Übungsaufgaben Theoretische Informatik I
Blatt 3

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 23220320

20. Dezember 2004

1 Aufgabe

1.1 Angabe der Mengen T_n^3 aus der Grammatik G

Um den Lösungsalgorithmus für das Wortproblem (um den es hier geht) anwenden zu können, muss zuerst geprüft werden, ob es sich bei G wirklich um eine Typ 1 Grammatik (und erstrecht um eine Grammatik im allgemeinen) handelt. Dies bedeutet, das bei allen Produktionen der Grammatik die Linke Seite maximal soviele Symbole wie die Rechte Seite haben darf (und natürlich die Grundkriterien für eine Grammatik erfüllt sind).

$$\forall_P^{l \to r} : |l| \leq |r|$$

Die vorliegende Grammatik erfüllt all diese Bedingungen, wir können also beginnen.

Vorweg zur Notation: Bei T_n^m handelt es sich um die Menge aller "halbfertigen Wörter" (können Variablen enthalten $T_n^m \in (V \cup \Sigma)^*$) die maximal m Symbole haben, und in maximal n Ableitungsschritten aus dem Startsymbol S ableitbar sind.

1.1.1 0-te Ableitung

Die nullte Ableitung ist hier als identische Ableitung definiert. D. h., dass nur S selber als Element der Menge T_0^3 infrage kommt.

$$T_0^3 = \{S\}$$

1.1.2 1-te Ableitung

Die folgenden Schritte können nun alle nach dem gleichen (rekrusiven) Schema ablaufen.

Nehme die letzte Menge (T_{n-1}^m), und ziehe die vorletzten Menge (T_{n-2}^m) und alle fertigen Wörter (Σ^*) (bestehen ausschließlich aus Terminalen) ab, bilde alle Ableitungen dieser Menge.

Dies Vereinigt mit der letzten Menge (T_{n-1}^m) ergibt die neue Menge. Mathematisch:

$$T_{n+1}^m = T_n^m \cup \mathrm{Abl}_m \left(T_n^m \backslash \left(T_{n-1}^m \cup \Sigma^* \right) \right)$$

Unter $\mathrm{Abl}_m(X)$ versteht man die Menge aller Ableitungen von Elementen aus X die maximal m Symbole besitzen. Mathematisch:

$$\mathrm{Abl}_m(X) = \left\{ w \in (V \cup \Sigma)^* \mid |w| \leq m \wedge \exists_X^{w'} : w' \Rightarrow w \right\}$$

Diese Definitionen entsprechen nicht ganz den Angaben in der Literatur, sind aber leichter handhabbar, da die Ableitung nur für eine viel kleiner Menge durchgeführt werden muss. Dies wird auch später in meiner C++ Abgabe genutzt werden, und bewirgt einen Performancegewinn.
So nun zur konkreten 1.ten Ableitungen (Rechts in Klammern immer die angewanten Regeln)

$$\begin{aligned} T_1^3 = \{ \quad & S, & (\text{aus } T_0^3) \\ & AB & (S \text{ mit } S \to AB)\} \end{aligned}$$

1.1.3 2-te Ableitung

$$\begin{aligned} T_2^3 = \{ \quad & S, & (\text{aus } T_0^3) \\ & AB, & (\text{aus } T_1^3) \\ & BAB, & (AB \text{ mit } A \to BA) \\ & aB, & (AB \text{ mit } AB \to aB) \\ & Ab, & (AB \text{ mit } B \to b) \\ & AA, & (AB \text{ mit } B \to BB)\} \end{aligned}$$

1.1.4 3-te Ableitung

$$
\begin{aligned}
T_3^3 = \{ \quad & S, && \left(\text{aus } T_0^3\right) \\
& AB, && \left(\text{aus } T_1^3\right) \\
& BAB, && \left(\text{aus } T_2^3\right) \\
& aB, && \left(\text{aus } T_2^3\right) \\
& Ab, && \left(\text{aus } T_2^3\right) \\
& AA, && \left(\text{aus } T_2^3\right) \\
& BaB, && (BAB \text{ mit } AB \to aB) \\
& bAB, && (BAB \text{ mit } B \to b) \\
& BAb, && (BAB \text{ mit } B \to b) \\
& AAB, && (BAB \text{ mit } B \to A) \\
& BAA, && (BAB \text{ mit } B \to A) \\
& ab, && (aB \text{ mit } B \to b) \\
& aA, && (aB \text{ mit } B \to A) \\
& ABA, && (AA \text{ mit } A \to BA)\}
\end{aligned}
$$

