Übungsaufgaben Analysis I
Blatt 1

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H 1

1.1 Zeige...

$$
\begin{aligned}
(2,3) \sim (3,4) &\Rightarrow 2+4=3+3 \\
&\Rightarrow 6=6
\end{aligned}
$$

1.2 Zeige...

1.2.1 reflexivität

$$
(n,m) \sim (n,m) \Rightarrow n+m=m+n
$$

1.2.2 symmetrisch

$$
\begin{aligned}
(n,m) \sim (n',m') &\Rightarrow n+m'=n'+m \\
&\Rightarrow n'+m=n+m' \\
&\Rightarrow (n',m') \sim (n,m)
\end{aligned}
$$

1.2.3 transitiv

$$
\begin{aligned}
& (n,m) \sim (n',m') \wedge (n',m') \sim (n'',m'') \\
\Rightarrow\ & n+m'=n'+m \wedge n'+m''=n''+m' \\
\Rightarrow\ & n+m'+m''=n'+m+m'' \wedge n'+m''+m=n''+m'+m \\
\Rightarrow\ & n+m'+m''=n''+m'+m \\
\Rightarrow\ & n+m''=n''+m \\
\Rightarrow\ & (n,m) \sim (n'',m'')
\end{aligned}
$$

2 Aufgabe - H 2

2.1 Zeige, dass..

2.1.1 reflexiv

$$\begin{aligned} a \sim_m a &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k} : a = km + a \\ &\Rightarrow k = 0 \wedge a = a \end{aligned}$$

2.1.2 symmetrisch

$$\begin{aligned} a \sim_m b &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k} : a = km + b \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k} : b = -km + a \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k} : b = km + a \\ &\Rightarrow b \sim_m a \end{aligned}$$

2.1.3 transitiv

$$\begin{aligned} a \sim_m b \wedge b \sim_m c &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k} : a = km + b \wedge \exists_{\mathbb{Z}}^{l} : b = lm + c \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k,l} : a = km + lm + c \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k,l} : a = (k+l)\,m + c \\ &\Rightarrow a \sim_m c \end{aligned}$$

2.2 Äquivalenzklasse von ...

$$\begin{aligned} [0] &= \{x | x = 0 + km \wedge k \in \mathbb{Z}\} \\ [1] &= \{x | x = 1 + km \wedge k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

2.3 Menge aller Äquivalenzklassen

$$\begin{aligned} M_m &= \{[k]_m | k \in [0, m-1] \wedge k \in \mathbb{Z}\} \\ [k]_m &= \{x | x = v + km \wedge k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

2.4 Beispiele

2.4.1 $m = 5$

$$\begin{aligned} 6 &\in [1] \\ 7 &\in [2] \\ 6 + 7 = 13 &\in [3] \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Summe von Zwei Elementen auf der einen Seite die Summation der Äquivalentzklassen auf der anderen Seite hervorruft.

2.4.2 Def. +

$$+ : M_m \times M_m \to M_m : [a]_m + [b]_m \mapsto [(a+b)\,\%m]_m$$

Diese Definition führt die Äquivalentzklassensummation auf die Summation ihrer Bezeichner zurück, wie es oben auch geschehen ist.

Satz:

$$\forall_{\mathbb{Z}}^{a,b} : (a \in [c]_m \wedge b \in [d]_m) \Rightarrow ((a+b) \in ([c]_m + [d]_m))$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
a \in [c]_m \wedge b \in [d]_m \quad & \Rightarrow \quad \exists_{\mathbb{Z}}^{k,l} : a = km + c \wedge b = lm + d \\
& \Rightarrow \quad \exists_{\mathbb{Z}}^{k,l} : a + b = km + c + lm + d \\
& \Rightarrow \quad \exists_{\mathbb{Z}}^{k,l} : a + b = (k+l)\,m + c + d \\
& \Rightarrow \quad \exists_{\mathbb{Z}}^{k} : a + b = km + c + d \\
& \Rightarrow \quad \exists_{\mathbb{Z}}^{k} : a + b = km + (c+d)\,\%m \\
& \Rightarrow \quad (a+b) \in ([c]_m + [d]_m)
\end{aligned}$$