

# Übungsaufgaben Theoretische Informatik I

## Blatt 3

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>  
Matrikel Nummer: 23220320

20. Dezember 2004

### 1 Aufgabe

#### 1.1 Angabe der Mengen $T_n^3$ aus der Grammatik $G$

Um den Lösungsalgorithmus für das Wortproblem (um den es hier geht) anwenden zu können, muss zuerst geprüft werden, ob es sich bei  $G$  wirklich um eine Typ 1 Grammatik (und erstrecht um eine Grammatik im allgemeinen) handelt. Dies bedeutet, dass bei allen Produktionen der Grammatik die linke Seite maximal so viele Symbole wie die rechte Seite haben darf (und natürlich die Grundkriterien für eine Grammatik erfüllt sind).

$$\forall_P^{l \rightarrow r} : |l| \leq |r|$$

Die vorliegende Grammatik erfüllt all diese Bedingungen, wir können also beginnen.

Vorweg zur Notation: Bei  $T_n^m$  handelt es sich um die Menge aller "halbfertigen Wörter" (können Variablen enthalten  $T_n^m \in (V \cup \Sigma)^*$ ) die maximal  $m$  Symbole haben, und in maximal  $n$  Ableitungsschritten aus dem Startsymbol  $S$  ableitbar sind.

##### 1.1.1 0-te Ableitung

Die nullte Ableitung ist hier als identische Ableitung definiert. D. h., dass nur  $S$  selber als Element der Menge  $T_0^3$  infrage kommt.

$$T_0^3 = \{S\}$$

##### 1.1.2 1-te Ableitung

Die folgenden Schritte können nun alle nach dem gleichen (rekursiven) Schema ablaufen.

Nehme die letzte Menge ( $T_{n-1}^m$ ), und ziehe die vorletzte Menge ( $T_{n-2}^m$ ) und alle fertigen Wörter ( $\Sigma^*$ ) (bestehen ausschließlich aus Terminalen) ab, bilde alle Ableitungen dieser Menge.

Dies vereint mit der letzten Menge ( $T_{n-1}^m$ ) ergibt die neue Menge. Mathematisch:

$$T_{n+1}^m = T_n^m \cup \text{Abl}_m(T_n^m \setminus (T_{n-1}^m \cup \Sigma^*))$$

Unter  $\text{Abl}_m(X)$  versteht man die Menge aller Ableitungen von Elementen aus  $X$  die maximal  $m$  Symbole besitzen. Mathematisch:

$$\text{Abl}_m(X) = \{w \in (V \cup \Sigma)^* \mid |w| \leq m \wedge \exists_X^{w'} : w' \Rightarrow w\}$$

Diese Definitionen entsprechen nicht ganz den Angaben in der Literatur, sind aber leichter handhabbar, da die Ableitung nur für eine viel kleinere Menge durchgeführt werden muss. Dies wird auch später in meiner C++ Abgabe genutzt werden, und bewirgt einen Performancegewinn.

So nun zur konkreten 1.ten Ableitungen (Rechts in Klammern immer die angewandten Regeln)

$$T_1^3 = \left\{ \begin{array}{ll} S, & (\text{aus } T_0^3) \\ AB & (S \text{ mit } S \rightarrow AB) \end{array} \right\}$$

##### 1.1.3 2-te Ableitung

$$T_2^3 = \left\{ \begin{array}{ll} S, & (\text{aus } T_0^3) \\ AB, & (\text{aus } T_1^3) \\ BAB, & (AB \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ aB, & (AB \text{ mit } AB \rightarrow aB) \\ Ab, & (AB \text{ mit } B \rightarrow b) \\ AA, & (AB \text{ mit } B \rightarrow BB) \end{array} \right\}$$

### 1.1.4 3-te Ableitung

$$T_3^3 = \{ \begin{array}{ll} S, & (\text{aus } T_0^3) \\ AB, & (\text{aus } T_1^3) \\ BAB, & (\text{aus } T_2^3) \\ aB, & (\text{aus } T_2^3) \\ Ab, & (\text{aus } T_2^3) \\ AA, & (\text{aus } T_2^3) \\ BaB, & (BAB \text{ mit } AB \rightarrow aB) \\ bAB, & (BAB \text{ mit } B \rightarrow b) \\ BAb, & (BAB \text{ mit } B \rightarrow b) \\ AAB, & (BAB \text{ mit } B \rightarrow A) \\ BAA, & (BAB \text{ mit } B \rightarrow A) \\ ab, & (aB \text{ mit } B \rightarrow b) \\ aA, & (aB \text{ mit } B \rightarrow A) \\ ABA, & (AA \text{ mit } A \rightarrow BA) \end{array} \}$$

