

Übungsaufgaben Analysis I

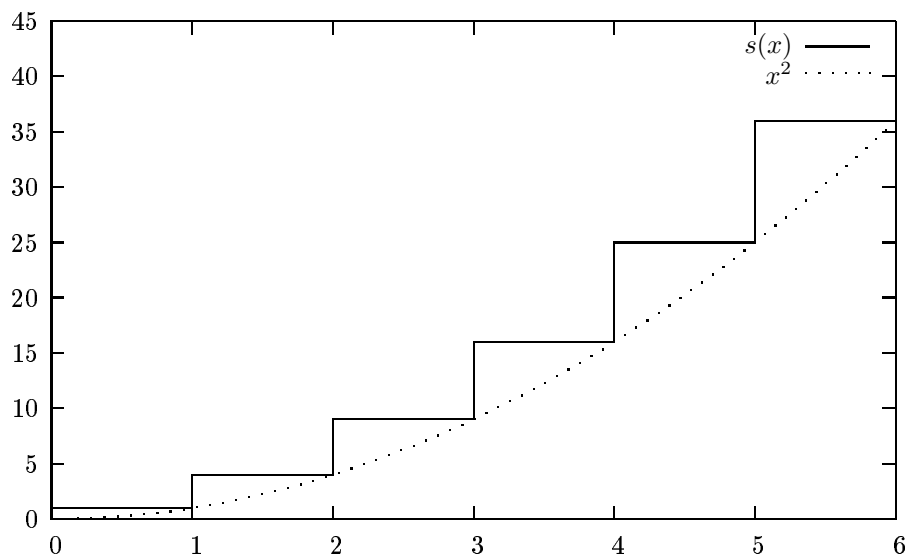
Blatt 10

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

10. Januar 2005

1 Aufgabe - H1

1.1 a)



Allgemein erwarte ich, dass das Integral den Wert

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$$

erlangt (Schulwissen).

1.2 b)

Jetzt gehts los:

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) a_{k+1}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{b-a}{n}(k+1) - \left(a + \frac{b-a}{n}k \right) \right) \left(a + \frac{b-a}{n}(k+1) \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n} \right) \left(a + \frac{b-a}{n}(k+1) \right)^2 \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + \frac{b-a}{n}k \right)^2 \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a^2 + 2a \frac{b-a}{n}k + \frac{(b-a)^2}{n^2}k^2 \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^n a^2 + \sum_{k=1}^n 2a \frac{b-a}{n}k + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^2}{n^2}k^2 \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(a^2 \sum_{k=1}^n 1 + 2a \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(a^2 n + 2a \frac{b-a}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(a^2 n + a(b-a)(n-1) + (b-a)^2 \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n} \right) \\ &= (b-a) \left(a^2 + a(b-a) \left(1 - \frac{1}{n} \right) + (b-a)^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \right) \end{aligned}$$

mehr mühe mit dem Vereinfachen mach ich mir jetzt nicht...

1.3 c)

Und dessen Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_n I_n &= \lim_n (b-a) \left(a^2 + a(b-a) \left(1 - \frac{1}{n} \right) + (b-a)^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \right) \\ &= (b-a) \left(a^2 + a(b-a) + (b-a)^2 \frac{1}{3} \right) \\ &= (b-a) \left(ab + (b-a)^2 \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} (b-a)^3 + (b-a)ab \\ &= \frac{1}{3} (b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3) + ab^2 - a^2b \\ &= \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \end{aligned}$$

2 Aufgabe H2

Da f eine Regelfunktion ist, muss es laut def. eine Funktionenfolge f_n geben, die gleichmäßig gegen f konvergieren. Wähle nun ein Folge f_n so, das zusätzlich noch $\forall n : \forall x \in [a, b] : f_n(x) \geq \delta$ gilt. Eine solche Folge muss es geben, da ich mich auch von oben der Funktion f annähern kann. Die Folge $\frac{1}{f_n}$ ist dann ebenfalls beschränkt, da $\frac{1}{f_n} \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow \left\| \frac{1}{f} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\delta}$ für alle x gilt. Ihr Grenzwert ist $\lim_n \frac{1}{f_n} = \frac{1}{\lim_n f_n} = \frac{1}{f}$. Ich habe somit $\frac{1}{f}$ als Grenzwert einer beschränkten Funktionenfolge angegeben. Somit ist $\frac{1}{f}$ eine Regelfunktion.