Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 2

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H1

1.1 a)

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.2 b)

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + \eta &= 0 \\ \lambda + \mu &= 1 \\ \lambda + \mu &= 0 \end{aligned}$$

Nicht lösbar, da

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

2 Aufgabe - H2

2.1 a)

$$\begin{aligned} z &= xy \\ 1 &= z^{-1}z \\ 1 &= (xy)^{-1}xy \\ x^{-1}y^{-1} &= (xy)^{-1} \end{aligned}$$

2.2 b)

Sei R ein Ring mit 1. Dann ist $(T, *)$ eine Gruppe. Für alle $x \in T \subseteq R$ soll gelten, dass sie invertierbar sind. Da auch 1 invertierbar ist, gilt $1 \in T$. Durch die Auswahl ist sichergestellt, dass nur invertierbare Elemente in T enthalten sind. Jetzt fehlt nur noch, dass die Verknüpfung $*$ auf R ein paar aus$T$ wieder auf T abbildet, was laut $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ der fall ist, da auch die Verknüpfungen von Inertierbaren Elementen wieder invertierbar sind, also in T liegen. Hiermit sind nun alle Bedingungen für eine Gruppe erfüllt.

3 Aufgabe - H3

Dieser Beweis ist etwas aufwändiger (zumindest so wie ich ihn betrieben habe). Vorweg möchte ich folgendes zeigen. Auf jedem Körper gilt: $(ab = ac \wedge a \neq 0) \Rightarrow b = c$

$$\begin{array}{rcl} a & = & a + k \\ b & \neq & 0 \\ ba & = & b\,(a+k) \\ & \Rightarrow & ba = ba + bk \\ & \Rightarrow & 0 = bk \\ & \Rightarrow & k = 0 \\ & \Rightarrow & ((ab = ac \wedge a \neq 0) \Rightarrow b = c) \end{array}$$

Nun stelle man sich die multiplikative Verknüpfungstafel für eine belibige Gruppe mit 1 vor:

*	0	1	x_1	$\ldots$	x_n
0	0	0	0	0	0
1	0	1	x_1	$\ldots$	x_n
x_1	0	x_1	?	?	?
$\vdots$	0	$\vdots$	?	?	?
x_n	0	x_n	?	?	?

Alle Bereiche der Tabelle die kein Fragezeichen enthalten müssen durch die Bedingungen die an 0 und 1 geknüpft sind genau so aussehen. In den ?-Bereichen hat man nun mehr oder weniger freie Wahl. Durch den Satz den ich oben hergeleite habe, folgt, das in jeder Zeile / Spalte kein Symbol doppelt vorkommen darf. D.h. das ich nur einen vorrat von $n-1$ Symbole die nicht 0 oder 1 sind habe, mindestens einmal 0 bzw. 1 in irgendeiner Zelle einer jeden Spalte stehen muss. Was genau dem zu beweisenden Satz entspricht, das es für jede Zahl a eine Zahl b geben muss, mit der ab entweder 0 oder 1 ergibt.

4 Aufgabe - H4

Als erstes löse ich die Verkettung in der Definition von $f_2$auf, und erhalte damit für f_2 folgenden ausdruck:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}\left(2x\right) & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\left(1-2x\right) & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left(2x-1\right) & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}\left(1-\left(2x-1\right)\right) & \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases} \\ x &\mapsto \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - x & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 1 - x & \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

4.1 a)

Da die Funktionen f_1 und f_2 stellenweise definiert sind, und ganz unterschiedliche Funktionsbereiche haben, kann man sie auf keinen Fall durch einfache Multiplikation mit einem Skalar ineinander überführen. D.h. sie sind linear unabhängig.

4.2 b)

$$h = 2\left(f_1 + f_2\right)$$

Dies zeigt sich, wenn man die Bereiche einzeln summiert, und anschließend mit 2 multipliziert, das man das gesuchte h erhält.

4.3 c)

Die lineare Hülle von f_1, f_2 ist die Menge von Funktionen die man durch die Gleichung $\lambda f_1 + \mu f_2$ mit belibigen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ erhalten kann. Dies sind alles Funktion die den Wertebereich auf $0 \ldots 1$ einschlänken und in 4 gleichgroße Teile unterteilen. Zudem ist jeder Teil ein Polynom maximal vom Grad 1.