Übungsaufgaben Analysis I
Blatt 11

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

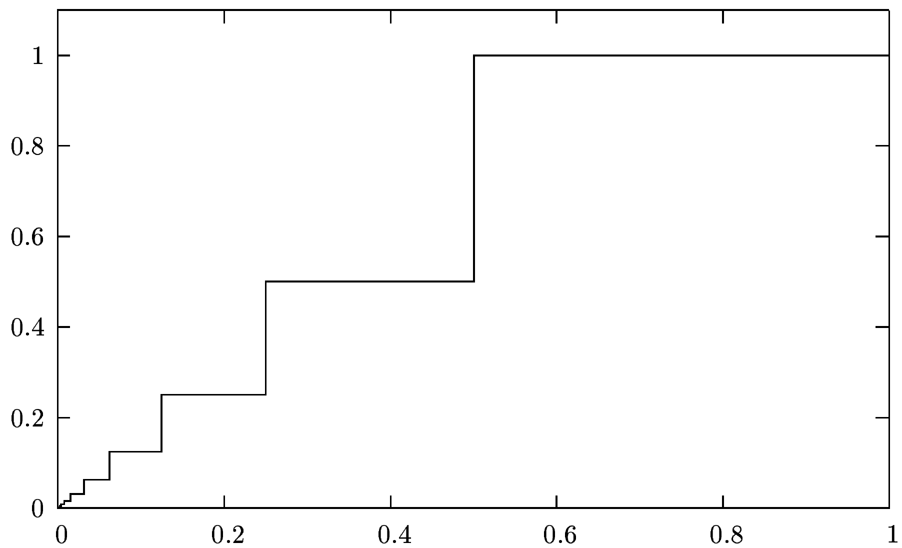
20. Januar 2005

1 Regelfunktionen I

Zur verdeutlichung der Funktion hier einmal die ersten Werte.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{für } \frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^n} & \text{für } \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Und so sieht das Ganze aus (abgesehen davon, das man die vertikalen Striche eigentlich nicht zeichnet, aber soweit kenn ich Gnuplot noch nicht...):



Dies ist eine Regelfunktion, da z.B. eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{für } \frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^n} & \text{für } \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat als Grenzwert $f(x)$.

Dies ist nun zum Integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)\frac{1}{2^k} \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left(2^{-k} - 2^{-k-1}\right) 2^{-k} \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}2^{-k} - \sum_{k=0}^{n} 2^{-k-1}2^{-k}\right) \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-2k} - \sum_{k=0}^{n} 2^{-2k-1}\right) \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-2k} - \sum_{k=0}^{n} 2^{-2k-1}\right) \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{4}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

2 Funktionen mit Integral Null

2.1 a)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen f gleichmäßig konvergierende Folge von Stufenfunktionen. Als Zerlegung wähle $a_k = -a + k\frac{a}{n}$ als Zerlegung des Intervalls $[-a, a]$ mit $2n$ Stützstellen. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \lim_n \sum_{k=1}^{2n} (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{a}{n}\right) f(a_k) \\ &= \lim_n \frac{a}{n} \sum_{k=1}^{2n} f(a_k)\end{aligned}$$

Beobachtung:

$$\begin{aligned}a_k &= -a_{2n-k} \\ -a + k\frac{a}{n} &= -\left(-a + (2n-k)\frac{a}{n}\right) \\ -a + k\frac{a}{n} &= a - (2n-k)\frac{a}{n} \\ &= a - 2n\frac{a}{n} + k\frac{a}{n} \\ &= -a + k\frac{a}{n}\end{aligned}$$

Hiermit lässt sich die Summe Zerlegen:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \lim_n \frac{a}{n} \sum_{k=1}^{2n} f(a_k) \\ &= \lim_n \frac{a}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} f(a_k) + \sum_{k=n+1}^{2n} f(a_k)\right) \\ &= \lim_n \frac{a}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} f(a_k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_{n+k}) + f(a_{2n})\right)\end{aligned}$$

In den Ersten beiden Summationen finden sich immer zwei Paare, die Dank der Regel $f(a_k) = -f(a_{2n-k})$ gegenseitig aufheben, so dass nur noch der letzte Term übrig bleibt.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \lim_n \frac{a}{n} f(a_{2n}) \\ &= 0\end{aligned}$$

2.2 b)

Gegenbeispiel, mit $f(x) = x$ und $a = -1$, $b = 1$ (wie in Aufgabenteil a)):

$$\int_{-1}^{1} x = 0$$

Aber $f(x) \neq 0$ für fast alle $x \in [-1, 1]$ (bis auf endlich viele, genau eine, Ausnahmen).

2.3 c)

Ja! Untervektorraumkriterien nachrechnen! Für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: (mit Hilfe der linearität des Integrals)

$$\int_a^b (\lambda v(x) + \mu w(x))\, dx = \lambda \underbrace{\int_a^b v(x)\, dx}_{=0} + \mu \underbrace{\int_a^b w(x)\, dx}_{=0} = 0$$

Das heißt $\lambda v(x) + \mu w(x) \in V$.

Dies hätte man auch anders erklären können. Es ist unstrittig, das $\int_a^b dx$ eine lineare Abbildung ist. Das in der Aufgabe definierte V ist genau der Kern dieser Abbildung, und da der Kern einer linearen Abbildung ein Vektorraum ist, wars das auch schon.