

# Übungsaufgaben Theoretische Informatik I

## Blatt 5

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>  
Matrikel Nummer: 23220320

20. Dezember 2004

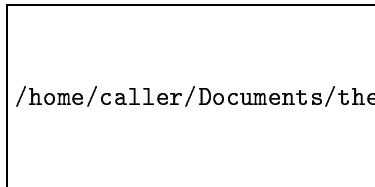
### 1 Aufgabe

#### 1.1 Zeichnung des Zustandsgraphen des NFA $M$

Zum Zeichnen des Zustandsgraphen eines NFA ist meiner Meinung nach nicht viel zu sagen. Allgemein kann man wie folgt vorgehen:

- Zeichne alle Zustände
- Markiere Startzustände mit einem auf sie zeigenden Pfeil
- Markiere Endzustände mit Doppelkreisen
- Zeichne alle möglichen Zustandsüberführungen ein, und beschrifte sie

Abbildung 1: Zustandsgraph von  $M$



#### 1.2 DFA $M'$ zu NFA $M$

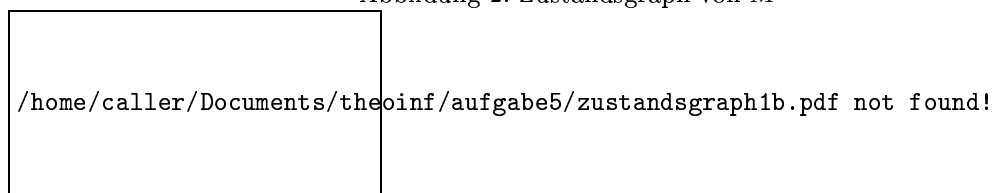
Um aus einem NFA ein DFA zu machen, könnte man nach der Potenzmengenkonstruktion vorgehen. Allerdings würde man so einige überflüssige Zustände erhalten. Um dies zu vermeiden, nutze ich einen anderen Algorithmus:

- Füge einen Zustand in den Graphen hinzu, mache ihn als Startzustand kenntlich, und beschrifte ihn mit der Menge der Startzustände des NFA.
- Folgendes solange ausführen, bis sich an dem Graphen nichts mehr ändert.
  - Für jeden Zustand  $z_x$  des entstehenden Graphen:
    - \* Für jedes Terminal  $t \in \Sigma$ :
      - Bestimme für jedes Element der Menge die den akt. Zustand  $z_x$  bildet, die Menge der neuen Zustände bezüglich dem Terminal  $t$ .
      - Fasse diese zu einer neuen Menge  $z_{neu}$  zusammen.

- Wenn  $z_{neu}$  noch nicht auf dem Graphen, füge ihm zum Graphen hinzu, und beschrifte ihn mit der Menge  $z_{neu}$ .
- Wenn die Menge  $z_{neu}$  ein Endzustand aus  $E$  enthält ( $\exists_{z_{neu}}^a : a \in E$ ), dann umkreise  $z_{neu}$  doppelt.
- Wenn noch nicht vorhanden, zeichne einen Pfeil von  $z_x$  nach  $z_{neu}$ .
- Wenn noch nicht vorhanden, ergänze die Beschriftung  $t$  am Pfeil von  $z_x$  nach  $z_{neu}$ .

Wenn man diesen Algorithmus ausgeführt hat, ist man in Besitz des DFA Graphen eines NFA. Für den  $M'$  wäre das folgender:

Abbildung 2: Zustandsgraph von  $M'$



Entweder kann man den DFA  $M'$  nun aus dem Diagramm ablesen, oder man geht den folgenden Algorithmus (ähnlich dem zur Konstruktion eines DFA aus einem NFA) durch (ist sicherlich noch im Detail optimierbar):

- Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ein NFA. Ziel ist es einen DFA mit  $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$  zu erstellen
- $z'_0 = S, Z' = S$
- Folgendes solange ausführen, bis sich an  $\delta$  und  $Z'$  nichts mehr ändert.
  - Für jedes Element  $z_x \in Z'$ :
    - \* Für jedes Terminal  $t \in \Sigma$ :
      - Bestimme für jedes Element  $a$  der Menge die den akt. Zustand  $z_x$  bildet, die Menge der neuen Zustände bezüglich dem Terminal  $t$ .  $\cup_{a \in z_x} \{b \in Z | \delta(a, t) = b\}$
      - Fasse diese zu einer neuen Menge  $z_{neu}$  zusammen.  $z_{neu} = \cup_{a \in z_x} \{b \in Z | \delta(a, t) = b\}$
      - Wenn  $z_{neu}$  noch nicht in  $Z'$  enthalten ( $z_{neu} \notin Z'$ ), füge es in die Zustandsmenge  $Z'$  hinzu.  $Z' \cup \{z_{neu}\}$
      - Wenn die Menge  $z_{neu}$  ein Endzustand aus  $E$  enthält und  $z_{neu}$  noch nicht in  $E'$  enthalten ist ( $(\exists_{z_{neu}}^a : a \in E) \wedge z_{neu} \notin E'$ ), dann füge  $z_{neu}$  der Menge  $E'$  hinzu.
      - Wenn es in  $\delta$  noch keine Regel der Gestalt  $\delta(z_x, t) = z_{neu}$  gibt, ergänze diese.

