# Übungsaufgaben Analysis I
# Blatt 9

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

17. Januar 2005

## 1 Aufgabe - H1

### 1.1 a)

Um zu zeigen, das durch die Addition und die definierte Skalarmultiplikaion ein (unendlich dimensionaler - ohne Beweis) Vektorraum über den Folgen ist, müsste man zeigen, dass:

1. $(\mathcal{F}, +)$ eine kommutative Gruppe ist
2. für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, v, w \in \mathcal{F}$ gilt:
   (a) $(\lambda + \mu) + v = (\lambda + v) + (\mu * v)$
   (b) $\lambda * (v + w) = \lambda * v + \lambda * w$
   (c) $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v$
   (d) $1 * v = v$

Dies kann man aber auch einfacher haben, indem man das Untervektorraumkriterium anwendet:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} v.w \in \mathcal{F} : \lambda v + \mu w \in \mathcal{F}$$

Dies heist aber nichts anderes, als das die gliedweise Multiplikation einer konvergenten Folge mit einer Reellen Zahl wieder eine konvergente Folge sein muss, und dass die gliedweise Addition zweier konvergenter Folgen wieder eine konvergente Folge ist. Beides haben wir in der Vorlesung gezeigt.

### 1.2 b)

Um zu zeigen dass die Grenzwertbildung $\lim : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist, muss lim folgende Eigenschaft haben. Für alle $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathcal{F}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ muss gelten, dass

$$\lim_n (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_n a_n + \mu \lim_n b_n$$

Auch dieses hatten wir in der Vorlesung bereist gezeigt gehabt. Dies waren die Addition und die Multiplikation von Folgen und deren Auswirkungen. Hier muss man dafür $\lambda, \mu$ als konstante Folgen auffassen.

## 2 Aufgabe - H2

### 2.1 a)

Hierfür brauchen wir als erstes die Exponentialreihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ . Mithilfe von Verkettung und Addition lässt sich dann wie folgt vorgehen:

$$\begin{aligned}
\sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n!} \left(1 - (-1)^n\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}
\end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Genause für den $\cosh(x)$

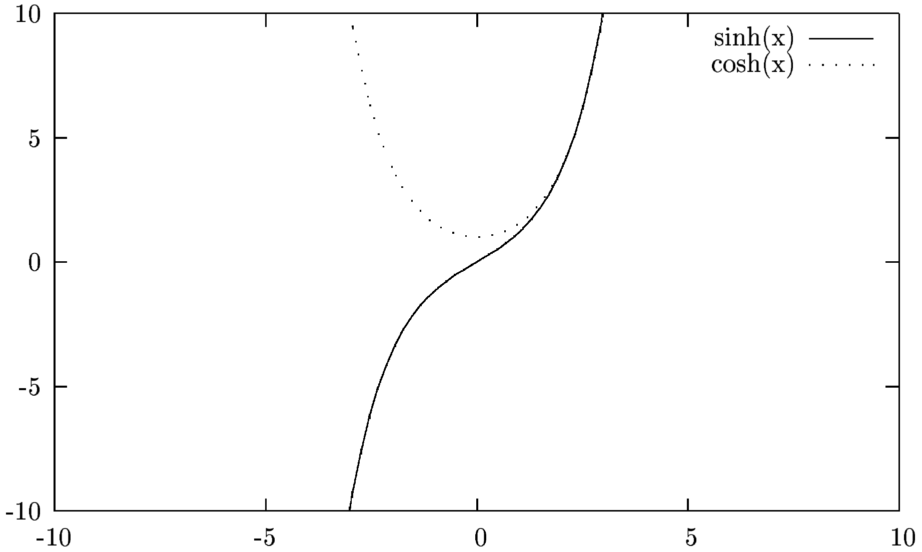
$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n!} \left(1 + (-1)^n\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}
\end{aligned}$$

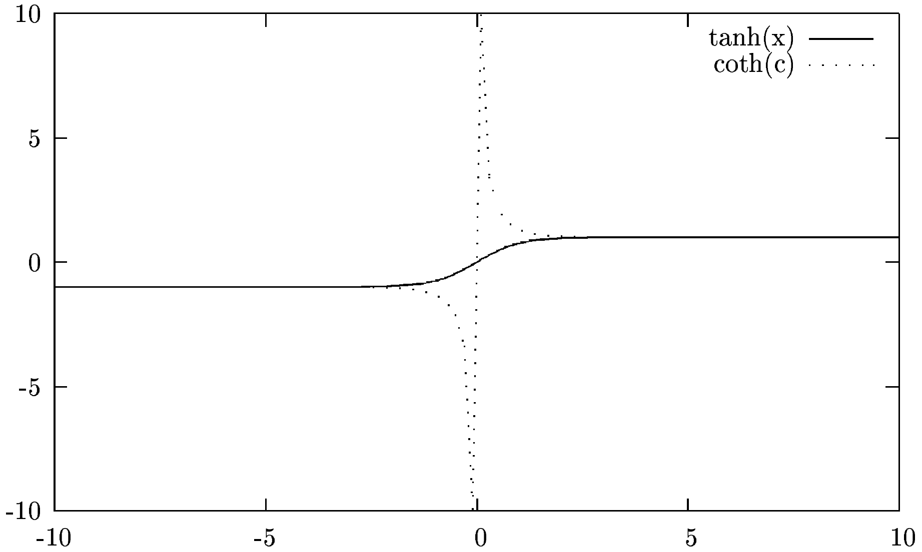
mit

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n!} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

## 2.2 b)

Hier die "Bilder":




Es wäre witzlos gewesen, dies per Hand zu zeichnen, und zu scannen, obwohl mir bewust ist, das das pädagogisch wertvoller gewesen wäre

## 2.3 c)

### 2.3.1 i)

$$
\begin{aligned}
(\sinh(x)+\cosh(x))^n &= \left(\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)+\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}+e^x+e^{-x}\right)\right)^n \\
&= (e^x)^n \\
&= e^{nx} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{nx}+e^{nx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{nx}-e^{-nx}+e^{nx}+e^{-nx}\right) \\
& \quad \frac{1}{2}\left(e^{nx}-e^{-nx}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{nx}+e^{-nx}\right) \\
&= \sinh(nx)+\cosh(nx)
\end{aligned}
$$

### 2.3.2 ii)

$$
\begin{aligned}
\cosh^2(x)-\sinh^2(x) &= \left(\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x}+2e^{x-x}+e^{-2x}-\left(e^{2x}-2e^{x-x}+e^{-2x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

### 2.3.3 iii)

$$
\begin{aligned}
1-\tanh^2(x) &= 1-\frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\
&= \frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cosh^2(x)}
\end{aligned}
$$

### 2.3.4 iv)

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}(x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\
\Leftrightarrow x &= \sinh\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}-e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{x^2+x\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= x\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= x
\end{aligned}$$

### 2.3.5 v)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arctanh}(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
\Leftrightarrow x &= \tanh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) \\
&= \frac{\sinh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)}{\cosh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} - e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} + e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\right)} \\
&= \frac{e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}}}}{e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}}}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}}} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}^2 - 1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}}{\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}^2 + 1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}^2 - 1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}^2 + 1} \\
&= \frac{\frac{1+x}{1-x} - 1}{\frac{1+x}{1-x} + 1} \\
&= \frac{\frac{1+x-(1-x)}{1-x}}{\frac{1+x+1-x}{1-x}} \\
&= \frac{1+x-(1-x)}{1+x+1-x} \\
&= \frac{2x}{2} \\
&= x
\end{aligned}
$$