Folgende fallen wegen Überlänge / Dopplung heraus:

$$T_3^3 \not\subseteq \{ \begin{array}{ll} BBAB, & (BAB \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ BAb, & (Ab \text{ mit } A \rightarrow AB) \\ BAA, & (AA \text{ mit } A \rightarrow AB) \end{array} \}$$

### 1.1.5 4-te Ableitung

$$T_4^3 = \{ \begin{array}{ll} S, & (\text{aus } T_0^3) \\ AB, & (\text{aus } T_1^3) \\ BAB, & (\text{aus } T_2^3) \\ aB, & (\text{aus } T_2^3) \\ Ab, & (\text{aus } T_2^3) \\ AA, & (\text{aus } T_2^3) \\ BaB, & (\text{aus } T_3^3) \\ bAB, & (\text{aus } T_3^3) \\ BAb, & (\text{aus } T_3^3) \\ AAB, & (\text{aus } T_3^3) \\ BAA, & (\text{aus } T_3^3) \\ ab, & (\text{aus } T_3^3) \\ aA, & (\text{aus } T_3^3) \\ ABA & (\text{aus } T_3^3) \\ baB, & (BaB \text{ mit } B \rightarrow b) \\ Bab, & (BaB \text{ mit } B \rightarrow b) \\ AaB, & (BaB \text{ mit } B \rightarrow A) \\ BaA, & (BaB \text{ mit } B \rightarrow A) \\ baA & (bAB \text{ mit } AB \rightarrow aA) \\ bAb, & (bAB \text{ mit } B \rightarrow b) \\ bAA, & (bAB \text{ mit } B \rightarrow A) \\ AAb, & (BAb \text{ mit } B \rightarrow A) \\ AaA, & (AAB \text{ mit } AB \rightarrow aA) \\ AAA, & (AAB \text{ mit } B \rightarrow A) \\ aAA, & (ABA \text{ mit } AB \rightarrow aA) \\ aBA, & (ABA \text{ mit } B \rightarrow b) \end{array} \}$$

Folgende fallen wegen Überlänge / Dopplung heraus:

### 1.1.6 5-te Ableitung

$$\begin{array}{l}
 T_5^3 = \{ \quad S, \quad (\text{aus } T_0^3) \\
 \quad AB, \quad (\text{aus } T_1^3) \\
 \quad BAB, \quad (\text{aus } T_2^3) \\
 \quad aB, \quad (\text{aus } T_2^3) \\
 \quad Ab, \quad (\text{aus } T_2^3) \\
 \quad AA, \quad (\text{aus } T_2^3) \\
 \quad BaB, \quad (\text{aus } T_3^3) \\
 \quad bAB, \quad (\text{aus } T_3^3) \\
 \quad BAb, \quad (\text{aus } T_3^3) \\
 \quad AAB, \quad (\text{aus } T_3^3) \\
 \quad BAA, \quad (\text{aus } T_3^3) \\
 \quad ab, \quad (\text{aus } T_3^3) \\
 \quad aA, \quad (\text{aus } T_3^3) \\
 \quad ABA \quad (\text{aus } T_3^3) \\
 \quad baB, \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad Bab, \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad AaB, \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad BaA, \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad baA \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad bAb, \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad bAA, \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad AAb, \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad AaA, \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad AAA, \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad aAA, \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad aBA, \quad (\text{aus } T_4^3) \\
 \quad bab, \quad (baB \text{ mit } B \rightarrow b) \\
 \quad Aab, \quad (Bab \text{ mit } B \rightarrow A) \\
 \quad abA, \quad (aBA \text{ mit } B \rightarrow b)\} \\
 \\
 T_4^3 \not\subseteq \{ \quad bBAB, \quad (bAB \text{ mit } A \rightarrow BA) \\
 \quad bAB, \quad (bAB \text{ mit } A \rightarrow BA) \\
 \quad BBAb, \quad (BAb \text{ mit } A \rightarrow BA) \\
 \quad bAb, \quad (BAb \text{ mit } B \rightarrow b) \\
 \quad ABAB, \quad (AAB \text{ mit } A \rightarrow BA) \\
 \quad BAAB, \quad (AAB \text{ mit } B \rightarrow BA) \\
 \quad AAb, \quad (AAB \text{ mit } B \rightarrow b) \\
 \quad BBAA, \quad (BAA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\
 \quad BABA, \quad (BAA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\
 \quad bAA, \quad (BAA \text{ mit } B \rightarrow b) \\
 \quad AAA, \quad (BAA \text{ mit } B \rightarrow A) \\
 \quad BABA \quad (ABA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\
 \quad ABBA \quad (ABA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\
 \quad AAA, \quad (ABA \text{ mit } B \rightarrow A)\}
 \end{array}$$

