Übungsaufgaben Theoretische Informatik I
Blatt 6

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>
Matrikel Nummer: 23220320

20. Dezember 2004

1 Pumping Lemma

1.1 Prüfen der Sprache $M_1 = \{a^n b^m | n, m \in \mathbb{N}\}$

Als erstes benenne ich die Symbole in der Definition von M_1 um, damit keine Verwechselungen mit denen des Pumping Lemma (P.L.) vorkommen.

$$M_1 = \left\{a^k b^m | k, m \in \mathbb{N}\right\}$$

Wörter der Sprache der Länge l haben folgende Gestalt: $x = a^{k+l+s} b^{m-s}$ mit $k, m \in \mathbb{N}$ und $s = 0, 1, \ldots, \min(l, m)$. Nun muss ich für jedes dieser Wörter eine Zerlegung finden.

$$x = a^{k+l+s} b^{m-s} = uvw$$

$$u = a^y, v^z, w = a^{k+l+s-y-z} b^{m-s}$$

Für diese uvw muss nun gelten, das $uv^i w \in M_1$ gilt.

$$uv^i w = a^y \left(a^z\right)^i a^{k+l+s-y-z} b^{m-s} = a^{y+zi+k+l+s-y-z} b^{m-s} = a^{k+l+s+(z-1)i} b^{m-s} \in M_1$$

Der Exponent von a und b nimmt nur positive Zahlen an, und somit liegt $uv^i w$ in $M_1 \Rightarrow M_1$ erfüllt das P.L., und ***könnte*** regulär sein. Und das ist es auch, da es sich mit folgender regulären Grammatik beschreiben lässt (ohne Beweis):

$$\begin{aligned}
G &:= (V, \Sigma, P, z_0) \\
V &:= \{z_0, z_1\} \\
\Sigma &:= \{a, b\} \\
P &:= \{z_0 \to az_0 | az_1; \\
&\phantom{:=\ \{} z_1 \to bz_2 | b\}
\end{aligned}$$

1.2 Prüfen der Sprache $M_2 = \{a^n b^m | n = m \wedge n, m \in \mathbb{N}\}$

Nach dem P.L. müssen sich alle Wörter x mit $|x| \geq n$ "aufpumpen" lassen. Wenn man also ein Wort findet, für das dies nicht gilt, kann die Sprache nicht regulär sein. Vorweg, die Sprache M_2 lässt sich auch so schreiben. $M_2 = \left\{a^k b^k | k \in \mathbb{N}\right\}$

- $x = a^k b^k = uvw$ mit $|uv| \leq n$
- $u = a^y$, $v = a^z$, $w = a^{k-y-z} b^k$
- Für alle v^i muss $uv^i w \in M_2$ gelten
  - $uv^i w = a^y \left(a^z\right)^i a^{k-y-z} b^k = a^{y+iz+(k-y-z)} b^k = a^{k+(i-1)z} b^k$
  - man sieht sofort, für $i \neq 1$ sind die Anzahl der a's und b's verschieden
  - $\Rightarrow uv^{i \neq 1} w \notin M_2$
- $\Rightarrow$ Pumping Lemma nicht erfüllt
- M_2 nicht regulär

1.3 Prüfen der Sprache $M_3 = \{a^n b^m | n \leq m \wedge n, m \in \mathbb{N}\}$

Vorweg, die Sprache M_3 lässt sich auch so schreiben. $M_3 = \left\{a^k b^{k+s} | k, s \in \mathbb{N}\right\}$.

Hiermit lässt sich die *Vermutung* anstellen, das M_3 nicht regulär sein kann, da sich M_3 zerlegen lässt in $M_3 = M_2 \{b^s | s \in \mathbb{N}\}$ und M_2 nicht regulär war…

Hier gehe ich ähnlich vor wie bei M_2:

- $x = a^k b^{k+s} = uvw$ mit $|uv| \leq n$
- $u = a^y$, $v = a^z$, $w = a^{k-y-z} b^{k+s}$
- Für alle v^i muss $uv^i w \in M_2$ gelten
  - $uv^i w = a^y \left(a^z\right)^i a^{k-y-z} b^{k+s} = a^{y+iz+(k-y-z)} b^{k+s} = a^{k+(i-1)z} b^{k+s}$
  - man sieht sofort, für $(i-1)\, z > s$ bzw. $i > 1 + \frac{s}{z}$ sind die Anzahl der a's größer, als die der b's, was der Sprache M_3 wiederspricht
  - $\Rightarrow uv^{i > 1 + \frac{s}{z}} w \notin M_3$
- $\Rightarrow$ Pumping Lemma nicht erfüllt
- M_3 nicht regulär

1.4 Prüfen der Sprache $M_4 = \{a^n b^m | n \geq m \wedge n, m \in \mathbb{N}\}$

Das gleiche System wie unter M_3. Man könnte hier allerdings auch Argumentieren, dass, wenn man einen Automaten konstruieren würde der die Wörter rückwerts akzeptiert könnte, man aus M_3 die Sprache M_4 (bis auf Umbenennung der Variablen) erhalten hätte, also kann auch M_4 nicht regulär sein, aber machen wirs mal wie oben.

Vorweg, die Sprache M_4 lässt sich auch so schreiben. $M_4 = \left\{a^{k+s} b^k | k, s \in \mathbb{N}\right\}$.

Hiermit lässt sich (mal wieder) die *Vermutung* anstellen, das M_4 nicht regulär sein kann, da sich M_4 zerlegen lässt in $M_4 = \{a^s | s \in \mathbb{N}\} M_2$ und M_2 nicht regulär war…

Hier gehe ich ähnlich vor wie bei M_2 bzw. M_3:

- $x = a^{k+s}b^k = uvw$ mit $|uv| \leq n$
- $u = a^y$, $v = a^z$, $w = a^{k+s-y-z}b^k$
- Für alle v^i muss $uv^iw \in M_2$ gelten
  - $uv^iw = a^y\left(a^z\right)^i a^{k+s-y-z}b^k = a^{y+iz+(k+s-y-z)}b^k = a^{k+s+(i-1)z}b^k$
  - man sieht sofort, für $s + (i-1)\,z < 0$ bzw. $i < 1 - \frac{s}{z}$ sind die Anzahl der a's kleiner, als die der b's, was der Sprache M_3 wiederspricht
  - $\Rightarrow uv^{i<1-\frac{s}{z}}w \notin M_4$
- $\Rightarrow$ Pumping Lemma nicht erfüllt
- M_4 nicht regulär