

Übungsaufgaben Analysis I

Blatt 5

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H1

1.1 a)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge $\Leftrightarrow \forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \forall l, m \geq n : |a_l - a_m| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} \forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \forall l, m \geq n : & \left| \frac{(-1)^l}{l+1} - \frac{(-1)^m}{m+1} \right| \leq \varepsilon \\ & \left| \frac{(-1)^l}{l+1} - \frac{(-1)^m}{m+1} \right| \\ \leq & \left| \frac{1}{l+1} \right| + \left| \frac{1}{m+1} \right| \\ \leq & \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \\ = & \frac{2}{n+1} \\ \Rightarrow & \frac{2}{n+1} \leq \varepsilon \\ \Rightarrow & \frac{2}{\varepsilon} \leq n+1 \\ \Rightarrow & \frac{2}{\varepsilon} - 1 \leq n \end{aligned}$$

Bei gegebenen ε ist n also so zu wählen, dass $\frac{2}{\varepsilon} - 1 \leq n$ gilt. Hiermit ist gezeigt, dass dies eine Cauchyfolge ist.

1.2 b)

Diese Folge ist durch $0 \leq b_n \leq 2$ beschränkt. Beweis

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= 1 \\ b_2 &= 2 \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $0 \leq b_n \leq 2 \Rightarrow 0 \leq b_{n+1} \leq 2$ für $n > 2$

$$\begin{aligned} & 0 \leq b_n \leq 2 \\ \Rightarrow & 0 \leq b_n \leq 2 \\ \Rightarrow & 0 \leq b_n * 2 \leq 2 * 2 \\ \Rightarrow & 0 \leq \frac{b_n * 2}{n+1} \leq \frac{2 * 2}{n+1} \\ \Rightarrow & 0 \leq b_{n+1} \leq 2 \end{aligned}$$

Diese Folge ist monoton fallend für $n > 1$, d.h. $b_n \geq b_{n+1}$ für $n > 1$ Beweis:

Induktionsanfang für $n = 2$:

$$\begin{aligned} b_2 &\geq b_3 \\ 2 &\geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Induktionsschritt $b_n \geq b_{n+1} \Rightarrow b_{n+1} \geq b_{n+2}$:

$$\begin{aligned} &b_n \geq b_{n+1} \\ \Rightarrow &\frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \\ \Rightarrow &\frac{2^n * 2}{n! * (n+2)} \geq \frac{2^{n+1} * 2}{(n+1)! * (n+2)} \\ \Rightarrow &b_{n+1} \geq \frac{2^n * 2}{n! * (n+2)} \geq b_{n+2} \end{aligned}$$

Da diese Folge monoton und beschränkt ist, ist sie Konvergent (gegen 0 - ohne Beweis). Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, also auch diese.

1.3 c)

1.3.1 (a_n)

$$\begin{aligned} \lim_{n \in I} a_n &= \lim_{n \in I} \frac{1}{n^2} \\ &= \lim_{n \in I} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \in I} \frac{1}{n} * \lim_{n \in I} \frac{1}{n} \\ &= 0 * 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Diese Folge ist Konvergent mit dem Grenzwert 0. Da jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, gilt das auch für diese.

1.3.2 $(b_n)_{n \in I}$

Diese Folge ist nicht beschränkt. Kann also auch keine Cauchy Folge sein.

Aussage $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in I : b_k > n$.

Für $n < 5$

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \geq 0 \\ b_4 &= \frac{3}{2} \geq 1 \\ b_4 &= \frac{24}{5} \geq 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Für $n \geq 5$ ($\Rightarrow k > 5$)

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{k!}{k^2} \\ &= \frac{(k-1)!k}{k^2} \\ &= \frac{(k-1)!}{k} \\ &= (k-2)! \frac{(k-1)}{k} \\ &= (k-2)! \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ \Rightarrow b_k &> (k-3)! > k-3 \\ \Rightarrow k-3 &> n \\ \Rightarrow \forall k > n+3 : b_k &> n \end{aligned}$$

Ich kann also für jede Natürliche Zahl ein b_k angeben, das größer ist. Folglich ist b_k nicht beschränkt und auch keine Cauchyfolge.

1.4 d)

Da $(b_n)_{n \in I}$ eine Nullfolge ist, gibt es ein n , so dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$|b_n| < \varepsilon$$

Die Folge $(a_n)_{n \in I}$ ist beschränkt, das heist es gibt ein k so dass

$$\forall n : |a_n| \leq k$$

Die Produktfolge hat nun die gestalt:

$$c_n = a_n b_n$$

Ich behaupte nun, das dies ebenfalls eine Nullfolge ist. Das heißt, bei dem n von oben gilt:

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq l\varepsilon$$

Dies ist allerdings nur eine Umformulierung der Definition von Konvergenz. Das heist das (c_n) ebenfalls eine Nullfolge ist.

2 Aufgabe - H2

2.1 a)

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= \frac{7}{4} = 1,75 \\ x_3 &= \frac{97}{56} \approx 1,73214 \\ x_4 &= \frac{18817}{10864} \approx 1,73205 \end{aligned}$$

Der Wert für $\sqrt{3}$ liegt ca. bei 1,73205, und damit sehr nahe an x_4 .

2.2 b)

2.2.1 beschränktheit

Zeige das für alle $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1}^2 \geq a$ gilt:

$$\begin{aligned}x_{n+1}^2 &= \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)^2 \geq a \\x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2} &\geq 4a \\x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} &\geq 2a \\x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} &\geq 0 \\ \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Ein Quadrat ist immer größer gleich 0, q.e.d.

2.2.2 Monotonie

Zeige das $x_{n+1} \leq x_n$ gilt:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &\leq x_n \\ \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) &\leq x_n \\ x_n + \frac{a}{x_n} &\leq 2x_n \\ \frac{a}{x_n} &\leq x_n \\ a &\leq x_n^2\end{aligned}$$

Die letzte Zeile hatte ich bereits eben gezeigt. D.h. auch diese gilt!

2.2.3 Cauchy

Diese Folge ist Monoton fallend, und nach unten hin beschränkt durch \sqrt{a} (Nach oben ist sie durch x_0 beschränkt). D.h. sie konvergiert. Da aber jede konvergente Folge eine Cauchy Folge ist, ist auch dieses eine.

2.3 c)

Wenn (x_n) gegen x konvergiert, muss dieser Grenzwert folgende Bedingung erfüllen (eigentlich unter c schon gezeigt) :

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \\2x &= x + \frac{a}{x} \\x &= \frac{a}{x} \\x^2 &= a\end{aligned}$$

Da sich aber jedes beliebige a in die Folge einsetzen lässt, und sich nicht alle $a \in \mathbb{Q}$ als das Quadrat einer Rationalen x Zahl schreiben lassen, kann es sein, dass die Folge nicht konvergiert. Genau aus diesem Grund ist \mathbb{Q} auch *nicht* (Folgen) Vollständig.