Übungsaufgaben Analysis I
Blatt 4

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H1

Beweis mit vollständiger Induktion: $A(n) \equiv \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
Aussage gitl für $A(1)$:

$$1^2 = 1 = \frac{1}{6}(1+1)(2*1+1)$$

Es gitl: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\begin{aligned}
A(n) \equiv \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
\text{Ind Annahme} &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right) \\
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \equiv A(n+1)
\end{aligned}$$

geschafft....

2 Aufgabe - H2

Auch hier wieder mit Induktion. Es soll gelten:

- $p, q \in \mathbb{K}$
- $n \in \mathbb{N}$
- $q^0 := 1$
- $q^{(n+1)} := q^n * q$

- $p, q \geq 0$
- $p < q$ Wenn dies anders wäre, wäre die Implikation trivial, da man aus falschen sachen alles folgern kann.
- $0 < q$ Folgt aus den beiden Punkten darüber.

Lasst uns beginnen:

Die Aussgage $A(n) \equiv p < q \Rightarrow p^n < q^n$.

Induktionsanfang: $A(1)$:

$$\begin{aligned} p < q &\Rightarrow 1 * p < 1 * q \\ &\Rightarrow p^0 * p < q^0 * q \\ &\Rightarrow p^1 < q^1 \end{aligned}$$

das war leicht... Nun was schwereres..

Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Definiere vorweg k und zeige, das $k > 0$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} k & = & q - p \\ & \Rightarrow & \\ q & = & k + p \\ p & < & q \\ q & < & k + p \\ & \Rightarrow & \\ 0 & < & k \end{array}$$

Nun das Eigentliche:

$$\begin{aligned} A(n) &\equiv p^n < q^n \\ &\Rightarrow p^n p < q^n p \\ &\Rightarrow p^n p < q^n p + q^n k \\ &\Rightarrow p^n p < q^n (p + k) \\ &\Rightarrow p^n p < q^n q \Rightarrow \\ A(n+1) &\equiv p^{n+1} < q^{n+1} \end{aligned}$$

Hierbei habe ich verwendet, dass $0 < q \Rightarrow 0 < q^n$ was aber genau der zu zeigenden Formel mit $p = 0 = p^n$ entspricht. Diese darf ich zu diesem Zeitpunkt auch verwenden, da ich mit der Induktion ja davon ausgehe das sie für n schon gilt.