Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 1

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 G3

1.1 Verknüpfungstafel für $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$*$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

- Plus:$+ : R \to R : \bar{a} + \bar{b} \mapsto \overline{(a+b)\,\%4}$
- Mal:$* : R \to R : \bar{a} * \bar{b} \mapsto \overline{(a*b)\,\%4}$

1.2 Ist $\left(R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}, +, *\right)$ ein Ring?

Hierfür muss geprüft werden ob:

- $(R, +)$ eine kommutative Gruppe bildet. Dies ist der Fall wenn:
  - Die Verknüpfung $*$ assoziativ ist:
  $$a + (b + c) = (a + b) + c$$
    * klar nach Definition
  - Es ein Element $e \in R$ gibt. mit dem für alle $g \in R$ gilt:
  $$e + g = g$$
    * Ja dies ist die 0
  - zu jedem $g \in G$ ein $h \in G$ exestiert, mit
  $$h + g = e$$
    * Ja, denn in jeder Spalte existiert eine 0

- die Verknüpfung +kommutativ ist:

$$a + b = b + a$$

    * Ja, das die Verknüpfungstafel symmetrisch ist

- $(R, *)$ eine Halbgruppe bildet (muss nicht kommutativ sein). Dies ist der Fall wenn:

  - Die Verknüpfung $*$ assoziativ ist:

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

    * Für alle Verknüpfungen die symmetrisch sind gilt dies, da die Verknüpfungstafel ebenfalls symmetrisch ist.
    * Für alle Verknüpfungen die eine 0 enthalten gilt dies, da das ergebniss in jedem Fall zu 0 wird
    * Für alle Verknüpfungen die eine 1 enthalten gilt dies, da dieser Faktor auch weggelassen werden kann
    * Für alle übrigen Verknüpfungen nachprüfen (per Hand) -> erfüllt

- Die Distribuitivgesetze für $+, *$ gelten. Dies sind:

$$\begin{aligned} (a + b) * c &= a * c + b * c \\ a * (b + c) &= a * b + a * c \end{aligned}$$

  Sie sind erfüllt weil:

  - nachrechnen (27 Fälle!!!)

1.3 Ist dies für jedes n ein Ring?

Ganz allgemein kann man diese Überlegungungen auch wie folgt abkürzen. Stellen wir uns die Zahlen. In einer Schreibweise mit der Basis 4 aber ohne die Moduloopertaion vor. Dann würden unsere Überlegungen immer genau die letzte Stelle dieser Zahlen entsprechen, und der Rest der Zahl würde ignoriert werden. Das heißt, da da die Verknüpfungen auf den natürlichen Zahlen alle (bis auf die existenz eines inversen additiven Elements) Vorraussetzungen erfüllen, und die Höherwertigen stellen dieser Zahlen keinen einflüss auf die hier betrachtete Stelle haben, sind auch hier alle Vorraussetzungen erfüllt. Diese Überlegungen würden aber auch für ein anderes n als 4 gelten. Deshalb ist dies für jedes n ein Ring.

2 H1

Leider war in dieser Aufgabe das *nur* etwas mehrdeutig gesetzt, ich interpretiere wie folgt: Z.B. bei einer Gleichung mit Koeffizienten in $\mathbb{N}$ dürfen *alle* Lösungen ausschließlich in $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ liegen.

2.1 Lineares Gleichungssystem

Das allgemeine lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

hat die Lösungen

$$\begin{aligned} x &= \frac{ce - bf}{ae - bd} \\ y &= \frac{af - cd}{ae - bd} \end{aligned}$$

2.1.1 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Dies ist nicht möglich. Da aus $a, b, d, e > 0$ und $x, y < 0$ folgt, dass $c, f < 0$ sei müssten, was allerdings nichtmehr in $\mathbb{N}$ liegt. Es gibt also keine möglichkeit einer Lösung in $\mathbb{Z}$. Allerding sind lösungen in $\mathbb{Q}$ möglich. Z.B.

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned}$$

hat die Lösungen $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{3}{2}$ in $\mathbb{Q}$.

2.1.2 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Mal wieder ein Beispiel (eigentlich das gleiche wie vorhin):

$$\begin{aligned} -x - y &= -2 \\ -2x - 4y &= -7 \end{aligned}$$

hat die Lösungen $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{3}{2}$ in $\mathbb{Q}$.

2.1.3 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Da $\mathbb{Q}$ zusammen mit $+, *$ einen Körper bildet, ist es bezüglich dieser Operationen incl. der Inversenbildung abgeschlossen. Beim lösen linearer Gleichungssysteme kommen allerdings keine anderen Operationen (als $+, -, *, \backslash$) vor, so dass sich dieser Bereich nicht verlassen lässt.

