Übungsaufgaben Theoretische Informatik I
Blatt 5

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 23220320

20. Dezember 2004

1 Aufgabe

1.1 Zeichnung des Zustandsgraphen des NFA M

Zum Zeichnen des Zustandsgraphen eines NFA ist meiner Meinung nach nicht viel zu sagen. Allgemein kann man wie folgt vorgehen:

- Zeichne alle Zustände
- Markiere Startzustände mit einem auf sie zeigenden Pfeil
- Markiere Endzustände mit Doppelkreisen
- Zeichne alle möglichen Zusandsüberführungen ein, und beschrifte sie

Abbildung 1: Zustandsgraph von M

/home/caller/Documents/theoinf/aufgabe5/zustandsgraph1a.pdf not found!

1.2 DFA M' zu NFA M

Um aus einen NFA ein DFA zu machen, könnte man nach der Potenzmengen konstruktion vorgehen. Allerdings würde man so einige überflüssige Zustände erhalten. Um dies zu vermeiden nutze ich einen anderen Algorithmus:

- Füge einen Zustand in den Graphen hinzu, mache ihn als Startzustand kenntlich, und beschrifte ihn mit der Menge der Startzustände des NFA.
- Folgendes solange ausführen, bis sich an dem Grapen nichts mehr ändert.
  - Für jedem Zustand z_x des entstehenden Graphen:
    - Für jedes Terminal $t \in \Sigma$:
      - Bestimme für jedes Element der Menge die den akt. Zustand z_x bildet, die Menge der neuen Zustände bezüglich dem Terminal t.
      - Fasse diese zu einer neuen Menge z_{neu} zusammen.

      - Wenn z_{neu} noch nicht auf dem Graphen, füge ihm zum Graphen hinzu, und beschrifte ihn mit der Menge z_{neu}.
      - Wenn die Menge z_{neu} ein Endzustand aus E enthält ($\exists^{a}_{z_{neu}} : a \in E$), dann umkreise z_{neu} doppelt.
      - Wenn noch nicht vorhanden, zeichne einen Pfeil von z_x nach z_{neu}.
      - Wenn noch nicht vorhanden, ergänze die Beschriftung t am Pfeil von z_x nach z_{neu}.

Wenn man diesen Algorithmus ausgeführt hat, ist man in Besitz des DFA Graphen eines NFA. Für den M' wäre das folgender:

Abbildung 2: Zustandsgraph von M'

`/home/caller/Documents/theoinf/aufgabe5/zustandsgraph1b.pdf not found!`

Enweder kann man den DFA M' nun aus dem Diagramm ablesen, oder man geht den folgenden Algorithmus (ähnlich dem zur Konstruktion eines DFA aus einem NFA) durch (ist sicherlich noch im Detail optimierbar):

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA. Ziel ist es einen DFA mit $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ zu erstellen
- $z_0' = S$, $Z' = S$
- Folgendes solange ausführen, bis sich an δ und Z' nichts mehr ändert.
  - Für jedes Element $z_x \in Z'$:
    - Für jedes Terminal $t \in \Sigma$:
      - Bestimme für jedes Element a der Menge die den akt. Zustand z_x bildet, die Menge der neuen Zustände bezüglich dem Terminal t. $\cup_{a \in z_x} \{b \in Z | \delta(a, t) = b\}$
      - Fasse diese zu einer neuen Menge z_{neu} zusammen. $z_{neu} = \cup_{a \in z_x} \{b \in Z | \delta(a, t) = b\}$
      - Wenn z_{neu} noch nicht in Z' enthalten ($z_{neu} \notin Z'$), füge es in die Zustandsmenge Z' hinzu. $Z' \cup \{z_{neu}\}$
      - Wenn die Menge z_{neu} ein Endzustand aus E enthält und z_{neu} noch nicht in E' enthalten ist ($\left(\exists^{a}_{z_{neu}} : a \in E\right) \wedge z_{neu} \notin E'$), dann füge z_{neu} der Menge E' hinzu.
      - Wenn es in δ noch keine Regel der Gestalt $\delta(z_x, t) = z_{neu}$ gibt, ergänze diese.

