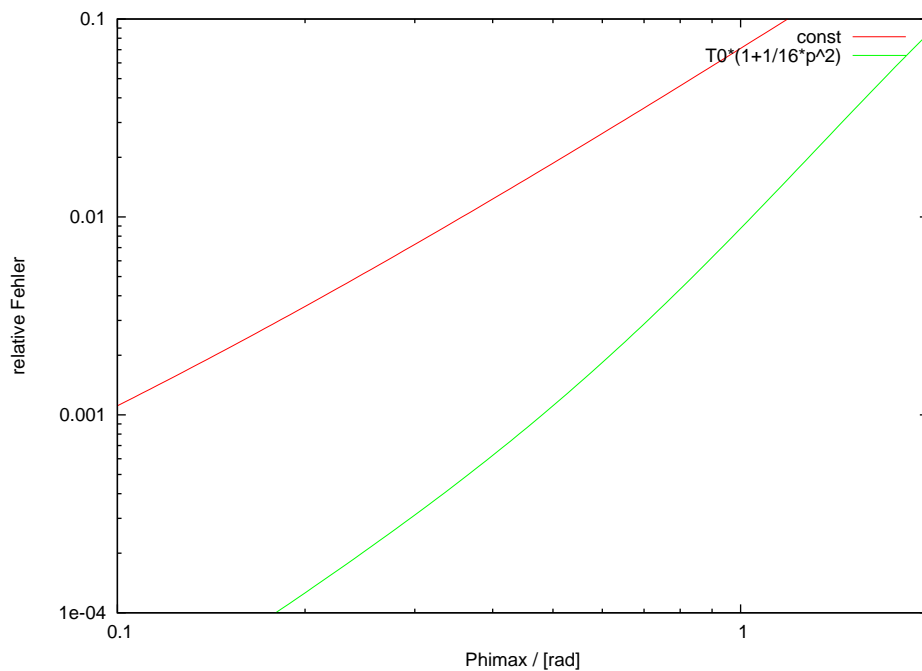


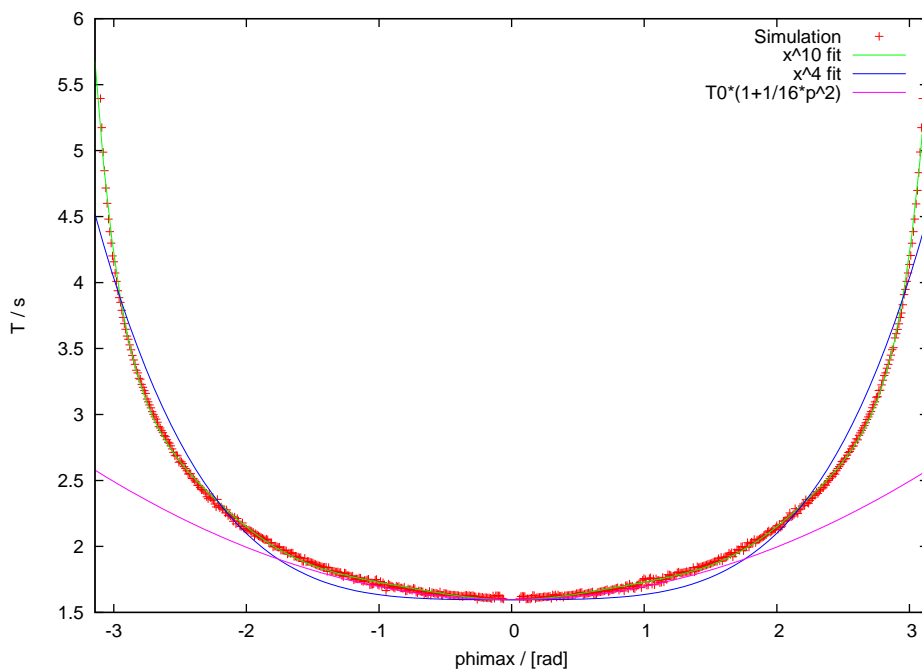
Abbildung 8: Fehler von Periodendauer-Näherungen im 1. Aufbau