2.1.4 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Siehe Argument aus 2.1.3.

2.2 Quadratische Gleichung

Diese hat hier die Form (auch andere möglich, aber in Aufgabe nicht weiter spezifiziert):

$$ax^2 + bx = c$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} = -\frac{1}{2a} \left(b \pm \sqrt{\underbrace{b^2 + 4ac}_{d}} \right)$

2.2.1 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Damit wirklich *nur* Lösungen aus $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ herauskommen müsste gelten, dass

- unter der Wurzel (d) eine (positive) quadratzahl steht
- $\sqrt{d} < b$ damit ausschließlich negative lösungen herauskommen. Dies ist *nicht möglich*, da mit $a, b, c \in \mathbb{N}$ immer gilt, dass $b < \sqrt{b^2 + 4ac}$ und somit auch mindestens eine positive Lösung vorhanden wäre.
- der Ausdruck müste ganze Zahlen ergeben

2.2.2 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Hier lässt sich wieder ein Beispiel finden:

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

hat die Lösungen $x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$ in $\mathbb{Q}$.

2.2.3 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Hier muss nur dafür gesorgt werden, das die Wurzel irrational wird, z.B. mit $d = 12 = 2^2 * 3$.

$$x^2 + 2x = 2$$

Hat die Lösungen $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{3}$ in $\mathbb{R}$.

2.2.4 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Auch dies ist leicht, hier muss d einfach negativ werden.

$$x^2 + 2x = -3$$

hat die Lösungen $x_{1/2} = -1 \pm i$ in $\mathbb{C}$ mit $i = \sqrt{-1}$.

3 H2

3.1 Eigenschaften von Verknüpfungen

Menge	Verknüpfung	wohldefiniert	assoziativ	kommutativ	ex. neutrales Element	ist Gruppe?	andere Menge für Gruppe?
$\mathbb{Q}$	$a+2b$	ja	nein	nein	0	nein	–
$\mathbb{Q}$	$a+b+ab$	ja	ja	ja	0	ja	
$\mathbb{Z}$	$\frac{a+b}{2}$	ja	nein	ja	0	nein	–
$A \subset \mathbb{R}$	$\min\{a,b\}$	ja	ja	ja	nein	nein	$A = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{Z}$	$a+b+1$	ja	ja	ja	-1	ja	–
$\mathbb{Q}$	$2ab$	ja	ja	ja	1	ja	–

3.2 Welche sind Gruppen?

Um eine Gruppe zu bilden muss $*$ folgende eigenschaften erfüllen:

- muss assoziativ sein
- muss ein neutrales Element kennen
- muss ein inverses Element kennen

Ergebnisse Siehe Tabelle unter 3.1.

3.3 Auf welcher Menge wäre Gruppe sonst möglich?

Ergebnisse Siehe Tabelle unter 3.1.

4 H3

Die Elemente der symmetrischen Gruppe S_3 hat insgesamt 6 Elemente (Anzahl Möglichkeiten 3-Zahlen umzusortieren). Diese definiere ich hier (mit Hilfe der Zykel-Schreibweise) als

$$\begin{aligned} e &= (1)(2)(3) \\ s_1 &= (1)(23) \\ s_2 &= (12)(3) \\ s_3 &= (123) \\ s_4 &= (132) \\ s_5 &= (13)(2) \end{aligned}$$

Dies sind die gleichen definitionen wie in der Musterlösung der Übung, blos anders notiert.

Hier fallen zwei Klassen von Permutationen auf. Einmal die, die alle drei elemente vertauschen, und diese, die nur zwei vertauschen (Transpositionen). Wenn man nun je ein Element dieser Klassen nimmt, lässen sich mit Hilfe von Hintereinanderausführung die anderen zusammensetzen (lineare Abhängigkeit).

$$\begin{aligned} e &= (1)(2)(3) \\ a &= (123) \\ b &= (12)(3) \end{aligned}$$

Welche zwei ich hier nehme, ist völlig ohne belang. Das neutrale Element liese sich zwar auch zusammensetzen, ich belasse es aber trotzdem in der Menge.

Die ursprünglichen Permutationen sehen nun wie folgt aus:

$$\begin{aligned} e &= e \\ s_1 &= a \circ b \circ a \circ a \\ s_2 &= b \\ s_3 &= a \\ s_4 &= a \circ a \\ s_5 &= a \circ b \end{aligned}$$

5 H4

Beispiel für einen Körper $(G, +, *)$ mit $G = \{e, a, b\}$:

+	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

+	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	b
b	e	b	a