Folgende fallen wegen Überlänge / Dopplung herraus:

$$
\begin{aligned}
T_3^3 \not\supseteq \{ \quad & BBAB, && (BAB \text{ mit } A \to BA) \\
& BAb, && (Ab \text{ mit } A \to AB) \\
& BAA, && (AA \text{ mit } A \to AB)\}
\end{aligned}
$$

1.1.5 4-te Ableitung

$$
\begin{aligned}
T_4^3 = \{ \quad & S, && \left(\text{aus } T_0^3\right) \\
& AB, && \left(\text{aus } T_1^3\right) \\
& BAB, && \left(\text{aus } T_2^3\right) \\
& aB, && \left(\text{aus } T_2^3\right) \\
& Ab, && \left(\text{aus } T_2^3\right) \\
& AA, && \left(\text{aus } T_2^3\right) \\
& BaB, && \left(\text{aus } T_3^3\right) \\
& bAB, && \left(\text{aus } T_3^3\right) \\
& BAb, && \left(\text{aus } T_3^3\right) \\
& AAB, && \left(\text{aus } T_3^3\right) \\
& BAA, && \left(\text{aus } T_3^3\right) \\
& ab, && \left(\text{aus } T_3^3\right) \\
& aA, && \left(\text{aus } T_3^3\right) \\
& ABA && \left(\text{aus } T_3^3\right) \\
& baB, && (BaB \text{ mit } B \to b) \\
& Bab, && (BaB \text{ mit } B \to b) \\
& AaB, && (BaB \text{ mit } B \to A) \\
& BaA, && (BaB \text{ mit } B \to A) \\
& baA && (bAB \text{ mit } AB \to aA) \\
& bAb, && (bAB \text{ mit } B \to b) \\
& bAA, && (bAB \text{ mit } B \to A) \\
& AAb, && (BAb \text{ mit } B \to A) \\
& AaA, && (AAB \text{ mit } AB \to aA) \\
& AAA, && (AAB \text{ mit } B \to A) \\
& aAA, && (ABA \text{ mit } AB \to aA) \\
& aBA, && (ABA \text{ mit } B \to b)\}
\end{aligned}
$$

Folgende fallen wegen Überlänge / Dopplung herraus:

$$
\begin{aligned}
T_4^3 \not\supseteq \{ \quad & bBAB, && (bAB \text{ mit } A \to BA) \\
& bAB, && (bAB \text{ mit } A \to BA) \\
& BBAb, && (BAb \text{ mit } A \to BA) \\
& bAb, && (BAb \text{ mit } B \to b) \\
& ABAB, && (AAB \text{ mit } A \to BA) \\
& BAAB, && (AAB \text{ mit } B \to BA) \\
& AAb, && (AAB \text{ mit } B \to b) \\
& BBAA, && (BAA \text{ mit } A \to BA) \\
& BABA, && (BAA \text{ mit } A \to BA) \\
& bAA, && (BAA \text{ mit } B \to b) \\
& AAA, && (BAA \text{ mit } B \to A) \\
& BABA && (ABA \text{ mit } A \to BA) \\
& ABBA && (ABA \text{ mit } A \to BA) \\
& AAA, && (ABA \text{ mit } B \to A)\}
\end{aligned}
$$

1.1.6 5-te Ableitung

$$
\begin{aligned}
T_5^3 = \{ \quad & S, && \big(\text{aus } T_0^3\big) \\
& AB, && \big(\text{aus } T_1^3\big) \\
& BAB, && \big(\text{aus } T_2^3\big) \\
& aB, && \big(\text{aus } T_2^3\big) \\
& Ab, && \big(\text{aus } T_2^3\big) \\
& AA, && \big(\text{aus } T_2^3\big) \\
& BaB, && \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
& bAB, && \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
& BAb, && \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
& AAB, && \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
& BAA, && \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
& ab, && \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
& aA, && \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
& ABA && \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
& baB, && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& Bab, && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& AaB, && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& BaA, && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& baA && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& bAb, && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& bAA, && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& AAb, && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& AaA, && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& AAA, && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& aAA, && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& aBA, && \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
& bab, && (baB \text{ mit } B \to b) \\
& Aab, && (Bab \text{ mit } B \to A) \\
& abA, && (aBA \text{ mit } B \to b)\}
\end{aligned}
$$