### 3.3 Bessere Näherungen / sehr große Auslenkungen

Gerade die Periodendauern von großen Auslenkungen lassen sich aufgrund von Reibung schlecht experimentell bestimmen. In unserer Simulation lässt sich allerdings der Reibungseinfluss "abschalten". Tut man dies, erhält man ein Diagramm mit sehr viel mehr Messwerten. Um die verschiedenen Maximalauslenkungen zu erhalten, wurde die Simulation mit unterschiedlichen Anfangsamplituden gestartet. Jeder Punkt entspricht somit einer eigenen Schwingung. Siehe hierzu Abbildung 9.

Abbildung 9: Vergleich von verschiedenen Fits



Für  $\hat{\varphi} = \pi$  kann keine Schwingung entstehen, da das Pendel hier im idealen Fall bewegungslos bleibt. Dies würde

also bedeuten

$$\lim_{\hat{\varphi} \rightarrow \pi} T(\hat{\varphi}) = \infty$$

Das heißt, dass die Schwingungen immer länger dauern, je weiter man sich  $\pi$  nähert und die Schwingungsdauer bei  $\pi$  unendlich wird. Dies lässt sich prinzipiell nicht mit einem (endlichen) Polynom beschreiben, sondern nur mit einer unendlichen Reihe. Für Werte in der Nähe von  $\pi$  erhält man aber mit dem Polynom 10. Ordnung

$$T(\varphi) = T_o (1 + 3.2 \cdot 10^{-4} \varphi + 1.25 \cdot 10^{-1} \varphi^2 - 6.3 \cdot 10^{-2} \varphi^4 + 2.52 \cdot 10^{-2} \varphi^6 + 3.76 \cdot 10^{-3} \varphi^8 + 2.02 \cdot 10^{-4} \varphi^{10})$$

eine bessere Näherung als mit einem Polynom geringerer Ordnung, wie der  $x^4$ -Fit oder die T-Formel in diesem Diagramm veranschaulichen.

Der  $x^4$ -Fit hat allerdings noch ein weiteres Problem. Man würde erwarten, dass das Polynom genauer als die nur quadratische T-Formel ist, was für große Winkelbereiche gerade kleiner Auslenkungen aber nicht der Fall ist.

## 4 Anhang

### 4.1 Problemdiagramme

In Abbildung 10 kann man die Sprünge erkennen, in Abbildung 11 den Abbruch des DOS-Programms bei einer bestimmten Menge an Werten.