Wenn man eines von beiden gemacht hat, erhält man folgenden DFA  $M'$ :

$$\begin{aligned}
M' &:= (Z', \Sigma, \delta', \{z_1, z_2\}, E') \\
Z' &:= \{\{z_1\}, \{z_2\}, \{z_1, z_2\}, \{z_1, z_3\}, \{z_2, z_3\}\} \\
\Sigma &:= \{0, 1\} \\
E' &:= \{\{z_1, z_3\}, \{z_2, z_3\}\} \\
\delta'(\{z_1, z_2\}, 0) &:= \{z_1, z_3\} \\
\delta'(\{z_1, z_2\}, 1) &:= \{z_2, z_3\} \\
\delta'(\{z_1, z_3\}, 0) &:= \{z_1\} \\
\delta'(\{z_1, z_3\}, 1) &:= \{z_2, z_3\} \\
\delta'(\{z_1\}, 0) &:= \{z_1\} \\
\delta'(\{z_1\}, 1) &:= \{z_2, z_3\} \\
\delta'(\{z_2, z_3\}, 0) &:= \{z_1, z_3\} \\
\delta'(\{z_2, z_3\}, 1) &:= \{z_2\} \\
\delta'(\{z_2\}, 0) &:= \{z_1, z_3\} \\
\delta'(\{z_2\}, 1) &:= \{z_2\}
\end{aligned}$$

## 2 Pumping Lemma

### 2.1 Satz in Quantorenschreibweise

Folgende Notation kann man durch stückweises Umschreiben aus dem Text im Skript gewinnen:

- Sei  $L$  eine reguläre Sprache |  $L \in \mathcal{L}_3$
- Dann gibt es eine positive Zahl  $n \Rightarrow \exists_{\mathbb{N}}^n$
- sodass sich alle Wörter  $x \in L \mid \forall_L^x$
- mit  $|x| \geq n$  zerlegen lassen |  $|x| \geq n \Rightarrow$
- als  $x = uvw \mid \exists_{\Sigma^*}^{uvw} : x = uvw$
- , sodass folgende Eigenschaften gelten |  $|v| \geq 1 : \wedge v \neq \varepsilon$
- $|uv| \leq n, \mid \wedge |uv| \leq n$
- für alle  $i = 0, 1, 2, \dots \mid \wedge \forall_{\mathbb{N}}^i :$
- gilt  $uv^i w \in L \mid uv^i w \in L$

Und zusammengesetzt macht dies:

$$L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \exists_{\mathbb{N}}^n : \forall_L^x : (|x| \geq n \Rightarrow \exists_{\Sigma^*}^{u,v,w} : (x = uvw \wedge v \neq \varepsilon \wedge |uv| \leq n \wedge \forall_{\mathbb{N}}^i : uv^i w \in L))$$

### 2.2 Kontraposition

Um den Satz umzukehren, habe ich folgende Regeln verwendet:

- $(\neg(a \Rightarrow b)) \Leftrightarrow ((\neg b) \Rightarrow (\neg a))$
- $(\neg(a \wedge b)) \Leftrightarrow (a \Rightarrow (\neg b))$
- $(\neg(\forall_A^a)) \Leftrightarrow (\exists_A^a)$
- $(\neg(\exists_A^a)) \Leftrightarrow (\forall_A^a)$
- $(\neg(a \in A)) \Leftrightarrow (a \notin A)$

Und so sieht er damit aus:

$$[\forall_{\mathbb{N}}^n : \exists_L^x : (|x| \geq n \wedge \forall_{\Sigma^*}^{u,v,w} : ((x = uvw \wedge v \neq \varepsilon \wedge |uv| \leq n) \Rightarrow (\exists_{\mathbb{N}}^i : uv^i w \notin L)))] \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3$$

### 2.3 Kontraposition als Text

Wenn folgendes gilt, folgt daraus, dass  $L$  keine reguläre Sprache ist:

Für alle positiven Zahlen  $n$  existiert ein  $x \in L$  mit  $|x| \geq n$  und das für alle  $u, v, w \in L$  gilt, dass aus

- $x = uvw$
- und  $|v| \geq 1$
- und  $|uv| \leq n$

folgt, dass es ein  $i \in \mathbb{N}$  gibt mit  $uv^i w \notin L$ .

### 3 Regulärer Ausdruck für Fließkommazahlen

$$\alpha = [0|1|2|3|4|5|6|7|8|9][0|1|2|3|4|5|6|7|8|9]^*$$

Ich bin mir nicht sicher, ob der  $+$  Exponent auch für Reguläre Ausdrücke definiert ist, wenn ja, könnte man  $\alpha$  auch so schreiben.

$$\alpha = [0|1|2|3|4|5|6|7|8|9]^+$$

Dieses  $\alpha$  beschreibt eine beliebig lange Folge von Ziffer  $(0, \dots, 9)$ , mindestens aber eine einzelne Ziffer. Da dies in einer Zahl in Exponentenschreibweise an 3 Stellen vorkommen kann, ist es sinnvoll, dies vorweg separat zu definieren. Der eigentlich gesuchte Ausdruck besteht nun aus:

- aus einem optionalen  $-$  am Anfang  $[-]$
- aus den zwingend vorhandenen Vorkommaziffern  $|\alpha$
- aus einem optionalen Nachkommabereich (mit führendem Komma)  $[\cdot, \alpha]$
- aus einem optionalen Exponentbereich (mit führendem  $e$  und optionalem  $-$ )  $[e[-]\alpha]$

Zusammen erhält man den regulären Ausdruck  $\beta$  für Zahlen in Exponentenschreibweise:

$$\beta = [-]\alpha[\cdot, \alpha][e[-]\alpha]$$