Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 4

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 1282445

20. Dezember 2004

1 Aufgabe - H1

Diese aufgabe stellt einem vor das Problem festzustellen, in wie weit das Gleichungssysttem

$$\begin{aligned} 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 &= 0 \\ 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 - 1 \cdot u_3 &= 0 \\ 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar ist. Wenn es eindeutig lösbar seien sollte, muss dies automatisch die triviale Lösung

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{aligned}$$

sein. Was heißen würde, das sie alle lin. unabhängig wären. Da der K^3 von 3 Basisvektoren erzeugt wird, würde das heißen, das der Fall der lin. unabhänigkeit der 3 Vektoren dazu führt, das sie K^3 aufspannen.

Wenn man von dem oben gezeigten System die 1 Zeile von der zweiten abzieht, erhält man

$$\begin{aligned} 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 &= 0 \\ (-1 - 1) \cdot u_3 &= 0 \\ 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses System ist genau dann lin. unabhängig, wenn $-1 - 1 \neq 0$ in K gilt.

2 Aufgabe - H2

2.1 a) Ein Beispiel

Dies Bsp lässt sich einfach konstruieren, indem man 3 belibige lin. unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ nimmt, und als vierten die Summe dieser 3 nimmt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2 b)

Den folgenden Beweis kann man mit einem der Vektoren $v_1, \dots, v_4$ durchspielen, jenachdem welcher sich aus den anderen lin. kombinieren lässt.

O.b.d.A. Sei v_4 linear aus v_1, v_2, v_3 kombinierbar. D.h.

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^4 : v_4 = -\lambda_3 v_1 - \lambda_3 v_2 - \lambda_3 v_3$$

Daraus folgt durch einsetzen in die definition der Menge:

$$\begin{aligned} & \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | a v_1 + b v_2 + c v_3 + d\left(-\lambda_3 v_1 - \lambda_3 v_2 - \lambda_3 v_3\right) = 0\right\} \\ = \quad & \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | \left(a - \lambda_1 d\right) v_1 + \left(b - \lambda_2 d\right) v_2 + \left(c - \lambda_3 d\right) v_3 = 0\right\} \end{aligned}$$

Da aber von v_1, v_2, v_3 die lin. Unabhängigkeit gegeben ist, folgt dass

$$\begin{aligned} a - \lambda_1 d &= 0 \\ b - \lambda_2 d &= 0 \\ c - \lambda_3 d &= 0 \end{aligned}$$

gelten muss. Das bedeutet, das es für jedes gegebene d genau einen Vektor geben kann, der diese gleichung erfüllt, mämlich

$$(d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3, d)$$

Das heißt unsere Menge wird z.B. von

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 1)$$

erzeugt. $\square$

3 Aufgabe - H3

3.1 a)

Hierfür hab ich lange gesucht, und das naheliegende nicht gefunden. nur unendliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ haben kein maximales Element, also beispielsweise

$$\{2n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$$

3.2 b)

Sei B eine linear unabhängige Familie. Dann ist per def. $B \in \mathcal{F}$. Da auch jede Teilfamilie von B linear unabhängig ist, liegt sie ebenfalls in $\mathcal{F}$. Da dies für alle linear unabhängigen Familien gilt folgt, dass B von endlichem Charakter ist.

3.3 c)

Sei V ein Vektorraum, und $\mathcal{F}$ die Familie der linear unabhängigen Teilmengen von V. Diese ist nach b) von endlichem Charakter. Nach dem Lemma von Tukey muss es in $\mathcal{F}$ ein maximales Element geben. Dieses (eines dieser) Element ist die gesuchte Basis von V. Durch die Maximaleigenschaft ist gegeben, das es nichtmehr linear unabhängig verlängerbar ist. Es lässt sich auch der gesamte Vektorraum hiermit aufspannen, denn falls dies nicht so wäre, hätte man zu diesem Element linear unabhängige Vektoren gefunden, wass allerdings im Wiederspruch zur Maximaleigenschaft steht. Durch diese beiden Eigenschaften (Unverlängerbar / Erzugendensystem) ist eine Basis nun schon eindeutig charakterisiert. $\square$