Übungsaufgaben Analysis I
Blatt 2

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H1

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ bedeutet, dass f injektiv ist. Für $A, B \subseteq X$ und f injektiv folgt:

$$\begin{array}{cl} & A \neq B \\ \underset{O.b.d.A.}{\Rightarrow} & \exists a \in A : x \notin B \\ \Rightarrow & f(a) \in \mathcal{P}(f)(A) \wedge f(a) \notin \mathcal{P}(f)(B) \\ \Rightarrow & \mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B) \end{array}$$

Dies (erste und letzte Zeile zusammen) bedeutet, dass auch $\mathcal{P}(f)(A)$ injektiv ist, wenn f injektiv ist.

Das $f(x) \notin \mathcal{P}(f)(B)$ ist lässt sich wie folgt zeigen:

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{P}(f)(B) & = & \{f(b) \,|\, b \in B\} \\ & & \forall b \in B : a \neq b \\ & \underset{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} & \forall b \in B : f(a) \neq f(b) \\ & \Rightarrow & f(a) \notin \mathcal{P}(f)(B) \end{array}$$

2 Aufgabe - H2

Die Gleichheit von zwei Mengen lässt sich am besten wie folgt zeigen: $Y \subseteq Z \wedge Z \subseteq Y \Rightarrow Y = Z$. Vorweg gilt: $\forall a : a \in X \vee a \notin X$ dieses oder ist sogar ein exklusives Oder. Nun lässen sich Fallunterscheidungen machen:

- Zeige: $Y \subseteq Z$:
  - $\forall a \in Y, a \in X : a \in (X \cap Y) \Rightarrow a \in (X \cap Z) \Rightarrow a \in Z$
  - $\forall a \in Y, a \notin X : a \in (X \cup Y) \Rightarrow a \in (X \cup Z) \Rightarrow a \in Z$
  - $\Rightarrow (a \in Y \Rightarrow a \in Z) \Rightarrow Y \subseteq Z$
- Zeige: $Z \subseteq Y$:
  - $\forall a \in Z, a \in X : a \in (X \cap Z) \Rightarrow a \in (X \cap Y) \Rightarrow a \in Y$
  - $\forall a \in Z, a \notin X : a \in (X \cup Z) \Rightarrow a \in (X \cup Y) \Rightarrow a \in Y$
  - $\Rightarrow (a \in Z \Rightarrow a \in Y) \Rightarrow Z \subseteq Y$
- $Y \subseteq Z \wedge Z \subseteq Y \Rightarrow Z = Y$