Übungsaufgaben Analysis I
Blatt 3

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H1

1.1 (a)

Diese kann man zum Beweis auf die de Morgan'schen Regeln für Boolsche Ausdrücke zurückführen, die man mit Hilfe von Wertetabellen beweisen könnte. Dann lasst uns anfangen:

$$
\begin{aligned}
& (A \cup B)^c \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | x \in (A \cup B)^c\} \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | \neg x \in (A \cup B)\} \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | \neg (x \in A \vee x \in B)\} \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | \neg x \in A \wedge \neg x \in B\} \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | x \in A^c \wedge x \in B^c\} \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | x \in (A^c \cap B^c)\} \\
\Leftrightarrow\ & A^c \cap B^c
\end{aligned}
$$

bzw.:

$$
\begin{aligned}
& (A \cap B)^c \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | x \in (A \cap B)^c\} \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | \neg x \in (A \cap B)\} \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | \neg (x \in A \wedge x \in B)\} \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | \neg x \in A \vee \neg x \in B\} \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | x \in A^c \vee x \in B^c\} \\
\Leftrightarrow\ & \{x \in M | x \in (A^c \cup B^c)\} \\
\Leftrightarrow\ & A^c \cup B^c
\end{aligned}
$$

1.2 (b)

Auch hier am besten mit den Elementen argumentieren:

$$
\begin{aligned}
& (A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset \\
\Rightarrow\ & \{(a,b)\,|a \in A \wedge b \in B\} \cap \{(a,b)\,|a \in B \wedge b \in A\} = \emptyset \\
\Rightarrow\ & \{(a,b)\,|a \in A \wedge a \in B \wedge b \in B \wedge b \in A\} = \emptyset \\
\Rightarrow\ & \{(a,b)\,|a \in (A \cap B) \wedge b \in (A \cap B)\} = \emptyset \\
\Rightarrow\ & A \cap B = \emptyset
\end{aligned}
$$

2 Aufgabe - H2

Vorweg möche ich die definition für $m|n$ etwas umformulieren:

$$m|n \Leftrightarrow m\text{teilt}n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = km$$

2.1 (a)

Hier muss gezeigt werden, dass $m|n$ eine patielle Ordnungsrelation ist, wass gilt wenn es folgende Eigenschaften erfüllt:

- reflexivität

$$m|m \Leftrightarrow m = 1 * m$$

- antisymmetrie

$$
\begin{aligned}
& m|n \wedge n|m \\
\Rightarrow\ & \exists k \in \mathbb{N} : n = km \wedge \exists h \in \mathbb{N} : m = hn \\
\Rightarrow\ & \exists k, h \in \mathbb{N} : n = khn \\
\Rightarrow\ & k = h = 1 \\
\Rightarrow\ & m = n
\end{aligned}
$$

- transitivität

$$
\begin{aligned}
& a|b \wedge b|c \\
\Rightarrow\ & \exists k \in \mathbb{N} : b = ka \wedge \exists h \in \mathbb{N} : c = hb \\
\Rightarrow\ & \exists h, k \in \mathbb{N} : c = hka \\
\Rightarrow\ & \exists l \in \mathbb{N} : c = la \\
\Rightarrow\ & a|c
\end{aligned}
$$

q.e.d.

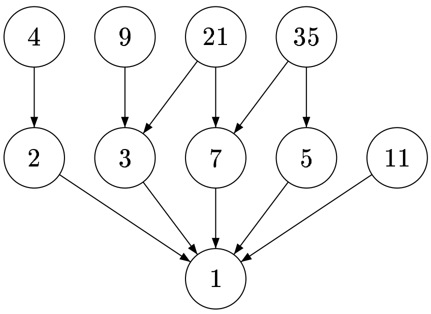
2.2 (b)

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 21, 35\}$$

Dies sind alle die Elemente, die sich nur durch sich selbst teilen lassen (wenn die 1 nicht enthalten wäre, wäre dies die Teilmenge der Primzahlen):

$$A_{max} = \{1\}$$

2.3 (c)



Dieses Diagramm zeigt in Pfeilrichtung immer an, welche Zahl von welcher geteilt wird. Dabei ist 1 wie unter (b) schon gesehen das maximum, in der nächsten Reihe kommen dann die Primzahlen, und darüber daraus zusammengesetzte Zahlen.

2.4 (d)

Imfolgenden wieder spreche ich ein wenig (der ohnehinn wiedersprüchlichen) Definition. Ich gehe einfach davon aus, das wenn es ein Maximum gibt, dies auch das Supremum seien muss.

Das Supremum ist hier die 1, da dies im allgemeinen die Einzige Natürliche Zahl ist, die alle anderen Natürlichen Zahlen ganzzahlig Teilt. Einen solchen Graphen könnte man zwar beispielhaft skizzieren, aber im allgemeinen hat er folgende gestalt:

- Die 1 ist ganz unten und bildet das Supremum
- In der Nächsten ebene kommen alle Primzahlen, die in A enthalten sind. In der ab hier zählend n-ten Reihe folgend nun alle Produckte aus n (nicht zwangsläufig verschiedenen) Primzahlen.