Übungsaufgaben Analysis I
Blatt 7

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H1

1.1 a)

Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

mit $|q| < 1$ ist bekannt. Bilde das Cauchy-Produkt der geom. Reihe mit sich selbst.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} q^l q^{k-l} &= \frac{1}{(1-q)^2} \\
\sum_{k=0}^{l} \sum_{l=0}^{k} q^k &= \frac{1}{(1-q)^2} \\
\sum_{k=0}^{l} (k+1)\, q^k &= \frac{1}{(1-q)^2}
\end{aligned}$$

Fertig!

1.2 b)

Bevor ich dieses Cauchy Produkt untersuchen kann, muss ich dafür sorgen, dass die summe bei 1 beginnt, damit die Definition des Produkts anwenden kann.

$$\begin{aligned}
a_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

Das Produkt hat nun folgende Gestalt:

$$
\begin{aligned}
b &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}}\frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n
\end{aligned}
$$

Diese c_n Folge werde ich nun Weiter untersuchen. Meine vermutung ist, das das Produkt divergiert. Dies habe ich vor zu zeigen, indem ich eine Minorante angebe, die ebenfalls divergiert. Bedingung für die Konvergenz einer Reihe war, das die Folge über die Summiert wird eine Nullfolge ist, was dann auch folglich für deren Beträge gelten muss.

$$
\begin{aligned}
c_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}}\frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \\
&= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \\
|c_n| &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \\
&\geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

geschafft! Also divergiert das Cauchy-Produkt.

2 Aufgabe - H2

2.1 a)

Soweit ich weiss, lassen sich alle stetigen Funktionen als Grenzwert von Potenzreihen mit Hilfe der Taylorentwicklung schreiben. Dies nutze ich aus, und betrachte die Menge der konvergenten Potenzreihen stellvertretend für die Menge aller stetigen Funktionen.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Es soll gelten:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Also ensetzen der Potenzreihe:

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+y)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= a_0 + a_1 (x+y) + a_2 \left(x^2 + 2xy + y^2\right) + a_3 \left(x^3 + 3x^2y + 3xy^3 + y^3\right) + \ldots
\end{aligned}
$$

Dies muss aber identisch sein, mit:

$$
\begin{aligned}
f(x) + f(y) &= \sum_{n=0}^{k} a_n x^n + \sum_{n=0}^{k} a_n y^n \\
&= \sum_{n=0}^{k} a_n (x^n + y^n) \\
&= 2a_0 + a_1 (x+y) + a_2 \left(x^2 + y^2\right) + a_3 \left(x^3 + y^3\right) \ldots
\end{aligned}
$$

Diese beiden Summen sind aber nur für $a_n = 0$ für alle $n \neq 1$ identisch. D.h. das die gesuchten Funktionen die Form

$$f(x) = ax$$

haben, wobei a beliebig ist.

2.2 b)

Die Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ lässt sich als Grenzwert einer Potenzreihe mit den koeffizienten $a_k = \frac{1}{k!}$ auffassen. Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius stetig sind, wäre zu erwarten das $R = \infty$ ist. Und es ist so!

$$
\begin{aligned}
L &= \limsup_{k} \frac{1}{\sqrt[k]{|k!|}} \\
&= \lim_{k} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}
\end{aligned}
$$

Für die Fakultät gilt die Stirlingsche Näherungsformel $k! \approx \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \left(1 + \frac{1}{12k}\right)$ für $k \geq 18$ mit einem Fehler $\leq 0,001\%$

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{k} \frac{1}{\sqrt[k]{\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \left(1 + \frac{1}{12k}\right)}} \\
&\geq \lim_{k} \frac{1}{\sqrt[k]{\left(\frac{k}{e}\right)^k}} \\
&\geq \lim_{k} \frac{e}{k} \\
&= 0 \\
R &= \infty
\end{aligned}
$$

Sieheda, $\exp(x)$ ist auf gesamt $\mathbb{R}$ konvergent.

2.3 c)

Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes endliches Intervall. Nach dem Zwischenwertsatz gilt

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \, \exists y \in I : f(x) = y$$

Angenommen $f(a) \neq f(b)$. Dann lässt sich ein $y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ finden. Es müsste also folglich ein x mit $f(x) = y$ geben, was aber der Definition von f wiederspricht. Also ist $f(a) = f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet das f eine konstante Funktion ist.