Übungsaufgaben Analysis I
Blatt 6

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H1

Dies werde ich mit Hilfe des Cauchy-Konvergenzkriteriums für Reihen zeigen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ist konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall n \leq l \leq m : \left| \sum_{k=l}^{m} a_k \right| \leq \varepsilon$$

Einsetzen von $a_k = f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ist konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall n \leq l \leq m : \left| \sum_{k=l}^{m} \left(f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) \right| \leq \varepsilon$$

Ab jetzt betrachte ich nur noch den Therm hinter den Quantoren:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=l}^{m} \left(f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) \right| &\leq \left| \sum_{k=l}^{m} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right| \\
&= \sum_{k=l}^{m} \left(\frac{k+1-k}{k\,(k+1)} \right) \\
&= \sum_{k=l}^{m} \frac{1}{k\,(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k\,(k+1)} - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k\,(k+1)} \\
&= 1 - \frac{1}{m+1} - \left(1 - \frac{1}{l}\right) \\
&= \frac{1}{l} - \frac{1}{m+1} \\
&\leq \frac{1}{l} \quad \text{da } l \leq m \\
&\leq \frac{1}{n} \quad \text{da } n \leq l \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt, dass bei jedem ε das n mit $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ gewählt werden kann, so das die obrige Ungleichung / Definition erfüllt ist. D.h. die Reihe ist konvergent.

2 Aufgabe - H2

klasse, konstruktion schon rekrusiv gegeben, prima für Induktion!

2.1 Umfang

$U_0 = 3$ (Gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 1 $\rightarrow$klar) und $U_{n+1} = U_n\frac{4}{3}$. Die rekrusive Formel ist damit zu rechtfertigen, das beim Schritt von $S_n \rightarrow S_{n+1}$ aus jeder Seitenfläche ein Drittel entnommen wird, aber gleich wieder doppelt hinzugefügt. Der Umfang wächst also bei jedem schritt effektiv um $\frac{1}{4}$. Aufgelöst ergibt die $U_n = 3 * \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Diese Folge divergiert leider, da q^n mit $q \geq 1$ nicht konvergiert. D.h. der Umfang unserer Schneeflocke wächst über alle Grenzen hinaus an.

2.2 Flächeninhalt

Ein Gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge a hat den Flächeninhalt $A = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Das heißt $F_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Vorweg überlegen wir uns wieviele Seitenkanten K das Dreieck S_n besitzt. $K_0 = 3$. Jede Seitenkante wird pro Schritt in 4 neue zerlegt. Also $K_{n+1} = 4K_n$. Daraus ergibt sich $K_n = 3 * 4^n$. Desweiteren wäre auch die Länge einer solchen kante interessant, nennen wir sie L_n. Diese Länge biginnt mit $L_0 = 1$ und wir in jedem Schritt $L_{n+1} = L_n\frac{1}{3}$ gedrittelt. Daraus ergibt sich $L_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Nun kann man mit der Flächenüberlegung beginnen. Auf jeden Fall bleibt erseinmal die alte Fläche bestehen, und es kommt nur neue hinzu $F_{n+1} = F_n + \ldots$. Diese haben entstehen an K_n Kanten, und haben eine Seitenlänge von L_{n+1}. Dies in die Flächenformel für das gleichseite Dreieck. $F_{n+1} = F_n + K_n\left(L_{n+1}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} = F_n + 3 * 4^n * \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} = F_n + \frac{\sqrt{3}}{4*3}\left(\frac{4}{9}\right)^n$. Nun können wir versuchen einen geschlossenen Ausdruck für n zu finden. Hier hilft uns die geometrische Reihe:

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{4*3}\left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{4}{9}\right)}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{3\frac{5}{9}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{3\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)}{5}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{10 + 9\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)}{15}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{19 - 9\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{15}\right)
\end{aligned}
$$

Der Flächeninhalt unserer Schneeflocke besitzt damit einen Grenzwert von $\lim_n F = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{19-9\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{15}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} * \frac{19}{15}$.