Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 2

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H1

1.1 a)

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.2 b)

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + \eta &= 0 \\ \lambda + \mu &= 1 \\ \lambda + \mu &= 0 \end{aligned}$$

Nicht lösbar, da

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

2 Aufgabe - H2

2.1 a)

$$\begin{aligned} z &= xy \\ 1 &= z^{-1}z \\ 1 &= (xy)^{-1}\,xy \\ x^{-1}y^{-1} &= (xy)^{-1} \end{aligned}$$

2.2 b)

Sei R ein Ring mit 1. Dann ist $(T, *)$ eine Gruppe. Für alle $x \in T \subseteq R$ soll gelten, dass sie invertierbar sind. Da auch 1 invertierbar ist, gilt $1 \in T$. Durch die Auswahl ist sichergestellt, dass nur invertierbare Elemente in T enthalten sind. Jetzt fehlt nur noch, dass die Verknüpfung $*$ auf R ein paar aus$T$ wieder auf T abbildet, was laut $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ der fall ist, da auch die Verknüpfungen von Inertierbaren Elementen wieder invertierbar sind, also in T liegen. Hiermit sind nun alle Bedingungen für eine Gruppe erfüllt.

3 Aufgabe - H3

Dieser Beweis ist etwas aufwändiger (zumindest so wie ich ihn betrieben habe). Vorweg möchte ich folgendes zeigen. Auf jedem Körper gilt: $(ab = ac \wedge a \neq 0) \Rightarrow b = c$

$$
\begin{aligned}
a &= a + k \\
b &\neq 0 \\
ba &= b\,(a + k) \\
&\Rightarrow ba = ba + bk \\
&\Rightarrow 0 = bk \\
&\Rightarrow k = 0 \\
&\Rightarrow ((ab = ac \wedge a \neq 0) \Rightarrow b = c)
\end{aligned}
$$

Nun stelle man sich die multiplikative Verknüpfungstafel für eine belibige Gruppe mit 1 vor:

*	0	1	x_1	$\dots$	x_n
0	0	0	0	0	0
1	0	1	x_1	$\dots$	x_n
x_1	0	x_1	?	?	?
$\vdots$	0	$\vdots$	?	?	?
x_n	0	x_n	?	?	?

Alle Bereiche der Tabelle die kein Fragezeichen enthalten müssen durch die Bedingungen die an 0 und 1 geknüpft sind genau so aussehen. In den ?-Bereichen hat man nun mehr oder weniger freie Wahl. Durch den Satz den ich oben hergeleite habe, folgt, das in jeder Zeile / Spalte kein Symbol doppelt vorkommen darf. D.h. das ich nur einen vorrat von $n - 1$ Symbole die nicht 0 oder 1 sind habe, mindestens einmal 0 bzw. 1 in irgendeiner Zelle einer jeden Spalte stehen muss. Was genau dem zu beweisenden Satz entspricht, das es für jede Zahl a eine Zahl b geben muss, mit der ab entweder 0 oder 1 ergibt.

4 Aufgabe - H4

Als erstes löse ich die Verkettung in der Definition von $f_2$auf, und erhalte damit für f_2 folgenden ausdruck:

$$
\begin{aligned}
x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}(2x) & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(1-2x) & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(2x-1) & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}(1-(2x-1)) & \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases} \\
x &\mapsto \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - x & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 1 - x & \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

4.1 a)

Da die Funktionen f_1 und f_2 stellenweise definiert sind, und ganz unterschiedliche Funktionsbereiche haben, kann man sie auf keinen Fall durch einfache Multiplikation mit einem Skalar ineinander überführen. D.h. sie sind linear unabhängig.

4.2 b)

$$h = 2(f_1 + f_2)$$

Dies zeigt sich, wenn man die Bereiche einzeln summiert, und anschließend mit 2 multipliziert, das man das gesuchte h erhält.

4.3 c)

Die lineare Hülle von f_1, f_2 ist die Menge von Funktionen die man durch die Gleichung $\lambda f_1 + \mu f_2$ mit belibigen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ erhalten kann. Dies sind alles Funktion die den Wertebereich auf $0 \ldots 1$ einschlänken und in 4 gleichgroße Teile unterteilen. Zudem ist jeder Teil ein Polynom maximal vom Grad 1.