Folgende fallen wegen Überlänge / Dopplung herraus:

$$
\begin{array}{rll}
T_5^3 \not\supseteq \{ & baA, & (baB \text{ mit } B \to A) \\
 & bab, & (Bab \text{ mit } B \to b) \\
 & BAaB, & (AaB \text{ mit } A \to BA) \\
 & BaBA, & (BaA \text{ mit } A \to BA) \\
 & baBA, & (baA \text{ mit } A \to BA) \\
 & AaA, & (AaB \text{ mit } B \to A) \\
 & AaA, & (BaA \text{ mit } B \to A) \\
 & baA, & (BaA \text{ mit } B \to b) \\
 & Aab, & (AaB \text{ mit } B \to b) \\
 & bBAb, & (bAb \text{ mit } A \to BA) \\
 & bBAA, & (bAA \text{ mit } A \to BA) \\
 & bABA, & (bAA \text{ mit } A \to BA) \\
 & BAAb, & (AAb \text{ mit } A \to BA) \\
 & ABAb, & (AAb \text{ mit } A \to BA) \\
 & BAaA, & (AaA \text{ mit } A \to BA) \\
 & AaBA, & (AaA \text{ mit } A \to BA) \\
 & BAAA, & (AAA \text{ mit } A \to BA) \\
 & ABAA, & (AAA \text{ mit } A \to BA) \\
 & AABA, & (AAA \text{ mit } A \to BA) \\
 & bBAA, & (bAA \text{ mit } A \to BA) \\
 & bABA, & (bAA \text{ mit } A \to BA) \\
 & aBAA, & (aAA \text{ mit } A \to BA) \\
 & aABA, & (aAA \text{ mit } A \to BA) \\
 & aBBA, & (aBA \text{ mit } A \to BA) \\
 & aAA, & (aBA \text{ mit } B \to A)\}
\end{array}
$$

1.1.7 6-te Ableitung

$$
\begin{array}{rll}
T_6^3 = \{ & S, & \big(\text{aus } T_0^3\big) \\
 & AB, & \big(\text{aus } T_1^3\big) \\
 & BAB, & \big(\text{aus } T_2^3\big) \\
 & aB, & \big(\text{aus } T_2^3\big) \\
 & Ab, & \big(\text{aus } T_2^3\big) \\
 & AA, & \big(\text{aus } T_2^3\big) \\
 & BaB, & \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
 & bAB, & \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
 & BAb, & \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
 & AAB, & \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
 & BAA, & \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
 & ab, & \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
 & aA, & \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
 & ABA & \big(\text{aus } T_3^3\big) \\
 & baB, & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & Bab, & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & AaB, & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & BaA, & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & baA & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & bAb, & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & bAA, & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & AAb, & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & AaA, & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & AAA, & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & aAA, & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & aBA, & \big(\text{aus } T_4^3\big) \\
 & bab, & \big(\text{aus } T_5^3\big) \\
 & Aab, & \big(\text{aus } T_5^3\big) \\
 & AbA, & \big(\text{aus } T_5^3\big) \\
 & abA, & \big(\text{aus } T_5^3\big)\}
\end{array}
$$

Folgende fallen wegen Überlänge / Dopplung herraus:

$$
\begin{array}{rll}
T_6^3 \not\supseteq \{ & BAab, & (Aab \text{ mit } A \to BA) \\
 & BAbb, & (Abb \text{ mit } A \to BA) \\
 & BAaA, & (AaA \text{ mit } A \to BA) \\
 & AaBA, & (AaA \text{ mit } A \to BA) \\
 & bbBA, & (bbA \text{ mit } A \to BA) \\
 & abBA, & (abA \text{ mit } A \to BA)\}
\end{array}
$$

1.1.8 Ende der Ableitungen

Hier kann man aufhören nach neuen Ableitungen zu suchen, da $T_6^3 = T_5^3$ und es somit keine neuen Ableitungen mehr geben kann (wir suchen schließlich nur in der Differenz $T_6^3 \setminus \left(T_5^3 \cup \Sigma^*\right) = \emptyset$).

1.2 Lösung des Wortproblems für...

Als erstes wäre es sinnvoll die Menge $w^3 = T_6^3 \cup \Sigma^*$ die nur echte Worte (aus Terminalen bestehend) enthält zu definieren. Dies ist die folgende Menge:

$$w^3 = \{ab, bab\}$$

Hiermit lässt sich das Wortproblem nun leicht lösen.

- "*bab*" ist ein Wort der Sprache der Grammatik G ($bab \in L(G)$)
- "*bbb*" ist kein Wort der Sprache der Grammatik G ($bbb \notin L(G)$)
- "*baa*" ist kein Wort der Sprache der Grammatik G ($baa \notin L(G)$)
- "*bba*" ist kein Wort der Sprache der Grammatik G ($bba \notin L(G)$)