

# Übungsaufgaben Theoretische Informatik I

## Blatt 6

Marco Möller <Marco.Moeller@gmxpro.de>  
Matrikel Nummer: 23220320

20. Dezember 2004

### 1 Pumping Lemma

#### 1.1 Prüfen der Sprache $M_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Als erstes benenne ich die Symbole in der Definition von  $M_1$  um, damit keine Verwechslungen mit denen des Pumping Lemma (P.L.) vorkommen.

$$M_1 = \{a^k b^m \mid k, m \in \mathbb{N}\}$$

Wörter der Sprache der Länge  $l$  haben folgende Gestalt:  $x = a^{k+l+s} b^{m-s}$  mit  $k, m \in \mathbb{N}$  und  $s = 0, 1, \dots, \min(l, m)$ . Nun muss ich für jedes dieser Wörter eine Zerlegung finden.

$$x = a^{k+l+s} b^{m-s} = uvw$$
$$u = a^y, v^z, w = a^{k+l+s-y-z} b^{m-s}$$

Für diese  $uvw$  muss nun gelten, dass  $uv^i w \in M_1$  gilt.

$$uv^i w = a^y (a^z)^i a^{k+l+s-y-z} b^{m-s} = a^{y+zi+k+l+s-y-z} b^{m-s} = a^{k+l+s+(z-1)i} b^{m-s} \in M_1$$

Der Exponent von  $a$  und  $b$  nimmt nur positive Zahlen an, und somit liegt  $uv^i w$  in  $M_1 \Rightarrow M_1$  erfüllt das P.L., und *könnte* regulär sein. Und das ist es auch, da es sich mit folgender regulären Grammatik beschreiben lässt (ohne Beweis):

$$G := (V, \Sigma, P, z_0)$$
$$V := \{z_0, z_1\}$$
$$\Sigma := \{a, b\}$$
$$P := \{z_0 \rightarrow az_0 \mid az_1;$$
$$z_1 \rightarrow bz_2 \mid b\}$$

## 1.2 Prüfen der Sprache $M_2 = \{a^n b^m \mid n = m \wedge n, m \in \mathbb{N}\}$

Nach dem P.L. müssen sich alle Wörter  $x$  mit  $|x| \geq n$  "aufpumpen" lassen. Wenn man also ein Wort findet, für das dies nicht gilt, kann die Sprache nicht regulär sein. Vorweg, die Sprache  $M_2$  lässt sich auch so schreiben.  $M_2 = \{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

- $x = a^k b^k = uvw$  mit  $|uv| \leq n$
- $u = a^y, v = a^z, w = a^{k-y-z} b^k$
- Für alle  $v^i$  muss  $uv^i w \in M_2$  gelten
  - $uv^i w = a^y (a^z)^i a^{k-y-z} b^k = a^{y+iz+(k-y-z)} b^k = a^{k+(i-1)z} b^k$
  - man sieht sofort, für  $i \neq 1$  sind die Anzahl der  $a$ 's und  $b$ 's verschieden
  - $\Rightarrow uv^{i \neq 1} w \notin M_2$
- $\Rightarrow$  Pumping Lemma nicht erfüllt
- $M_2$  nicht regulär

## 1.3 Prüfen der Sprache $M_3 = \{a^n b^m \mid n \leq m \wedge n, m \in \mathbb{N}\}$

Vorweg, die Sprache  $M_3$  lässt sich auch so schreiben.  $M_3 = \{a^k b^{k+s} \mid k, s \in \mathbb{N}\}$ .

Hiermit lässt sich die *Vermutung* anstellen, das  $M_3$  nicht regulär sein kann, da sich  $M_3$  zerlegen lässt in  $M_3 = M_2 \{b^s \mid s \in \mathbb{N}\}$  und  $M_2$  nicht regulär war...

Hier gehe ich ähnlich vor wie bei  $M_2$ :

- $x = a^k b^{k+s} = uvw$  mit  $|uv| \leq n$
- $u = a^y, v = a^z, w = a^{k-y-z} b^{k+s}$
- Für alle  $v^i$  muss  $uv^i w \in M_3$  gelten
  - $uv^i w = a^y (a^z)^i a^{k-y-z} b^{k+s} = a^{y+iz+(k-y-z)} b^{k+s} = a^{k+(i-1)z} b^{k+s}$
  - man sieht sofort, für  $(i-1)z > s$  bzw.  $i > 1 + \frac{s}{z}$  sind die Anzahl der  $a$ 's größer, als die der  $b$ 's, was der Sprache  $M_3$  widerspricht
  - $\Rightarrow uv^{i > 1 + \frac{s}{z}} w \notin M_3$
- $\Rightarrow$  Pumping Lemma nicht erfüllt
- $M_3$  nicht regulär

## 1.4 Prüfen der Sprache $M_4 = \{a^n b^m \mid n \geq m \wedge n, m \in \mathbb{N}\}$

Das gleiche System wie unter  $M_3$ . Man könnte hier allerdings auch Argumentieren, dass, wenn man einen Automaten konstruieren würde der die Wörter rückwärts akzeptiert könnte, man aus  $M_3$  die Sprache  $M_4$  (bis auf Umbenennung der Variablen) erhalten hätte, also kann auch  $M_4$  nicht regulär sein, aber machen wirs mal wie oben.

Vorweg, die Sprache  $M_4$  lässt sich auch so schreiben.  $M_4 = \{a^{k+s} b^k \mid k, s \in \mathbb{N}\}$ .

Hiermit lässt sich (mal wieder) die *Vermutung* anstellen, das  $M_4$  nicht regulär sein kann, da sich  $M_4$  zerlegen lässt in  $M_4 = \{a^s \mid s \in \mathbb{N}\} M_2$  und  $M_2$  nicht regulär war...

Hier gehe ich ähnlich vor wie bei  $M_2$  bzw.  $M_3$ :

- $x = a^{k+s}b^k = uvw$  mit  $|uv| \leq n$
- $u = a^y, v = a^z, w = a^{k+s-y-z}b^k$
- Für alle  $v^i$  muss  $uv^iw \in M_2$  gelten
  - $uv^iw = a^y (a^z)^i a^{k+s-y-z}b^k = a^{y+iz+(k+s-y-z)}b^k = a^{k+s+(i-1)z}b^k$
  - man sieht sofort, für  $s + (i - 1)z < 0$  bzw.  $i < 1 - \frac{s}{z}$  sind die Anzahl der  $a$ 's kleiner, als die der  $b$ 's, was der Sprache  $M_3$  widerspricht
  - $\Rightarrow uv^{i < 1 - \frac{s}{z}}w \notin M_4$
- $\Rightarrow$  Pumping Lemma nicht erfüllt
- $M_4$  nicht regulär