

Übungsaufgaben Analysis I

Blatt 1

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H 1

1.1 Zeige...

$$\begin{aligned}(2, 3) \sim (3, 4) &\Rightarrow 2 + 4 = 3 + 3 \\ &\Rightarrow 6 = 6\end{aligned}$$

1.2 Zeige...

1.2.1 reflexivität

$$(n, m) \sim (n, m) \Rightarrow n + m = m + n$$

1.2.2 symmetrisch

$$\begin{aligned}(n, m) \sim (n', m') &\Rightarrow n + m' = n' + m \\ &\Rightarrow n' + m = n + m' \\ &\Rightarrow (n', m') \sim (n, m)\end{aligned}$$

1.2.3 transitiv

$$\begin{aligned}(n, m) \sim (n', m') \wedge (n', m') \sim (n'', m'') \\ \Rightarrow n + m' = n' + m \wedge n' + m'' = n'' + m' \\ \Rightarrow n + m' + m'' = n' + m + m'' \wedge n' + m'' + m = n'' + m' + m \\ \Rightarrow n + m' + m'' = n'' + m' + m \\ \Rightarrow n + m'' = n'' + m \\ \Rightarrow (n, m) \sim (n'', m'')\end{aligned}$$

2 Aufgabe - H 2

2.1 Zeige, dass..

2.1.1 reflexiv

$$\begin{aligned}a \sim_m a &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^k : a = km + a \\ &\Rightarrow k = 0 \wedge a = a\end{aligned}$$

2.1.2 symmetrisch

$$\begin{aligned}a \sim_m b &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^k : a = km + b \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^k : b = -km + a \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^k : b = km + a \\ &\Rightarrow b \sim_m a\end{aligned}$$

2.1.3 transitiv

$$\begin{aligned}a \sim_m b \wedge b \sim_m c &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^k : a = km + b \wedge \exists_{\mathbb{Z}}^l : b = lm + c \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k,l} : a = km + lm + c \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k,l} : a = (k+l)m + c \\ &\Rightarrow a \sim_m c\end{aligned}$$

2.2 Äquivalenzklasse von ...

$$\begin{aligned}[0] &= \{x | x = 0 + km \wedge k \in \mathbb{Z}\} \\ [1] &= \{x | x = 1 + km \wedge k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

2.3 Menge aller Äquivalenzklassen

$$\begin{aligned}M_m &= \{[k]_m | k \in [0, m-1] \wedge k \in \mathbb{Z}\} \\ [k]_m &= \{x | x = v + km \wedge k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

2.4 Beispiele

2.4.1 $m = 5$

$$\begin{aligned}6 &\in [1] \\ 7 &\in [2] \\ 6 + 7 = 13 &\in [3]\end{aligned}$$

Man sieht, dass die Summe von Zwei Elementen auf der einen Seite die Summation der Äquivalenzklassen auf der anderen Seite hervorruft.

2.4.2 Def. +

$$+ : M_m \times M_m \rightarrow M_m : [a]_m + [b]_m \mapsto [(a + b) \% m]_m$$

Diese Definition führt die Äquivalenzklassensummation auf die Summation ihrer Bezeichner zurück, wie es oben auch geschehen ist.

Satz:

$$\forall_{\mathbb{Z}}^{a,b} : (a \in [c]_m \wedge b \in [d]_m) \Rightarrow ((a + b) \in ([c]_m + [d]_m))$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a \in [c]_m \wedge b \in [d]_m &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k,l} : a = km + c \wedge b = lm + d \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k,l} : a + b = km + c + lm + d \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^{k,l} : a + b = (k + l)m + c + d \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^k : a + b = km + c + d \\ &\Rightarrow \exists_{\mathbb{Z}}^k : a + b = km + (c + d) \% m \\ &\Rightarrow (a + b) \in ([c]_m + [d]_m) \end{aligned}$$