Wenn man eines von beiden gemacht hat, erhält man folgenden DFA M':

$$
\begin{aligned}
M' &:= (Z', \Sigma, \delta', \{z_1, z_2\}, E') \\
Z' &:= \{\{z_1\}, \{z_2\}, \{z_1, z_2\}, \{z_1, z_3\}, \{z_2, z_3\}\} \\
\Sigma &:= \{0, 1\} \\
E' &:= \{\{z_1, z_3\}, \{z_2, z_3\}\} \\
\delta'(\{z_1, z_2\}, 0) &:= \{z_1, z_3\} \\
\delta'(\{z_1, z_2\}, 1) &:= \{z_2, z_3\} \\
\delta'(\{z_1, z_3\}, 0) &:= \{z_1\} \\
\delta'(\{z_1, z_3\}, 1) &:= \{z_2, z_3\} \\
\delta'(\{z_1\}, 0) &:= \{z_1\} \\
\delta'(\{z_1\}, 1) &:= \{z_2, z_3\} \\
\delta'(\{z_2, z_3\}, 0) &:= \{z_1, z_3\} \\
\delta'(\{z_2, z_3\}, 1) &:= \{z_2\} \\
\delta'(\{z_2\}, 0) &:= \{z_1, z_3\} \\
\delta'(\{z_2\}, 1) &:= \{z_2\}
\end{aligned}
$$

2 Pumping Lemma

2.1 Satz in Quantorenschreibweise

Folgenden Notation kann man durch stückweises Umschreiben aus dem Text im Skript gewinnen:

- Sei L eine reguläre Sprache| $L \in \mathcal{L}_3$
- Dann gibt es eine positive Zahl $n| \Rightarrow \exists_{\mathbb{N}}^{n}$
- sodass sich alle Wörter $x \in L| \ \forall_{L}^{x}$
- mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen| $|x| \geq n \Rightarrow$
- als $x = uvw| \ \exists_{\Sigma^*}^{uvw} : x = uvw$
- , sodass folgende Eigenschaften gelten| $|v| \geq 1$: $\wedge v \neq \varepsilon$
- $|uv| \leq n,| \wedge |uv| \leq n$
- für alle $i = 0, 1, 2, \ldots| \wedge \forall_{\mathbb{N}}^{i} :$
- gilt $uv^iw \in L| \ uv^iw \in L$

Und zusammengesetzt macht dies:

$$L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \exists_{\mathbb{N}}^{n} : \forall_{L}^{x} : \big(|x| \geq n \Rightarrow \exists_{\Sigma^*}^{u,v,w} : \big(x = uvw \wedge v \neq \varepsilon \wedge |uv| \leq n \wedge \forall_{\mathbb{N}}^{i} : uv^iw \in L\big)\big)$$

2.2 Kontraposition

Um den Satz umzukehren, habe ich folgende Regeln verwendet:

- $(\neg (a \Rightarrow b)) \Leftrightarrow ((\neg b) \Rightarrow (\neg a))$
- $(\neg (a \wedge b)) \Leftrightarrow (a \Rightarrow (\neg b))$
- $(\neg (\forall_{A}^{a})) \Leftrightarrow (\exists_{A}^{a})$
- $(\neg (\exists_{A}^{a})) \Leftrightarrow (\forall_{A}^{a})$
- $(\neg (a \in A)) \Leftrightarrow (a \notin A)$

Und so sieht er damit aus:

$$\big[\forall_{\mathbb{N}}^{n} : \exists_{L}^{x} : \big(|x| \geq n \wedge \forall_{\Sigma^*}^{u,v,w} : \big((x = uvw \wedge v \neq \varepsilon \wedge |uv| \leq n) \Rightarrow \big(\exists_{\mathbb{N}}^{i} : uv^iw \notin L\big)\big)\big)\big] \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3$$

2.3 Kontraposition als Text

Wenn folgendes gilt, folgt daraus, dass L keine reguläre Sprache ist:

Für alle positiven Zahlen n existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq n$ und das für alle $u, v, w \in L$ gilt, dass aus

- $x = uvw$
- und $|v| \geq 1$
- und $|uv| \leq n$

folgt, dass es ein $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $uv^iw \notin L$.

3 Regulärer Ausdruck für Fließkommazahlen

$$\alpha = [0|1|2|3|4|5|6|7|8|9]\,[0|1|2|3|4|5|6|7|8|9]^*$$

Ich bin mir nicht sicher, ob der + Exponent auch für Reguläre Ausdrücke definiert ist, wenn ja, könnte man α auch so schreiben.

$$\alpha = [0|1|2|3|4|5|6|7|8|9]^+$$

Dieses α beschreibt eine belibig lange Folge von Ziffer $(0, \ldots, 9)$, mindestens aber eine einzelne Ziffer. Da dies in einer Zahl in Exponentenschreibweise an 3 Stellen vorkommen kann, ist es sinnvoll, dies vorweg seperat zu definieren. Der eigentlich gesuchte Ausdruck besteht nun aus:

- aus einem optionalen $-$ am Anfang| $[-]$
- aus den zwingend vorhandenen Vorkommaziffern| α
- aus einem optionalen Nachkommabereich (mit führendem Komma)| $[, \alpha]$
- aus einem optionalen Exponentbereich (mit führendem e und optionalem $-$)| $[e\,[-]\,\alpha]$

Zusammen erhält man den regulären Ausdruck β für Zahlen in Exponentschreibweise:

$$\beta = [-]\,\alpha\,[, \alpha]\,[e\,[-]\,\alpha]$$