Folgende fallen wegen Überlänge / Dopplung  
hervoraus:

### 1.1.7 6-te Ableitung

$$T_6^3 = \{ \begin{array}{ll} S, & (\text{aus } T_0^3) \\ AB, & (\text{aus } T_1^3) \\ BAB, & (\text{aus } T_2^3) \\ aB, & (\text{aus } T_2^3) \\ Ab, & (\text{aus } T_2^3) \\ AA, & (\text{aus } T_2^3) \\ BaB, & (\text{aus } T_3^3) \\ bAB, & (\text{aus } T_3^3) \\ BAB, & (\text{aus } T_3^3) \\ AAB, & (\text{aus } T_3^3) \\ BAA, & (\text{aus } T_3^3) \\ ab, & (\text{aus } T_3^3) \\ aA, & (\text{aus } T_3^3) \\ ABA, & (\text{aus } T_3^3) \\ baB, & (\text{aus } T_4^3) \\ Bab, & (\text{aus } T_4^3) \\ AaB, & (\text{aus } T_4^3) \\ BaA, & (\text{aus } T_4^3) \\ baA, & (\text{aus } T_4^3) \\ bAb, & (\text{aus } T_4^3) \\ bAA, & (\text{aus } T_4^3) \\ AAb, & (\text{aus } T_4^3) \\ AaA, & (\text{aus } T_4^3) \\ AAA, & (\text{aus } T_4^3) \\ aAA, & (\text{aus } T_4^3) \\ aBA, & (\text{aus } T_4^3) \\ bab, & (\text{aus } T_5^3) \\ Aab, & (\text{aus } T_5^3) \\ AbA, & (\text{aus } T_5^3) \\ abA, & (\text{aus } T_5^3) \end{array} \}$$

$$T_5^3 \not\subseteq \{ \begin{array}{ll} baA, & (baB \text{ mit } B \rightarrow A) \\ bab, & (Bab \text{ mit } B \rightarrow b) \\ BAaB, & (AaB \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ BaBA, & (BaA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ baBA, & (baA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ AaA, & (AaB \text{ mit } B \rightarrow A) \\ AaA, & (BaA \text{ mit } B \rightarrow A) \\ baA, & (BaA \text{ mit } B \rightarrow b) \\ Aab, & (AaB \text{ mit } B \rightarrow b) \\ bBAb, & (bAb \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ bBAA, & (bAA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ bABA, & (bAA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ BAAb, & (AAb \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ ABAb, & (AAb \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ BAaA, & (AaA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ AaBA, & (AaA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ BAAA, & (AAA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ ABAA, & (AAA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ AABA, & (AAA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ bBAA, & (bAA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ bABA, & (bAA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ aBAA, & (aAA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ aABA, & (aAA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ aBBA, & (aBA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ aAA, & (aBA \text{ mit } B \rightarrow A) \end{array} \}$$

Folgende fallen wegen Überlänge / Dopplung heraus:

$$T_6^3 \not\subseteq \{ \begin{array}{ll} BAab, & (Aab \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ BAbb, & (Abb \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ BAaA, & (AaA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ AaBA, & (AaA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ bbBA, & (bbA \text{ mit } A \rightarrow BA) \\ abBA, & (abA \text{ mit } A \rightarrow BA) \end{array} \}$$

### 1.1.8 Ende der Ableitungen

Hier kann man aufhören nach neuen Ableitungen zu suchen, da  $T_6^3 = T_5^3$  und es somit keine neuen Ableitungen mehr geben kann (wir suchen schließlich nur in der Differenz  $T_6^3 \setminus (T_5^3 \cup \Sigma^*) = \emptyset$ ).

## 1.2 Lösung des Wortproblems für...

Als erstes wäre es sinnvoll die Menge  $w^3 = T_6^3 \cup \Sigma^*$  die nur echte Worte (aus Terminalen bestehend) enthält zu definieren. Dies ist die folgende Menge:

$$w^3 = \{ab, bab\}$$

Hiermit lässt sich das Wortproblem nun leicht lösen.

- “*bab*” ist ein Wort der Sprache der Grammatik  $G$  ( $bab \in L(G)$ )
- “*bbb*” ist kein Wort der Sprache der Grammatik  $G$  ( $bbb \notin L(G)$ )
- “*baa*” ist kein Wort der Sprache der Grammatik  $G$  ( $baa \notin L(G)$ )
- “*bba*” ist kein Wort der Sprache der Grammatik  $G$  ( $bba \notin L(G)$ )