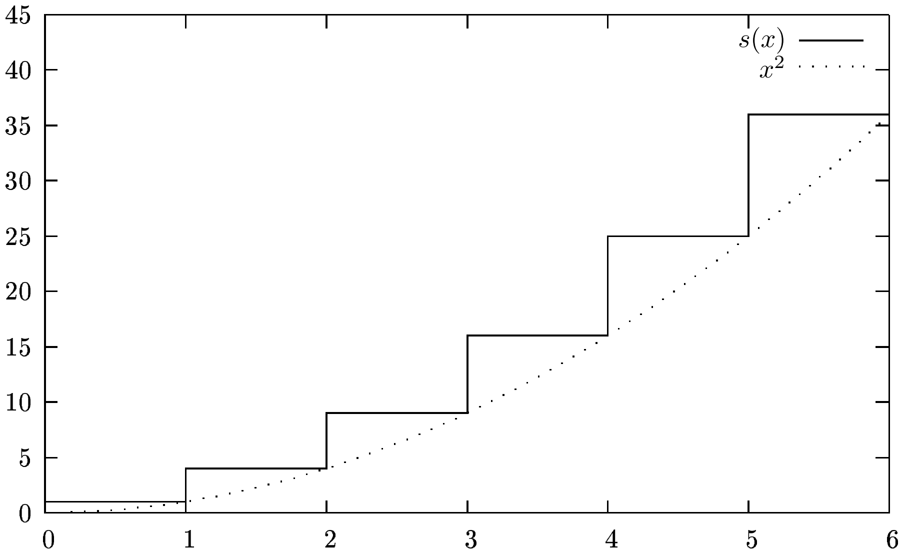
Übungsaufgaben Analysis I
Blatt 10

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

10. Januar 2005

1 Aufgabe - H1

1.1 a)



Allgemein erwarte ich, das das Integral den Wert

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$$

erlangt (Schulwissen).

1.2 b)

Jetzt gehts los:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, a_{k+1}^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{b-a}{n}(k+1) - \left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\right)\left(a + \frac{b-a}{n}(k+1)\right)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(a + \frac{b-a}{n}(k+1)\right)^2 \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{b-a}{n}k\right)^2 \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a^2 + 2a\frac{b-a}{n}k + \frac{(b-a)^2}{n^2}k^2\right) \\
&= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a^2 + \sum_{k=1}^{n} 2a\frac{b-a}{n}k + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^2}{n^2}k^2\right) \\
&= \frac{b-a}{n} \left(a^2 \sum_{k=1}^{n} 1 + 2a\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= \frac{b-a}{n} \left(a^2 n + 2a\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{b-a}{n} \left(a^2 n + a(b-a)(n-1) + (b-a)^2 \frac{2n^2+3n+1}{6n}\right) \\
&= (b-a)\left(a^2 + a(b-a)\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (b-a)^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

mehr mühe mit dem Vereinfach mach ich mir jetzt nicht...

1.3 c)

Und dessen Grenzwert

$$
\begin{aligned}
\lim_n I_n &= \lim_n (b-a)\left(a^2 + a(b-a)\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (b-a)^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right) \\
&= (b-a)\left(a^2 + a(b-a) + (b-a)^2 \frac{1}{3}\right) \\
&= (b-a)\left(ab + (b-a)^2 \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3}(b-a)^3 + (b-a)\,ab \\
&= \frac{1}{3}\left(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3\right) + ab^2 - a^2b \\
&= \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)
\end{aligned}
$$

2 Aufgabe H2

Da f eine Regelfunktion ist, muss es laut def. eine Funktionenfolge f_n geben, die gleichmäßig gegen f konvergieren. Wähle nun ein Folge f_n so, das zusätzlich noch $\forall n : \forall x \in [a, b] : f_n(x) \geq \delta$ gilt. Eine solche Folge muss es geben, da ich mich auch von oben der Funktion f annähern kann. Die Folge $\frac{1}{f_n}$ ist dann ebenfalls beschränkt, da $\frac{1}{f_n} \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow \left\| \frac{1}{f} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}$ für alle x gilt. Ihr Grenzwert ist $\lim_n \frac{1}{f_n} = \frac{1}{\lim_n f_n} = \frac{1}{f}$. Ich habe somit $\frac{1}{f}$ als Grenzwert einer beschränkten Funktionenfolge angegeben. Somit ist $\frac{1}{f}$ eine Regelfunktion.