

Übungsaufgaben Analysis I

Blatt 6

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H1

Dies werde ich mit Hilfe des Cauchy-Konvergenzkriteriums für Reihen zeigen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall n \leq l \leq m : \left| \sum_{k=l}^m a_k \right| \leq \varepsilon$$

Einsetzen von $a_k = f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall n \leq l \leq m : \left| \sum_{k=l}^m \left(f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right) \right) \right| \leq \varepsilon$$

Ab jetzt betrachte ich nur noch den Term hinter den Quantoren:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=l}^m \left(f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right) \right) \right| &\leq \left| \sum_{k=l}^m \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right| \\ &= \sum_{k=l}^m \left(\frac{k+1-k}{k(k+1)} \right) \\ &= \sum_{k=l}^m \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{m+1} - \left(1 - \frac{1}{l} \right) \\ &= \frac{1}{l} - \frac{1}{m+1} \\ &\leq \frac{1}{l} \quad \text{da } l \leq m \\ &\leq \frac{1}{n} \quad \text{da } n \leq l \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt, dass bei jedem ε das n mit $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ gewählt werden kann, so dass die obige Ungleichung / Definition erfüllt ist. D.h. die Reihe ist konvergent.

2 Aufgabe - H2

klasse, konstruktion schon rekursiv gegeben, prima für Induktion!

2.1 Umfang

$U_0 = 3$ (Gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 1 → klar) und $U_{n+1} = U_n \frac{4}{3}$. Die rekursive Formel ist damit zu rechtfertigen, das beim Schritt von $S_n \rightarrow S_{n+1}$ aus jeder Seitenfläche ein Drittel entnommen wird, aber gleich wieder doppelt hinzugefügt. Der Umfang wächst also bei jedem schritt effektiv um $\frac{1}{4}$. Aufgelöst ergibt die $U_n = 3 * \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Diese Folge divergiert leider, da q^n mit $q \geq 1$ nicht konvergiert. D.h. der Umfang unserer Schneeflocke wächst über alle Grenzen hinaus an.

2.2 Flächeninhalt

Ein Gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge a hat den Flächeninhalt $A = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Das heißt $F_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Vorweg überlegen wir uns wieviele Seitenkanten K das Dreieck S_n besitzt. $K_0 = 3$. Jede Seitenkante wird pro Schritt in 4 neue zerlegt. Also $K_{n+1} = 4K_n$. Daraus ergibt sich $K_n = 3 * 4^n$. Desweiteren wäre auch die Länge einer solchen kante interessant, nennen wir sie L_n . Diese Länge biginnt mit $L_0 = 1$ und wir in jedem Schritt $L_{n+1} = L_n \frac{1}{3}$ gedrittelt. Daraus ergibt sich $L_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Nun kann man mit der Flächenüberlegung beginnen. Auf jeden Fall bleibt erseinmal die alte Fläche bestehen, und es kommt nur neue hinzu $F_{n+1} = F_n + \dots$ Diese haben entstehen an K_n Kanten, und haben eine Seitenlänge von L_{n+1} . Dies in die Flächenformel für das gleichseite Dreieck. $F_{n+1} = F_n + K_n (L_{n+1})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = F_n + 3 * 4^n * \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = F_n + \frac{\sqrt{3}}{4 * 3} \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Nun können wir versuchen einen geschlossenen Ausdruck für n zu finden. Hier hilft uns die geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{3}}{4 * 3} \left(\frac{4}{9}\right)^k \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k - 1\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{4}{9}\right)}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3} + \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{3 \frac{5}{9}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3} + \frac{3 \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)}{5}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{10 + 9 \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)}{15}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{19 - 9 \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{15}\right) \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt unserer Schneeflocke besitzt damit einen Grenzwert von $\lim_n F = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{19-9(\frac{4}{9})^{n+1}}{15} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} * \frac{19}{15}$.