Abbildung 10: Amplitudenverlauf in Fehlschlag

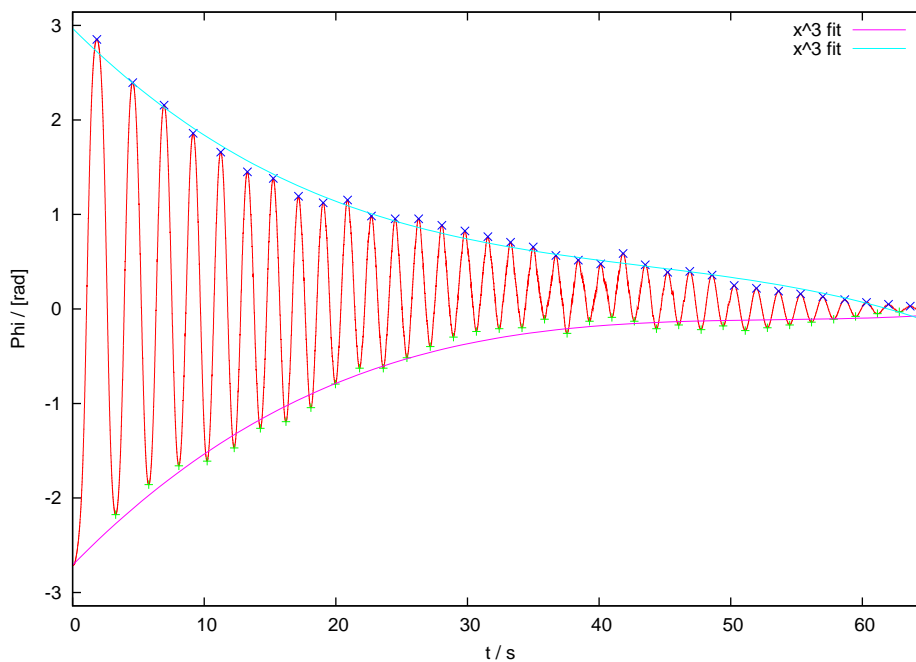
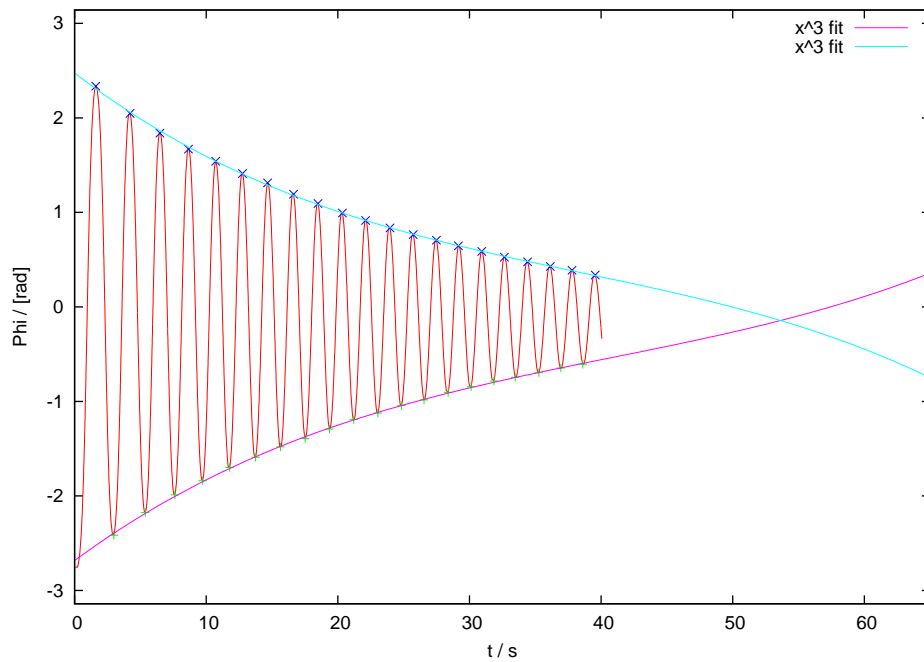




Abbildung 11: Amplitudenverlauf in Fehlschlag



## 4.2 Benutzte Algorithmen

**Integration** unserer DGL (Simulation) führen wir numerisch mit dem Runge Kutta 4/5 Algorithmus mit adaptiver Schrittweitenkontrolle durch. Unsere Implementierung lehnt sich an den Numerical Recipes <http://www.library.cornell.edu/nr/bookcpdf/c16-2.pdf> an.

**Extremalwerte** von den Schwingungen erhalten wir durch einen eigenen Algorithmus. Dieser sucht Punkte in den Daten, in denen sich die Steigung umkehrt. Leider sind kleine Störspitzen in den Daten enthalten, so dass dies alleine nicht ausreicht. Um diese kleinen Spitzen abzufangen, darf eine Spitze nicht weniger als  $\frac{1}{4}$  der letzten Amplitude vom vorher gefundenen Maximum entfernt sein.

**Fits** führen wir mit der in Gnuplot integrierten Implementierung durch. Taucht im Protokoll  $x^n$  auf, ist jedesmal das vollständige Polynom vom Grad  $n$  gemeint.